

低 Pr 数流体の磁気印加マランゴニ対流に及ぼす壁面の導電性の影響

Effect of electro-conductivity of the wall on Marangoni flow of low Prandtl number fluid under magnetic field

○ 北山 智大, 首都大, 東京都日野市旭が丘 6-6, E-mail : kitayama-tomohiro@ed.tmu.ac.jp

田川 俊夫, 首都大, 東京都日野市旭が丘 6-6, E-mail : tagawa-toshio@tmu.ac.jp

Tomohiro Kitayama, Tokyo Metropolitan Univ., Asahigaoka 6-6, Hino, Tokyo, 191-0065

Toshio Tagawa, Tokyo Metropolitan Univ., Asahigaoka 6-6, Hino, Tokyo, 191-0065

Effect of electro-conductivity of the wall on Marangoni flow of low Prandtl number fluid under magnetic field has been investigated numerically. The electro-conductivity of the wall affects the azimuthal disturbance and enables to prevent transition effectively for both axial and horizontal magnetic fields. This trend is found especially at the transition to the 1T+R-type oscillation mode. When the Hartmann number is around the critical point, the effect on the azimuthal disturbance is also found under axial magnetic field, but there is little difference between two boundary conditions of current density under horizontal one.

1. 緒言

半導体単結晶の育成方法の一つに Floating-Zone 法がある。この方法は非常に高純度の結晶を得られる方法として知られているが、熔融部の自由表面に働く表面張力に起因する振動マランゴニ対流によって結晶に欠陥縞が導入され、電気的特性の不均一を引き起こす等の問題を抱えている。こうした背景から、マランゴニ対流の構造や流れの遷移に関する研究は多くなされており⁽¹⁾⁽²⁾、対流制御に関する研究も多くなされている⁽³⁾。また近年になって、対流の構造が明らかになりつつあり、より実現現象に即したモデルでの解析が求められている。そこで本研究では、液体金属の上下にサポートロッドを用意し、磁気印加マランゴニ対流の制御効果に対して、壁面の導電性が与える影響を考察することを目的とする。

2. 解析モデル

従来より用いられている Half-Zone model を Fig. 1 の左に示す。このモデルは液柱部分のみを抽出したものとなっており、実際の実験で用いられるサポートロッドの影響は考慮されていない。そこで本研究では Fig. 1 の右に示すようなロッドを含むモデルを採用した。このモデルではロッドの上下端で等温条件を与えることで、液柱の上下端で温度の不均一を再現することが可能であり、磁場印加時には、壁面の導電性を考慮することが可能となる。本研究では、液柱及びロッドの半径 a を代表長さとし、液柱のアスペクト比とロッドのアスペクト比をそれぞれ As , As_r とする。また、印加する磁場は上下面に垂直な方向（鉛直磁場）をと水平な方向（水平磁場）の 2 種類を考え、導電性の有無による差異を検証した。なお、水平磁場は、 $\varphi = 0$ から $\varphi = \pi$ の方向に印加した。

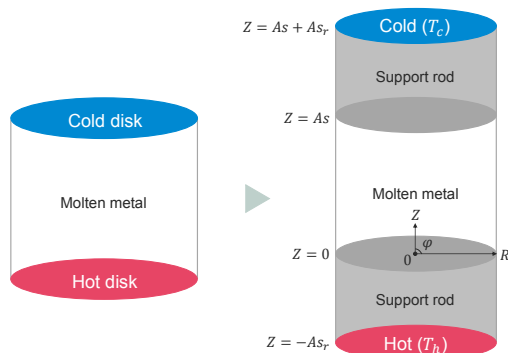


Fig. 1: Calculation model (left: half-zone model, right: present model).

