

THINC 法による圧縮性流体における不連続面の高解像度スキーム

High resolution scheme for Discontinuities of Compressible flows with THINC scheme

- 稲場 智, 東工大院, 横浜市緑区長津田 4529, E-mail: inaba.s.ad@m.titech.ac.jp
肖 鋒, 東工大院, 横浜市緑区長津田 4529, E-mail: xiao@es.titech.ac.jp

Satoshi INABA, Tokyo Institute of Technology, 4529 Nagatsuta, Midoriku, Yokohama, 226-8520
Feng Xiao, Tokyo Institute of Technology, 4529 Nagatsuta, Midoriku, Yokohama, 226-8520

The numerical diffusion of discontinuities are an important but unsolved problem in numerical simulations of compressible flows. The numerical diffusion associated with the Godunov type scheme or high order polynomial reconstruction, such as approximate riemann solver and MUSCL or WENO reconstructions, tends to smear out the discontinuities. In this paper, we report our recent work to implement the THINC (Tangent of Hyperbola for INterface Capturing) scheme to compressible flows to resolve this problem. It results in a simple and efficient formulation that can be easily incorporated into any conventional finite volume models. Some numerical tests will be presented to verify the formulation for single phase compressible flows.

1. 緒言

圧縮性単相・多相流の数値解析において衝撃波や接触不連続、自由界面など物理量が不連続に変化する現象をどのように扱うかが問題となる。現在まで、圧縮性流体の数値解法の開発では、Godunov 法を原型に、計算セルの境界に常に物理場の不連続が存在することを前提にして、様々な近似リーマン解法及び高次多項式による空間再構築を中心に研究が行われてきた⁽¹⁾。これらの解法は、次の共通点を持っている。

- (i) 不連続解が生じた場合、高次再構築に起因する数値振動を抑制するために、TVD 制限関数のような勾配制限で空間離散化の次数を下げ、計算を安定させる。
- (ii) 近似リーマン解法の根本である風上差分型の数値流束は式 (1) のように、中心差分に人工粘性を加える形で書くことができる。

$$\hat{F} = \frac{1}{2} [F^L + F^R + \alpha (q^L - q^R)] \quad (1)$$

上記の (i),(ii) において、勾配制限関数と近似リーマン解法の粘性項が数値拡散の原因となり、不連続解を鈍らせる結果につながる。衝撃波は自ら不連続を生成する性質があるため、数値拡散の影響が少なく、不連続解を一定に保つことができるが、接触不連続面やスリップ面、多相流での自由界面といった不連続においては数値拡散が致命的な問題となる。

一方、非圧縮性自由界面流れでは、特殊な補間関数によって自由界面のような不連続な物理量を近似することで数値拡散、数値振動を抑制する THINC 法⁽²⁾がある。この手法は不連続の幅を一定に保つ性質があるため、数値拡散が流体の識別や表面張力など、流体解析の重要な因子に対して悪影響を及ぼす場合において有用な手法のひとつである。近年、この補間関数の再構築の手法を圧縮性多相流に応用し、鮮明な界面を安定的に捉えた例が報告されている⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾。THINC 法では補間関数の特徴からセル内部に不連続が存在することを仮定している。これは従来の近似リーマン解法において、空間再構築に THINC 法を用いることで、従来の Godunov 型の解法を避ける形で数値解法を構築できる可能性を示唆している。そこで本研究では、圧縮性流体解析の空間再構築の過程に着目し、不連続は計算セルの内部にあると仮定して、THINC 法を用いてセル境界の不連続が最小になるような空間再構築法の構築を試みる。

2. 支配方程式

本稿では以下の非粘性 Euler 方程式を対象とする。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u}) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{u}) + \nabla \cdot (\rho \bar{u} \otimes \bar{u}) + \nabla p = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E \bar{u} + p \bar{u}) = 0 \quad (4)$$

ここで ρ , u , p , E はそれぞれ密度、速度、圧力、全エネルギーである。また、状態方程式には理想気体の状態方程式を用いる。

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad (5)$$

ただし、 γ は比熱比で本稿においては $\gamma = 1.4$ である。また e は比内部エネルギーで $E = \rho e + \rho \bar{u} \cdot \bar{u}/2$ の関係を持つ。

