

高 Ek 数における回転熱対流での磁場の成長傾向

Tendency to Grow the Magnetic Field in a Rotating Thermal Convection under the High Ek number.

- 大塚 慶彦, 首都大学東京, 東京都日野市旭が丘 6-6, E-mail : otsuka-yoshihiko@ed.tmu.ac.jp
田川 俊夫, 首都大学東京, 東京都日野市旭が丘 6-6, E-mail : tagawa-toshio@tmu.ac.jp
Yoshihiko Otsuka, Tokyo Metropolitan University, 6-6, Asahigaoka, Hinoshi-shi, Tokyo, Japan 191-0065
Toshio Tagawa, Tokyo Metropolitan University, 6-6, Asahigaoka, Hinoshi-shi, Tokyo, Japan 191-0065

The purpose of this study is to elucidate of the geomagnetism creation of the earth, and this study numerically considers the thermal convection and magnetic field for the incompressible viscous fluid in a rotating spherical shell. This study analyzes exhibit the tendency to grow the magnetic field by the interaction of the fluid flow and the magnetic field under several parameters for a simplified model that simulated an outer core of the earth.

1. 緒言

回転する球殻内の対流の解析は、恒星や惑星の内部の対流現象を捉える為の基本的なモデルとして研究されている。例として地球で考えてみると、地球の外核を構成する主な成分は熔融鉄であり導電性流体であること、浮力等によって対流が生じること、自転していること、以上の三つの条件からダイナモ理論が適用できる惑星であるといえる。流体と磁場の相互作用によって地球には地磁気が生成・維持されており、オーロラの発生要因となったりしている。

しかし、その発生メカニズムは多くの部分が未解明であるために、その解明を目的とした流体と磁場の両方を考慮した研究がされている。本研究はそのダイナモモデルの完成を最終的な目標に据える。流体のみを考慮した同モデルでの解析ではある程度の知見を得ており、本研究では流体と磁場の両者を考慮し磁場に関するパラメータでの系の挙動を解析している。

2. 解析方法

2-1 解析モデル

モデル概略図を Fig.1 に示す。

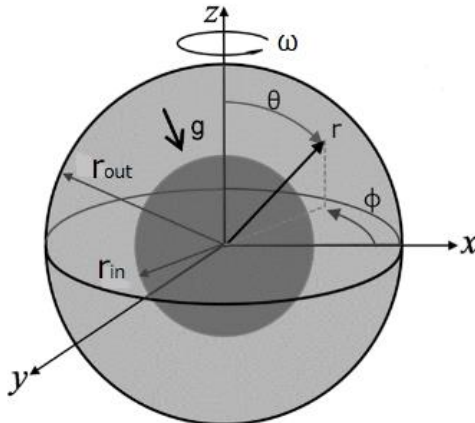


Fig.1 Rotating spherical shell model

同心球殻の内側壁面を無次元温度 1、外側壁面を無次元温度 0 の状態で内部に非圧縮性導電性流体を充填させ、角速度 ω で地球と同じ自転方向に回転させた時の系の挙動を調べる。球殻の厚さを $R_{out} - R_{in} = 1$ とし内外径比を $R_{out} : R_{in} = 3 : 1$ とする。また、重力は内に向かうに従って半径に比例して小さくなっていくものとする。密度に依存する浮力項、遠心浮力項には Boussinesq 近似を用いており温度に依存した力になっている。また本解析は三次元球座標系で行っており、緯度方向の角度を θ 、経度方向の角度を ϕ としている⁽¹⁾。

2-2 無次元支配方程式

本解析での支配方程式を以下に示す。

・連続の式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (1)$$

・運動方程式

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = -\vec{\nabla} P + Pr \nabla^2 \vec{U} + \frac{Pr}{Ek} \vec{U} \times \vec{e}_z + Pr Ra T \frac{\vec{R}}{R_{out}} - Pr Ra Fr^2 TR \sin \theta \vec{e}_r + \frac{Pr}{Prm} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad (2)$$