3. 導電壁の取り扱い⁽⁴⁾

本節では、導電性を有する境界条件のモデル化について述べる。流体の導電率を σ_f 、ロッドの導電率を σ_r とすると、Ohm の法則により電流密度を以下のように表すことができる。

$$\vec{j}_f = \sigma_f (-\vec{\nabla}\psi + \vec{u} \times \vec{b}), \quad \vec{j}_r = \sigma_r (-\vec{\nabla}\psi) \quad (1)$$

Fig. 2 に注目する壁面近傍の図を示す。境界面に垂直な電流密度の成分 j_{bn} は、流体・ロッド双方の値を用いて計算することが望ましい。そこで、流体中の電流密度の壁面に垂直な成分を j_{fn} 、ロッド中のそれを j_{rn} とすると、Ohm の法則より、

$$j_{fn} = -\sigma_f \frac{\psi_b - \psi_f}{\Delta n/2}, \quad j_{rn} = -\sigma_r \frac{\psi_r - \psi_b}{\Delta n/2} \quad (2)$$

ただし、境界面近傍では流速は十分に小さいとし、誘導起電力の項を落とした。境界を含む検査体積では、流体中の電流密度とロッド内の電流密度は等しいので、

$$j_{bn} = -\frac{2\sigma_f\sigma_r}{\sigma_f + \sigma_r} \frac{\psi_r - \psi_f}{\Delta n} = -\frac{2\sigma_f\sigma_r}{\sigma_f + \sigma_r} \frac{\partial\psi}{\partial n} \quad (3)$$

これを無次元化し、最終的に以下の式を得る。

$$J_{bn} = -\frac{2Cm}{1 + Cm} \frac{\partial\Psi}{\partial n}, \quad Cm = \frac{\sigma_r}{\sigma_f} \quad (4)$$

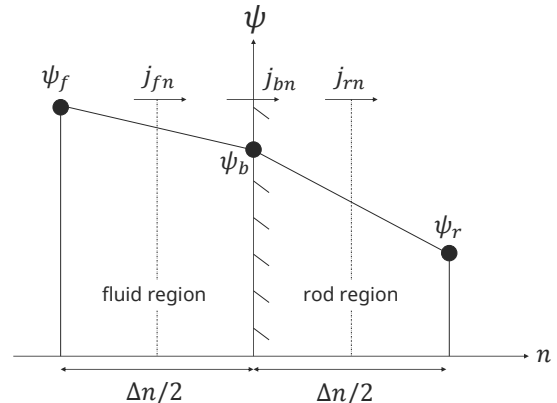


Fig. 2: Current density at interface between the fluid and the rods.

4. 解析方法

解析に際し、対象となる液体金属は溶融スズを想定し、非圧縮性 Newton 流体を仮定した。また界面変動は無いものとし、無重力環境を模擬した計算を行った。空間の離散化には等間隔スタガード格子を採用し、時間項にはオイラー陽解法を適用した。運動方程式の移流項には対流型補間法⁽⁵⁾を適用し、圧力解法は SMAC 法を用いた。運動方程式中の電流密度は Ohm の法則により求め、電荷保存則を満たすよう電位修正を行い、電場を求めた。電位の解法には圧力と同様 SMAC 法を採用し、計算の高速化のため Multi-Grid 法を適用した。また温度場は、エネルギー方程式を完全陰解法で解くことにより求めた。以下に解析に用いた無次元支配方程式を示す。

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla P + \nabla^2 \vec{U} + Ha^2 \vec{J} \times \vec{B} \quad (6)$$

$$Pr \left\{ \frac{\partial T}{\partial \tau} + (\vec{U} \cdot \nabla) T \right\} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (8)$$

$$\vec{J}_{fluid} = -\nabla \Psi + \vec{U} \times \vec{B} \quad (9)$$

$$\vec{J}_{rod} = -Cm \nabla \Psi \quad (10)$$

計算の初期条件として、流体は静止しており、また温度場はロッド下端で +0.5、その他の領域では -0.5 とした。速度の境界条件は、液柱の上下端で滑りなし、自由表面ではマランゴニ境界条件、中心軸では Ozoe and Toh の方法を採用した。温度の境界条件はロッドの上下端で加熱及び冷却、自由表面では断熱とした。電流密度は自由表面とロッドの上下端で絶縁とし、中心軸では速度と同様に Ozoe and Toh の方法を用いた。以下に初期条件と境界条件を示す。