3. 計算手法

本研究では従来型の有限体積法をベースとしてスキームの構築を行う。このスキームは以下のような計算手順から成り立っている。

- (1) セル境界の物理量の再構築
- (2) 再構築した値からセル境界のリーマン流束の評価
- (3) 時間積分によって各セルの物理量を更新

従来のセル境界の物理量の再構築には勾配制限関数を用いた 2 次精度 MUSCL⁽⁶⁾ や 5 次精度 WENO⁽⁷⁾ などが用いられているが、本研究ではこのような再構築に THINC 法を組み合わせた手法を提案する。以下に THINC 法による再構築について述べる。

3.1 THINC 法による再構築⁽⁴⁾

THINC 法は本来、二相流において流体の体積率に適用されてきた手法である。そこで本節ではまず、本来の THINC 法について説明する。

まず、ある流体 (例えば流体 1) の体積率が空間に分布している状態でセル $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ のセル平均値を次のように定義する。ここで $x_{i\pm 1/2}$ はセル境界の座標値である。

$$\bar{\phi}_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \phi_i(x, t) dx \quad (6)$$

ここで $\bar{\phi}_i$ の値は以下のように定義される.

$$\bar{\phi}_i(t) = \begin{cases} 1 & : \text{流体 1 で満たされている} \\ 0 < \alpha < 1 & : \text{界面セル} \\ 0 & : \text{流体 1 が存在しない} \end{cases} \quad (7)$$

また, 実際の計算では次の条件を満たすものを界面セルと定義する.

$$\begin{aligned} (a) \quad & \epsilon < \bar{\phi}_i(t) < 1 - \epsilon \\ (b) \quad & (\bar{\phi}_{i+1}(t) - \bar{\phi}_i(t))(\bar{\phi}_i(t) - \bar{\phi}_{i-1}(t)) > 0 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで ϵ は正のパラメーターで 10^{-6} 程度の値をとる. 次に界面セルの体積率に対して \tanh 関数を用いた次の補間関数を構築する.

$$\Phi_i(x) = \frac{1}{2}[1 + \sigma_i \tanh(\beta(X_i - d_i))] \quad (9)$$

ここで $\sigma_i = \text{sgn}(\Delta\bar{\phi}_i(t))$, $\Delta\bar{\phi}_i(t) = \bar{\phi}_{i+1}(t) - \bar{\phi}_{i-1}(t)$ である. β は補間関数の界面幅を調節するパラメーターで β が大きくなると界面幅は薄くなる. 本研究では $\beta = 2.3$ を用いている. X_i は界面セル内の無次元座標値で $X_i = (x - x_{i-1/2})/\Delta x$ である. d_i は界面のジャンプの中心座標であり, 式 (6),(9) の関係から次のように一意的に計算される.

$$d_i = \frac{1}{2\beta} \ln \left[\frac{\exp(\beta(1 + \sigma_i - 2\bar{\phi}_i)/\sigma_i)}{1 - \exp(\beta(1 - \sigma_i - 2\bar{\phi}_i)/\sigma_i)} \right] \quad (10)$$

式 (9), (10) を用いて物理場 $\psi(x, t)$ での再構築を行う. セル $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ において $\Delta\Psi = \psi_{\max} - \psi_{\min}$ のジャンプを持つとすると,

$$\Psi_i(x) = \psi_{\min} + \Phi_i(x)\Delta\Psi_i \quad (11)$$

この時,

$$\psi_{\min} = \min(\bar{\psi}_{i-1}, \bar{\psi}_{i+1}) \quad (12)$$

$$\psi_{\max} = \max(\bar{\psi}_{i-1}, \bar{\psi}_{i+1}) \quad (13)$$

また, $\bar{\psi}_{i-1}$ はセル $[x_{i-3/2}, x_{i-1/2}]$ のセル平均値, $\bar{\psi}_{i+1}$ はセル $[x_{i+1/2}, x_{i+3/2}]$ のセル平均値の値である. ここで再構築した式 (11) の $x = x_{i-1/2}, x_{i+1/2}$ での値がそれぞれリーマン流束を求める際に必要なセル境界の値, $\Psi_{i-1/2}^L$ と $\Psi_{i+1/2}^R$ である.