運動方程式は左辺第一項から時間項、移流項
右辺第一項から、圧力項、拡散項、コリオリ力項、浮力項、遠心浮力項、ローレンツ力項

・エネルギー方程式

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) T = \nabla^2 T \quad (3)$$

・磁荷不在の式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

・誘導方程式

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tau} = -\vec{\nabla} S + \vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{B}) + \frac{Pr}{Prm} \nabla^2 \vec{B} \quad (5)$$

誘導方程式の右辺第一項は磁気残差項⁽²⁾と呼び、計算アルゴリズムを満足させるために追加されたものであり、その意味は速度と磁場の内積で定義される。

代表長さは $r_{out} - r_{in} = d$ とし、各無次元数の定義は以下の通り。

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Ek = \frac{\nu}{2\omega d^2}, \quad Ra = \frac{\beta_0 g_0 \Delta \gamma d^3}{\alpha \nu}, \quad (6)$$

$$Fr = \sqrt{\frac{\omega^2 d}{g_0}}, \quad Prm = \frac{\nu}{v_m}$$

各無次元変数の定義は以下の通り。

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{\vec{r}}{d}, & P &= \frac{d^2 p}{\rho \alpha^2}, & \vec{U} &= \frac{d \vec{u}}{\alpha}, \\ \tau &= \frac{\alpha t}{d^2}, & T &= \frac{\gamma - \gamma_0}{\Delta \gamma}, & \vec{B} &= d \vec{b} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \alpha}}, \\ S &= d^2 s \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \alpha^3}}. \end{aligned} \quad (7)$$

2-3 解析条件

温度の初期条件として境界以外は乱数で0~1の温度をランダムに与えている。同様に磁束密度の初期条件に関しては各方向成分に-0.5~0.5の値をランダムに与えている。速度と磁場の境界条件は内壁及び外壁で貫かず滑りなし条件としている。また、本解析は連続の式を満たすために圧力及び磁気残差をHSMAC法によって解いている。格子数は $(R \times \theta \times \phi) = (56 \times 56 \times 112)$ とした。

計算機にはAMD社のGPU(R9 280X)を用いており、プログラミング言語にはC++AMPを使用した。その理由としてはGPUで高速な演算処理が可能であり、C++AMPは他のGPUプログラミング言語に比べC++との互換性が高く扱いやすいという点が挙げられる。

差分スキームは移流項に三次精度風上差分法(UTOPIA)、時間項にオイラー陽解法、その他は二次精度中心差分を用いた。回転軸での境界条件はOzoe and Toh 法³⁾を用いており、境界を挟んでの各値に連続性を持たせている。

2-4 対流に関係した無次元数の設定

本解析に使用したパラメータをTable.1に示す。

Table 1 Analysis condition

Pr	Ek	Ra	Fr	Prm
1.0	0.0001	400000	0.05	8.0

支配方程式からわかる通り流体と磁場には相互作用がある。磁場が成長するには流体の ϕ 方向速度分布が回転軸方向に沿って伸びるモードを維持する特徴的な対流構造をする必要があり、それにはRa数とEk数が大きく関わってくる。任意のEk数に対してRa数が小さければ対流自体が発生せず、大きければ浮力が支配的になり球殻内側からブルーム状の対流が生成されてしまう。本研究に取り掛かるにあたって理想とする対流構造になるパラメータを検証した。その結果をFig.2に示す。