初期条件：

$$U = 0, T = -0.5 \quad \text{at } \tau = 0 \quad (11)$$

境界条件：

ロッドの上下端：

$$T = -0.5, J_Z = 0 \quad \text{at } Z = -As_r \quad (12)$$

$$T = +0.5, J_Z = 0 \quad \text{at } Z = As + As_r \quad (13)$$

自由表面（液柱）：

$$U = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} - \frac{V}{R} = -\frac{Ma}{Pr} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \quad (15)$$

$$\frac{\partial W}{\partial R} = -\frac{Ma}{Pr} \frac{\partial T}{\partial Z} \quad (16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial R} = 0, J_R = 0 \quad (17)$$

自由表面（ロッド）：

$$\frac{\partial T}{\partial R} = 0, J_R = 0 \quad (18)$$

液柱-ロッド界面：

$$U = V = W = 0 \quad (19)$$

$$J_Z = -\frac{2Cm}{1+Cm} \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \quad \text{or } 0 \quad (20)$$

ここで、無次元数は以下のように定義した。

$$\vec{B} = \vec{b}/b_0, \vec{J} = \vec{j}/(u_0 b_0 \sigma_f), P = p/p_0, R = r/a,$$

$$T = (\theta - \theta_0)/(\theta_h - \theta_c), \vec{U} = \vec{u}/u_0 = {}^t(U, V, W),$$

$$Z = z/a, \Psi = \psi/(u_0 b_0 a), \tau = t/t_0, \nabla = a \vec{\nabla}$$

$$Ha = b_0 a \sqrt{\sigma_f / \mu}, Ma = (-\gamma_\theta (\theta_h - \theta_c) a) / (\mu \alpha_f),$$

$$Pr = \nu / \alpha_f$$

また、参照量はそれぞれ以下の通りである。 b_0 は印加した磁束密度の強さを表す。

$$u_0 = \nu / a, t_0 = a^2 / \nu, p_0 = \rho \nu^2 / a^2,$$

$$\theta_0 = (\theta_h + \theta_c) / 2$$

エネルギー方程式中の λ は無次元の熱伝導率であり、以下のように設定する。ここで、 k_r と k_f はそれぞれロッドと流体の熱伝導率とする。また、ロッド中ではエネルギー方程式の対流項がゼロとなるようにする。

$$\text{流体中} : \lambda = 1.0 \quad (21)$$

$$\text{ロッド中} : \lambda = \frac{k_r}{k_f} \equiv Km \quad (22)$$

$$\text{境界面} : \lambda = \frac{2Km}{1+Km} \quad (23)$$

境界面での λ は、前節で述べた壁面での導電性の境界条件と同様に、検査体積内での熱流束一定の条件より算出した。

5. 妥当性の検証

既往の研究⁽¹⁾から、 $As = As_r = 2.0, Ma = 200$ の解析では、まず波数 $m = 2T$ (T : Twist) の振動流が発生した後に $m = 1T$ の振動流へと遷移し、さらに時間が経過すると、 $m = 1T$ の振動を続けながら回転する流れ（便宜上 R : Rotate と表記する）を生じることが知られている。そこで本研究では、比較する文献と同一の計算条件での解析を行い、妥当性検証としてこの三段階の流れの遷移を再現することを試みた。計算条件を Tab. 1 に示す。また、Fig. 3 の (a) に本計算で得られた自由表面での速度及び温度の時間推移を示す。このグラフから、三段階の振動流遷移の様子が伺える。またその時の波数、振動モード及び遷移時期が一致していることを可視化結果より確認した。代表例として、 $m = 1T+R$ の振動流のスナップショットを Fig. 3 の (b) に示す。以上より、今回得られた結果は他の文献⁽¹⁾に記載されているものと概ね一致していることから、本計算の定性的な妥当性を確認した。