3.2 不連続への THINC 法の適用

THINC 法は本来, 体積率が階段状のプロファイルをしているという仮定を元に, 式 (8) の条件から不連続を判別し, \tanh 関数による再構築を行っている. しかし, 単にこの条件を圧縮性の他の不連続にも適用しようとする場合, 他の連続領域を不連続と誤認識してしまい連続のプロファイルを階段状にしてしまうという問題が発生する. また, 接触不連続面のみに対してはリーマン問題の厳密解を用いて判別する手法⁽¹³⁾を提案したが, blast wave のような複雑なプロファイルを持つ問題や多次元への拡張において問題があった. そこで, 今回はより汎用的な手法を提案する.

THINC 法が不連続に対して有効に働く理由はセル内部に不連続がある事を仮定できる点にある. 図 1 は階段状のプロファイル (赤点) に対して THINC 法と MUSCL 法で再構築を行った結果である. このように THINC 法に

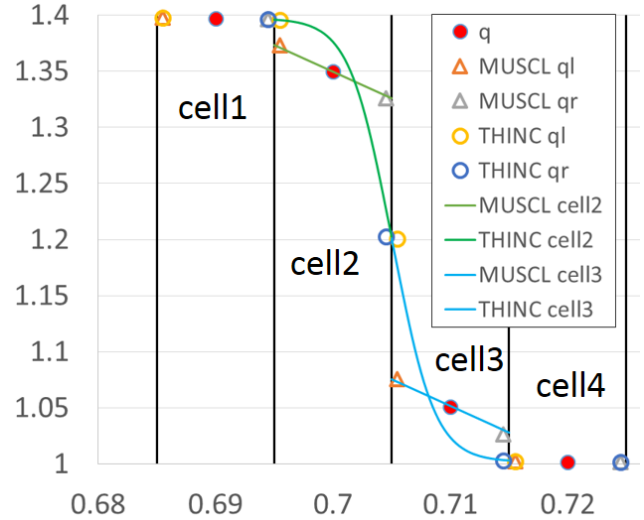


Fig. 1: Slow moving contact discontinuity problem

よって不連続なプロファイルをセル境界ではほぼ連続なプロファイルとして捕らえている. ここで, 近似リーマンソルバーのセル境界での数値流束について考える. 近似リーマン解法の数値流束は式 (1) のような形式に書き変えることができる. ここで右辺第 3 項は人口粘性に当たる部分である. 式 (1) においてこの項が小さい, すなわち再構築した物理量の右側の値と左側の値が小さければ人口粘性は限りなく小さくなくなると考えられる. そこで本研究ではセル内の物理量を再構築する際にこの差が小さくなるように各セルで補間関数を決定することにした. 以下に補間関数の決定のプロセスをまとめる.

- (1) 初期の物理量のプロファイルに対して MUSCL, THINC 法でそれぞれ補間関数を構築
- (2) i 番目のセルに着目し, セル境界での各再構築値の差 $|q_i^L - q_{i-1}^R|, |q_{i+1}^L - q_i^R|$ の和 Dq_i を求める. 差をとる補間関数の組み合わせは表 1 の 8 種類が考えられる.
- (3) 表 1 の組み合わせの中で最小となる Dq_i を i 番目のセルの補間関数として採用する.

今回はこの手法を密度に対して適用し, 接触不連続面のような不連続の数値拡散の抑制を図る.

Tab. 1: Combination of Reconstruction function.

case	cell number		
	i-1	i	i+1
1	MUSCL	MUSCL	MUSCL
2	MUSCL	MUSCL	THINC
3	THINC	MUSCL	MUSCL
4	THINC	MUSCL	THINC
5	THINC	THINC	THINC
6	THINC	THINC	MUSCL
7	MUSCL	THINC	THINC
8	MUSCL	THINC	MUSCL