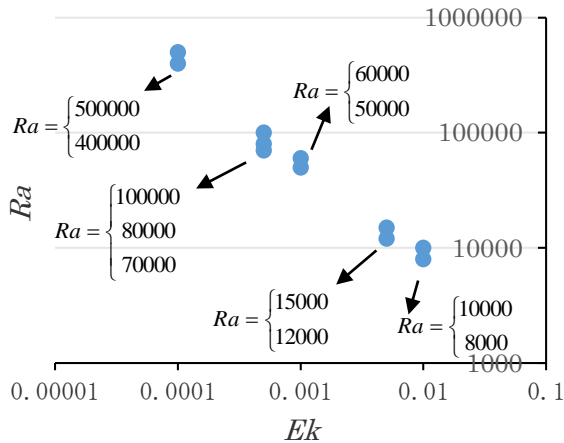


Fig.2 Figure of relationships Ek number and Ra number

今回の解析ではこのグラフにおける一つのプロットの値である $Ek = 0.0001$ 、 $Ra = 400000$ を採用した。検証を行った中では $Ek = 0.0001$ は最も小さい値であるが、地球の実スケールでのEk数は 10^{-15} オーダーのため、本研究タイトルの高Ek数とは地球スケールのそれと比較してという意味である。以上をTable 1の流体に関するパラメータの値を決定した根拠とする。

3. 解析結果

以下の指標を用いて系全体の無次元の運動エネルギー及び磁気エネルギーを評価した。

$$E_{uvw} = \frac{1}{2V_{shell}} \int \bar{U}^2 dV \quad (8)$$

$$E_B = \frac{1}{2V_{shell}} \int \bar{B}^2 dV \quad (9)$$

これによる各エネルギーの時間推移をFig.3に示す。下図は上図の対数表示。

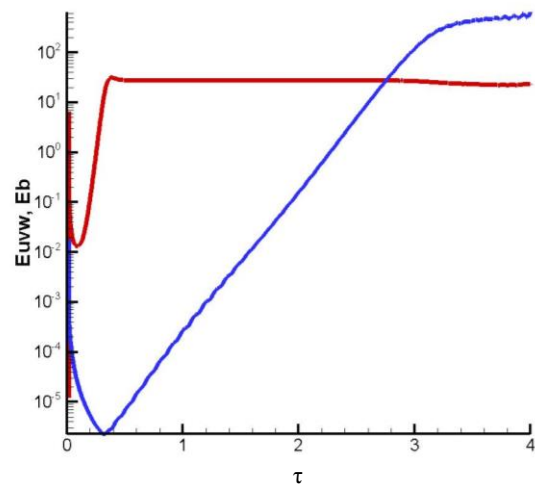
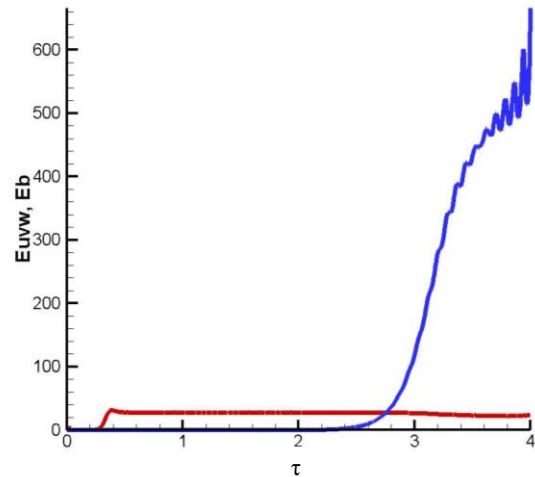


Fig.3 Time evolution of average kinetic energy and magnetic energy
RED LINE: Kinetic energy BLUE LINE: Magnetic energy

計算を開始して間もなく運動エネルギーが急上昇し、やがて一定の値に落ち着く。その時の ϕ 方向速度分布の様子がFig.4であり、そのモードを長期に渡り維持する。また磁気エネルギーもしばらくして指数関数的に一定に上昇を始めており、その時期は運動エネルギーが一定になる時、即ち流体が一つのモードを維持し始める時とほぼ一致する。そのことから磁場の増幅にはFig.4のような渦柱が形成される対流構造が重要であるといえる。やがて磁気エネルギーの上昇は緩やかになりそれと同時に振動を始める。その時期に運動エネルギーが僅かながら減少している。磁場が増大したことでローレンツ力を通して速度場に影響を与えていることが伺える。