Tab. 1: The computational parameters ($Ha = 0$)

Aspect ratio	Pr	Ma	Km	Grid numbers
$As = As_r$				$(R \times \varphi \times Z)$
2.0	0.009	200	0.56	$20 \times 40 \times 120$

6. 磁場印加計算

続いて、前節で再現した流れ場に磁場を印加し、壁面の導電性の有無が流れの遷移に与える影響を検証する。格子数以外は Tab. 1 と共通の値を用い、追加の計算条件を Tab. 2 に示す。ここでは、臨界 Ha 数より十分小さい領域での解析結果と、臨界値付近での場合の 2 通りについて述べる。

Tab. 2: The additional computational parameters (applied magnetic field)

Ha	Cm	Grid numbers
	Conductive / Insulate	$(R \times \varphi \times Z)$
2 / 15	1.14 / 0	20 × 36 × 120

6.1 臨界 Ha 数以下の場合

臨界 Ha 数以下の場合として、今回は $Ha = 2$ の解析を行った。Fig. 4 に自由表面での速度及び温度の時間推移を示す。なお、(a) は鉛直磁場、(b) は水平磁場を印加した場合のグラフである。鉛直磁場の場合、 $m = 1T$ までの過渡応答は速度・温度とも概ね一致しているものの、その後の回転流への遷移時期に違いがあることが見て取れる。これは、導電壁の方が絶縁壁よりも周方向及び半径方向の擾乱を抑制する効果が高いことを示している。また水平磁場の場合でもこの傾向が見られた。いずれの磁場についても、速度や温度の絶対値については大きな差は無く、軸方向流に対する影響は極めて小さいと考えられる。

6.2 臨界 Ha 数付近の場合

続いて、 $Ha = 15$ の解析結果を Fig. 5 に示す。先程と同様、(a)、(b) はそれぞれ鉛直磁場、水平磁場での結果である。鉛直磁場の場合は、導電壁の解析では軸対称流で保持されているのに対し、絶縁壁では $m = 2$ の定常流へと遷移していることがわかる。この結果からも、壁面の導電性が周方向擾乱を効率よく抑制できていることがわかる。一方で水平磁場の場合、軸方向速度の絶対値は、導電壁の方が絶縁壁よりも大きく出ていることが見て取れる。これは、導電壁の方が周方向速度を抑制しているため、周方向にエネルギーが変換されず、結果として軸方向流の速度が相対的に増加したことが原因であると推測される。

7. 結言

今回の結果から、磁気印加マランゴニ対流の解析において壁面の導電性が与える影響を確認することができた。特に、鉛直・水平磁場ともに導電壁の方が絶縁壁よりも周方向速度の抑制効果が高く、 $1T+R$ の回転流の抑制においてその差が顕著に表れることがわかった。しかし、水平磁場を印加した場合、臨界 Ha 数付近での結果からは明確な差異が確認できていないため、更に広範な Ha 数での解析を行う必要がある。特に、軸方向流に及ぼす影響について、詳細に検証しなければならない。

従って、今後は計算の高速化・高解像度化を行うことで、計算効率や精度の向上を図ることが重要な課題となる。また、より実現象に即した解析に向け、熱起電力を考慮した計算モデルを構築し、磁場印加によって対流が駆動される場合についても考察をする予定である。