3.3 THINC 法による再構築を用いた非粘性 Euler 方程式の計算手順

上述した手法を用いた密度の不連続に対する物理量再構築を用いた 1 次元非粘性 Euler 方程式の計算手順を以下にまとめる。

- (1) 保存変数 $[\rho, \rho u, E]$ をプリミティブ変数 $[\rho, u, p]$ に変換
- (2) 密度に対して MUSCL, THINC による再構築, 他の変数は MUSCL の再構築を適用
- (3) 各セルで密度の Dq_i を求め, 再構築関数を決定し, セル境界の値を求める
- (4) セル境界の値をプリミティブ変数から保存変数へ変換
- (5) セル境界の保存変数からリーマン流束を評価
- (6) 時間積分によって各セルの物理量を更新

このように, 従来の有限体積型スキームに THINC 法による再構築を挿入した簡潔なスキームを構築することができる. 次から本手法を用いた数値計算例を示す.

4. 数値計算例

上述の計算手法による数値計算例を示す. 本研究ではリーマン流束の評価に接触不連続面で大きな数値粘性を持つ HLL 近似リーマンソルバーを適用し, 本手法が不連続での数値拡散を改善することを確認した. 時間積分法には 2 段 2 次 SSPRK 法⁽⁹⁾を用いる. クーラン数は全ての計算例で 0.5 とした. また, 対象とする流体は理想気体とする.

4.1 1 次元衝撃波管問題⁽¹⁰⁾

Sod の 1 次元衝撃波管問題の $t=0.15$ の計算結果を図 2 に示す. 初期条件はそれぞれ Table 2 に示す通りである. ここで計算領域は $0 \leq x < 1$ で $x = 0.5$ を挟んで右と左に初期条件の値を置く. 格子数は 200 分割である.

Tab. 2: Initial condition for 1D shock tube problem.

Left side value			Right side value		
ρ^L	u^L	p^L	ρ^R	u^R	p^R
1.0	0.0	1.0	0.125	0.0	0.1

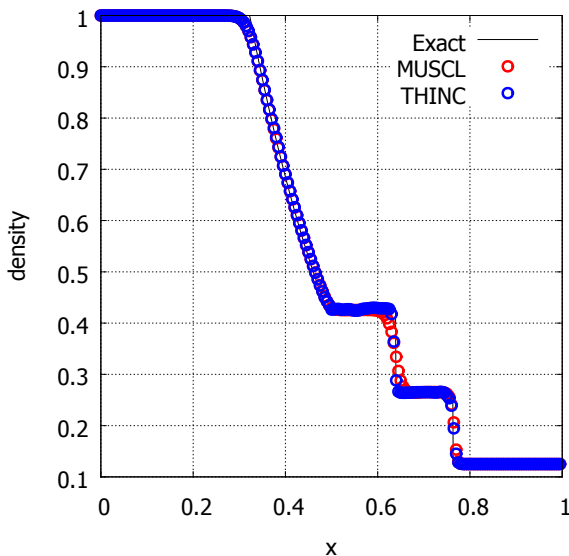


Fig. 2: Sod's problem($t=0.15$)

図の通り, 従来の再構築と比べて HLL の大きな数値拡散

を改善し, 接触不連続面を 3 セル程度で捉えている. 膨張波と接触不連続面との領域に若干のオーバーシュートが見られるが, この点に関しては今後の課題として検討していく.

4.2 1 次元 Blast wave 問題

次に膨張波, 接触不連続面波, 衝撃波が複雑に干渉する Blast wave の計算結果を図 3 に示す. 格子数は 800 分割とし, 参考として MUSCL の再構築を用いて 20000 点を用いて計算した結果を黒い実線で示す. 4.1 と同様に従来の再構築と比べ $x = 0.6$ や $x = 0.8$ での接触不連続の数値拡散の影響と思われる数値拡散に対して本手法は有効に機能していることが分かる. しかしながらこの問題でもプロファイルの一部にオーバーシュートが見られることから本手法は物理量が連続から不連続に遷移する領域において補関数の選択に問題が生じている可能性がある. 今後の課題としてはこのような問題に対してスムーズに連続領域から不連続領域に移行できるような関数の選択方法を考案していく必要がある.