参考文献

- (1) 平野博之, “流れの数値計算と可視化” (2011) 丸善
- (2) Matsumoto, M and Tanahashi, T., “Numerical Analysis of Thermoelectrically Conducting Fluids in a Cubic Cavity Using Vector Finite Element Method for Induction Equations” ISIJ International, 43, 6 (2003), pp.932-941.
- (3) Ozoe, T. and Toh, K., “A technique to circumvent a singularity at a radial center with application for a three-dimensional cylindrical system” Numerical Heat Transfer, Part B (1998), pp.355-365.

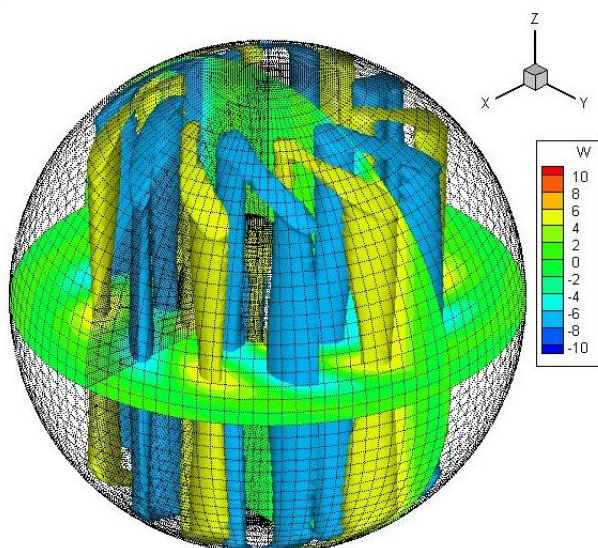


Fig.4 Isosurfaces +6.0 and -6.0 of the velocity of ϕ direction

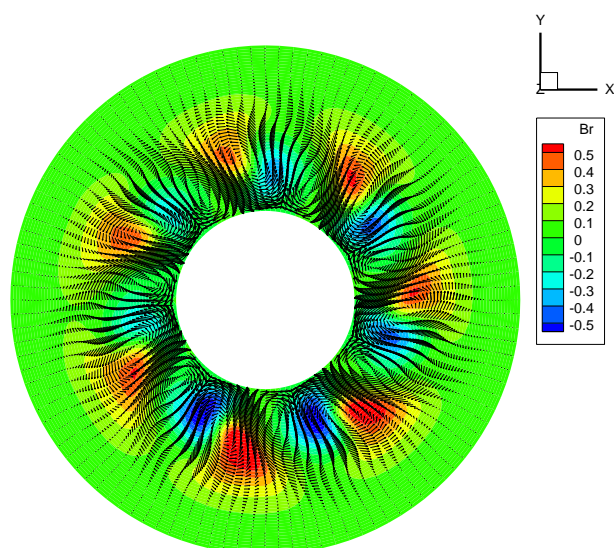


Fig.5 Magnetic distributions of radius direction and vector of velocity at the equatorial section

Fig.5 はある時間ステップでの半径方向磁場成分と速度ベクトルを可視化したものである。流体が渦巻いている部分に磁場も集中して分布していることが確認できる。また磁場に関して正負の領域を一つとした各波毎にコンターの違いがあるが、これは磁気エネルギーが振動状態になっていることから、成長段階の挙動といえる。

4. 結言

本研究において回転球殻内の流体と磁場の相互作用による磁場の成長を捉えることに成功したといえる。回転軸に沿う方向に ϕ 方向速度分布が卓越して成長する特徴的な対流構造の中で磁場が成長し、その過程で指数関数的に一定に増幅する段階と増幅が緩やかになり磁気エネルギーが振動する段階の二つの成長のフェーズがあることが確認できた。今回の計算は無次元時間4までのものであるため、それ以降の磁場の成長傾向やフェーズの検証をする必要があるといえる。