記号

- a : 円筒半径 [m], \vec{b} : 磁束密度 [T], \vec{j} : 電流密度 [A/m²],
 p : 圧力 [Pa], t : 時間 [s], \vec{u} : 速度 [m/s], z : 高さ [m]
 α_f : 流体の熱拡散率 [m²/s],
 γ_θ : 表面張力の温度係数 [N/(m·K)],
 θ_c : 冷却面温度 [K], θ_h : 加熱面温度 [K], μ : 粘度 [Pa·s],
 ν : 動粘度 [m²/s], ρ : 密度 [kg/m³],
 σ_f : 流体の導電率 [1/(Ω·m)],
 σ_r : ロッドの導電率 [1/(Ω·m)], ψ : 電位 [V]

参考文献

- (1) Yasuhiro, S., Imaishi, N., Akiyama, Y., Fujino, S. and Yoda, S., "Oscillatory Marangoni flow in half-zone liquid bridge of molten tin supported between two iron rods" J.Cryst.Growth, 262(2004), pp.631-644
- (2) Imaishi, N., Yasuhiro, S., Akiyama, Y. and Yoda, S., "Numerical simulation of oscillatory Marangoni flow in half-zone liquid bridge of low Prandtl number fluid" J.Cryst.Growth, 230(2001), 164-171
- (3) 田川, 榎本, "導電性ハーフゾーン液柱の振動マランゴニ対流に及ぼす磁場の影響" 日本機械学会論文集 (B編), 79-801(2013), pp.848-862
- (4) Tagawa, T., Ozoe, H., "The natural convection of liquid metal in a cubical enclosure with various electro-conductivities of the wall under the magnetic field" J.Heat Mass Transfer, vol.41, No.13(1998), pp.1917-1928
- (5) 梶島, "乱流の数値シミュレーション" 養賢堂 (2007)

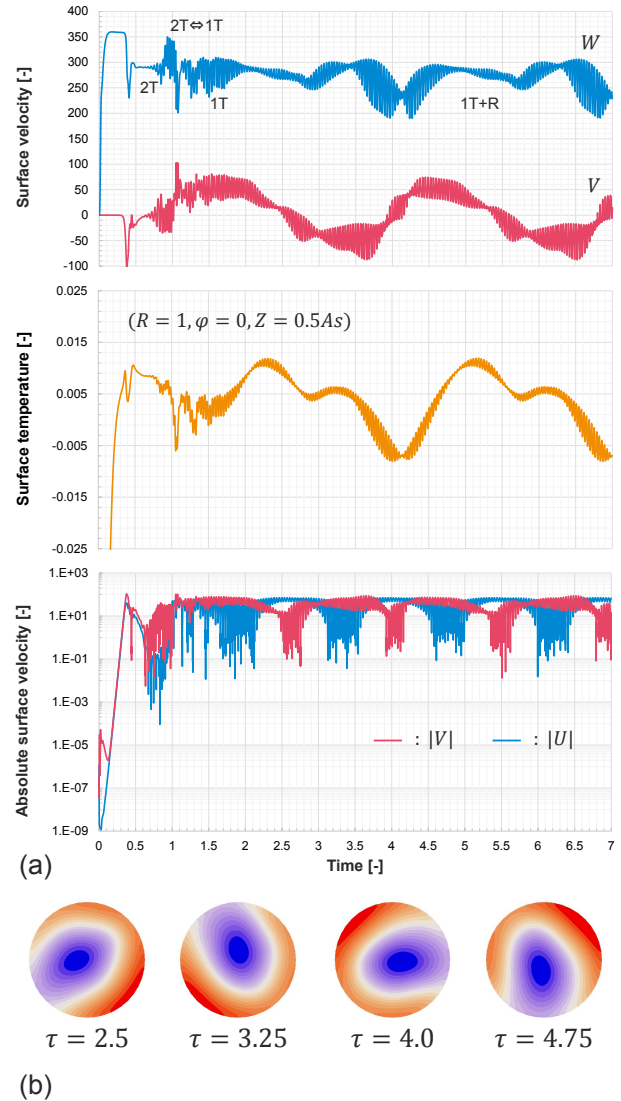


Fig. 3: Computational results of $Ha = 0$: (a) Transient response of surface velocity and temperature; and (b) Snapshots of temperature field during the $1T+R$ -type oscillation on horizontal cross section at $Z = 0.5As$.