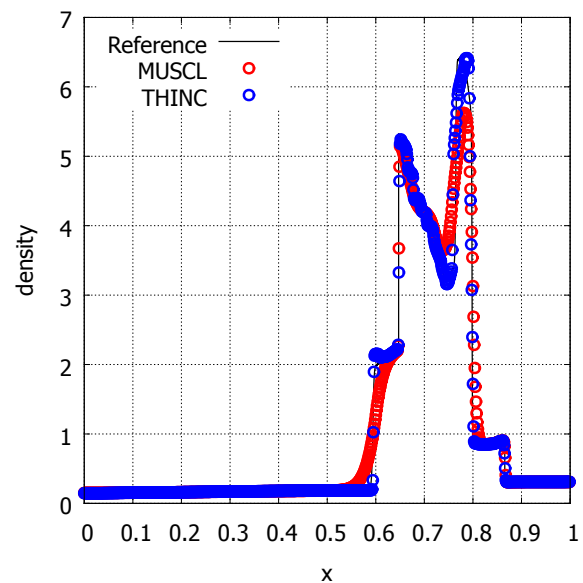


Fig. 3: blast wave problem($t=0.032$)

4.3 2 次元円形爆縮問題

次に 2 次元の問題の例として, 4.1 の問題を 2 次元に拡張した円形爆縮問題を解く. 計算領域は $[0.0, 1.0] \times [0.0, 1.0]$ で半径 0.4 の内側に 4.1 の初期条件の左側の値を, 外側に右側の値を置く. 格子数は 200 分割とし, 図 4 には半径方向の密度の分布図を示す. 図の通り, THINC を適用することで接触不連続での数値拡散が大きく改善されている. しかしながら 2 次元の問題においても膨張波と接触不連続の間に不自然なオーバー, アンダーシュートが見られる. これも 1 次元の問題と同様の問題であると考えられる.

4.4 2D Piecewise constant data in quadrants

最後に 2 次元のリーマン問題として, 四つに分割されたそれぞれの領域に異なる密度, 圧力, 速度を初期条件として持つ問題を示す. この問題は四つの領域の接合面でそれぞれ衝撃波を生じ, それらの相互作用によって計算領域中心部に複雑な構造を構築する. 中心付近では数値拡散が大きく働くため, 人工粘性の強いスキームではこの構造やすべり面を高解像度に捉えることは困難である. この問題では計算領域は 1.0×1.0 , 格子数は 200 分割とする, 図 5, 6 は MUSCL を用いた場合と THINC を用いた場合の計算結果である. MUSCL では数値拡散によって中心および, 右上の構造が不明瞭になってしまっているが, THINC では数値拡散を抑制し, 中心部の構造を高解像度に捉えている. また, この問題では, 解が高

解像度になるとすべり面上に数値粘性の影響で不安定構造が出現することが知られているが、本手法の場合、さらに格子解像度あげた場合でもそのような構造は見られなかった。このことから、本手法は式 (1) に起因する数値粘性を効果的に抑制できていると考えられる。

5. 結言

従来の有限体積法の枠組みの中で THINC 法による物理量再構築を用いた圧縮性流体の不連続面に対する高解像度スキームを構築しいくつかのベンチマークテストで不連続面に対して THINC 法が有効に働くことを示した。しかしながら、本手法は膨張波と接触不連続の間のような連続から不連続へ遷移する領域においてオーバーシュート発生するという問題がある。この原因としては補関関数の選択が適切でないためと考えられる。今後はこれらの問題に対してより効果的な再構築関数の選択方法を考案していく必要がある。