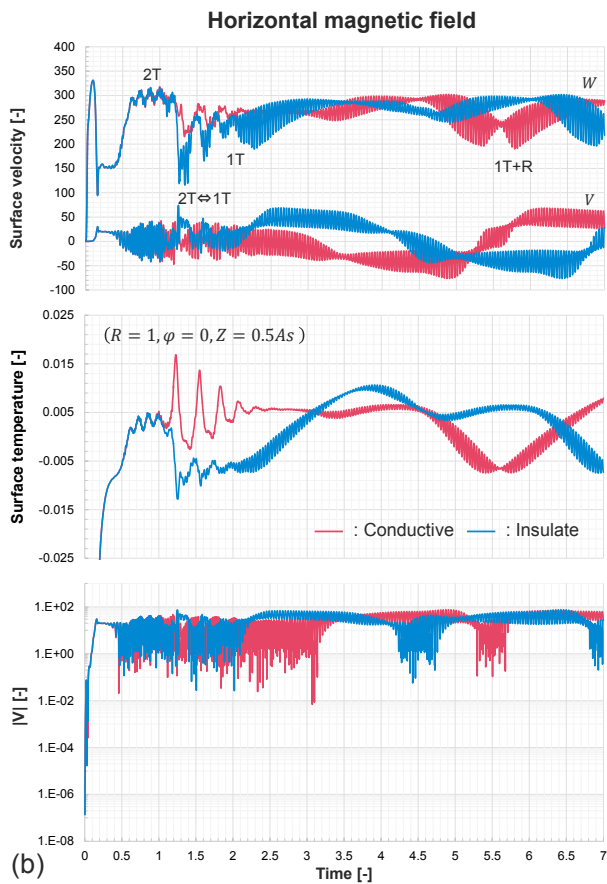
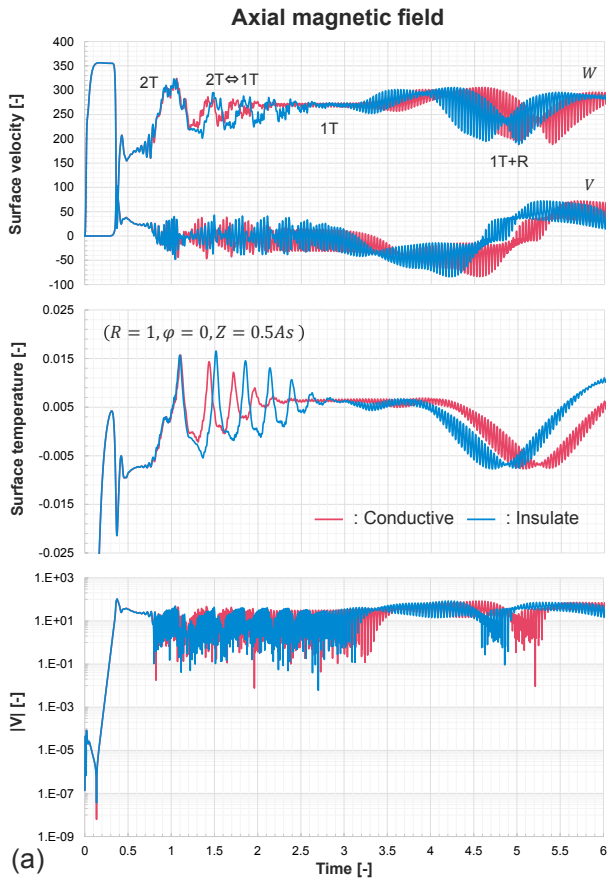


Fig. 4: Transient response of surface velocity and temperature of $Ha = 2$ (under the critical Hartmann number): (a) Axial magnetic field; and (b) Horizontal magnetic field.