参考文献

- (1) 藤井, “流体力学の数値計算法”, 東京大学出版会 (1994)
- (2) F.Xiao, Y.Homma and T.Kono, “A simple algebraic interface capturing scheme using hyperbolic function”, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 48(2005), pp. 1023-1040.
- (3) K.-M.Shyue, F.Xiao, “A simple algebraic interface capturing scheme using hyperbolic tangent function”, *J. Comp. Phys.*, 268(2014), pp. 326-354.
- (4) 稲場, K.-M.Shyue, 肖鋒 “圧縮性自由界面流れの数値計算モデルの開発”, 第 28 回数値流体力学シンポジウム講演予稿集 (2014), E04-2, pp. 1-4.
- (5) 住, 黒滝 “拡散界面モデルによる圧縮性混相流解法の高次精度化および高解像度化について”, 第 28 回数値流体力学シンポジウム講演予稿集 DVD(2014), C05-2, pp. 1-4.
- (6) B.V.Leer, “Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov’s Method”, *J. Comp. Phys.*, 32(1979), pp. 101-136.
- (7) G.S.Jiang, C.W.Shu, “Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes”, *J. Comp. Phys.*, 126(1996), pp. 202-228.
- (8) G.A.Sod, “A Survey of Several Finite Difference Methods for systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws”, *J. Comp. Phys.*, 27(1978), pp. 1-31.
- (9) S.Gottlieb, C.W.Shu, E.Tadmor, “Strong stability preserving high-order time discretization methods”, *SIAM REVIEW*, 43(2001), pp.89-112.
- (10) E.F.Toro, “Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg(1997)
- (11) R.Saurel, R.Abgrall, “A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows”, *J. Comput. Phys.*, 150(1999), pp. 425-467.
- (12) G.Allaire, S.Kokh, “A five-equation model for the simulation of interface between compressible fluids”, *J. Comput. Phys.*, 181(2002), pp.577-616.
- (13) 稲場, 肖鋒, “THINC 法による接触不連続面の高解像度スキーム”, 日本流体力学会年会 2015 予稿集 (2015)

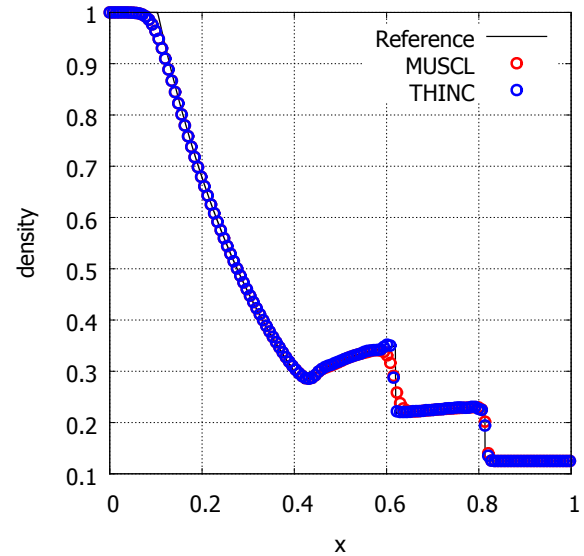


Fig. 4: 2D circular explosion problem($t=0.25$)

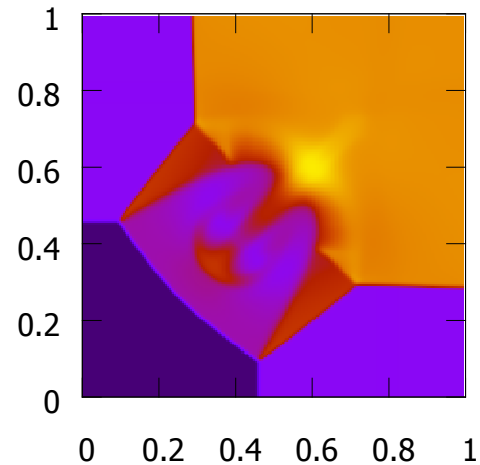


Fig. 5: 2D piecewise constant data in quadrants problem(MUSCL, $t=0.8$)

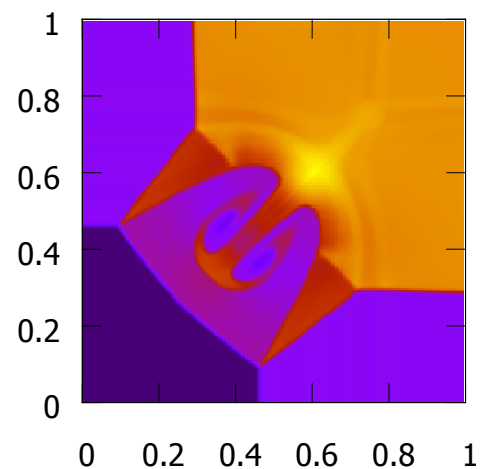


Fig. 6: 2D piecewise constant data in quadrants problem(THINC, $t=0.8$)