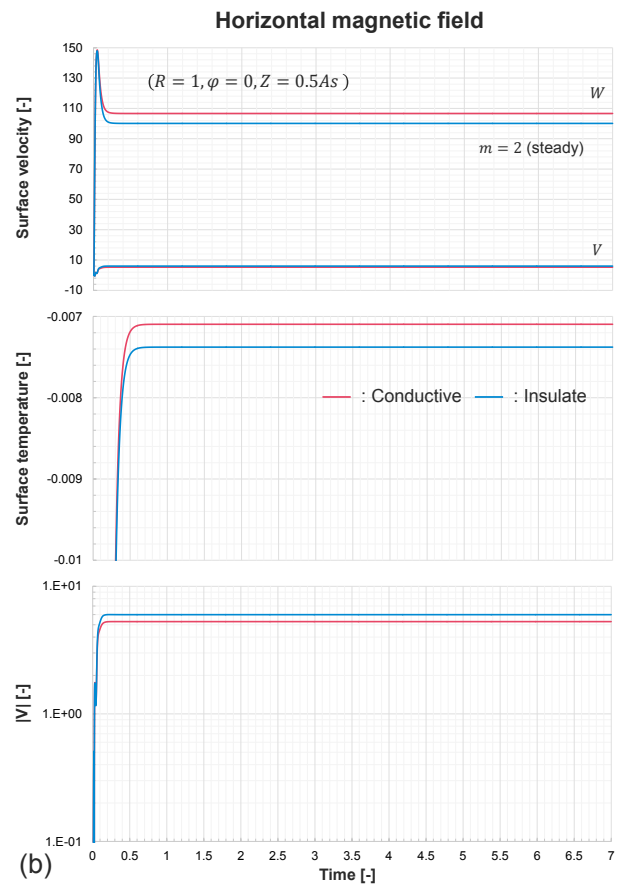
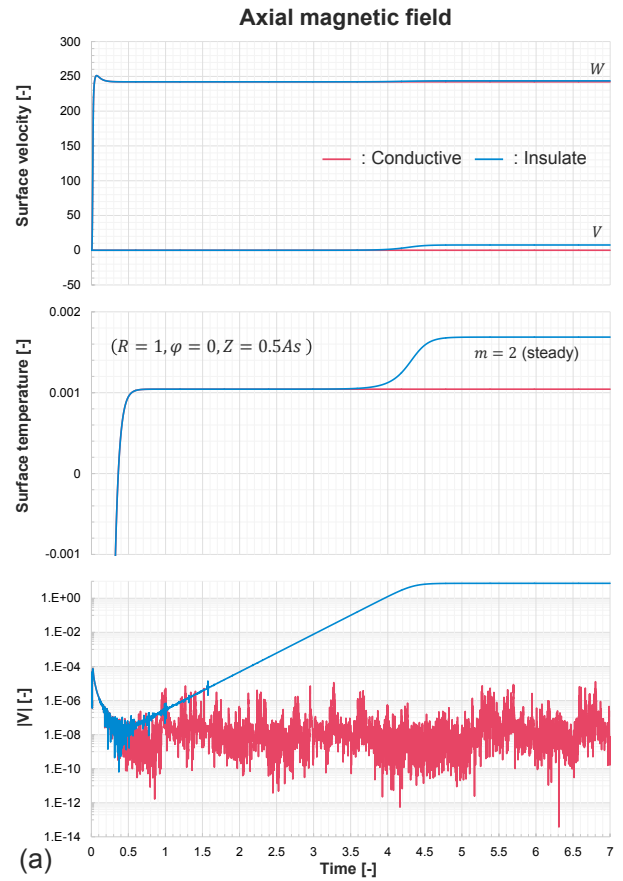


Fig. 5: Transient response of surface velocity and temperature of $Ha = 15$ (around the critical Hartmann number): (a) Axial magnetic field; and (b) Horizontal magnetic field.