第 29 回数値流体力学シンポジウム
C05-3

マルチグリッド法を実装した高次精度非構造格子法の構築

A Development of High-Order Unstructured Mesh Method with Multigrid Algorithm

○ 澤木 悠太，東北大院，仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01，E-mail：sawaki@cfd.mech.tohoku.ac.jp
澤田 恵介，東北大工，仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01，E-mail：sawada@cfd.mech.tohoku.ac.jp
Yuta Sawaki, Tohoku University, 6-6-01, Aramaki-Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai, Japan
Keisuke Sawada, Tohoku University, 6-6-01, Aramaki-Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai, Japan

The conventional spectral volume (SV) method for three-dimensional tetrahedral unstructured meshes is extended to use hybrid unstructured meshes comprised of tetrahedral, prismatic and hexahedral cells. A hierarchical subdivision of hexahedral cells enables to incorporate h-multigrid approach into present SV method. The convergence rate is drastically improved using h-multigrid or hp-multigrid algorithm. It is also shown that convergence rate is not dependent on the number of cells in computational domain.

1. 緒言

セル内に内部自由度を設ける高次精度非構造格子法の一種であるスペクトラルボリューム (SV) 法[1]は同種の不連続ガレルキン法 (DG) 法に比べて，面積分や体積分に必要なガウス求積の次数が低く，より低コストで高次精度を達成することができる．一方，SV 法で取り扱うことのできるセル形状は四面体に限定されていたため，特に物体近傍の境界層を解像する場合には膨大な潰れた四面体セルが必要となり計算コスト増大の原因となっていた．そこで，計算高速化を目的として著者らは SV 法のハイブリッド格子化に取り組んできた．まず，プリズムセルを導入することにより境界層を含む粘性流れ場計算を高速化させた．次に六面体セルを導入した．SV 法は計算セルを幾つかのサブセルに分割することで内部自由度を増やす手法であるが，本研究で用いる 2 次精度の分割方法では，四面体，プリズム，六面体すべてのセル形状におけるサブセルが六面体であることに着目した．サブセルを計算セルと見立てることにより格子細分化が可能であると考えたからである．この考えに基づき，解適合格子細分化についても研究を行ってきた[2][3]．

本稿では，階層的な SV 法のサブセル分割に着目して SV 法に幾何的マルチグリッド法を実装し，その性能を検証する．幾何的マルチグリッド (h-MG) と代数的マルチグリッド (p-MG) および併用した場合 (hp-MG) の性能を調査した．マルチグリッド法は現在知られている中でも最も高速な数値反復解法の一つであり，収束を得るまでの反復数が格子点数に依存しないため，大規模計算に対しては極めて有効と成り得る．

2. 数値計算法

2.1 支配方程式

支配方程式は 3 次元線形拡散方程式である．

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0. \qquad (1)$$

本稿では拡散定数 D を 1 とする．

2.2 Spectral Volume (SV) 法

SV 法は有限体積法の一種であり，各セル (Spectral Volume：SV) をサブセル (Control Volume：CV) に分割し，各サブセルで支配方程式を解く．セルの分割方法は多く提案されているが，本研究では空間 2 次精度の場合，図 1 のような分割方法を採用した．四面体セルの分割方法は過去の研究でより安定であると言われている方法である[4]．プリズムセルと六面体セルは 1 次元 SV 法と 2 次元 SV 法[5]の組み合わせを考慮して分割している．六面体セルの 4 次精度分割は図 2 のように行う．

SV 法における自由度は各 CV セル平均値であり，自由度の数は 2 次精度の場合，四面体セルで 4，プリズムセルで 6，六面体セルで 8 となり，4 次精度六面体セルでは 64 となる．SV 内の変数分布は，各 CV セル平均値 $\bar{u}_j$ と形状関数 L_j の積の総和として表される．

$$u(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{N} L_j(x,y,z)\bar{u}_j(t). \qquad (2)$$

L はセルの分割が決まれば，次式に従って一意に求められる．

$$\frac{1}{V_j}\int_{\mathrm{CV}_j} L_k dV = \delta_{j,k}, \qquad (3)$$
$$(j,k = 1,...,N).$$

$\delta_{j,k}$ はクロネッカーのデルタである．SV 内の分布を式 (2) に従い，p 次多項式で記述することにより，空間 $p+1$ 次精度を達成する．本稿では拡散方程式を解くために，勾配評価方法として，BR2 法[6]を用いる．

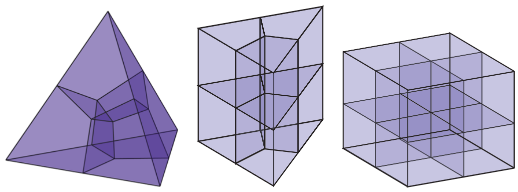


Fig. 1: 2 次精度 SV 法の分割

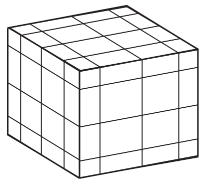


Fig. 2: 六面体セルにおける 4 次精度 SV 法の分割

2.3 マルチグリッド法

時間積分法およびマルチグリッドサイクルにおけるスムージング手法として LU-SGS 陰解法を用いる．

以下に 3 レベル (細かい方から $h3$, $h2$, $h1$) の h-MG の手順例を示す．

[1] $h3$:内部反復により u^*_{h3} を得る

$$\left(\frac{V_{h3}}{\Delta t} - \frac{\partial R_{h3}}{\partial u_{h3}}\right)\Delta u_{h3} = R_{h3}\left(u_{h3}\right) \tag{4}$$

[2] $h3$ から $h2$ へ制限補間

$$u^0_{h2} = I^{h2}_{h3} u^*_{h3} \tag{5}$$

$$R^0_{h2} = \tilde{I}^{h2}_{h3} R_{h3}(u^*_{h3}) \tag{6}$$

$$r_{h2} = R_{h2}(u^0_{h2}) - R^0_{h2} \tag{7}$$

[3] $h2$:内部反復により u^*_{h2} を得る

$$\left(\frac{V_{h2}}{\Delta t} - \frac{\partial R_{h2}}{\partial u_{h2}}\right)\Delta u_{h2} = R_{h2}\left(u_{h2}\right) - r_{h2} \tag{8}$$

[4] $h2$ から $h1$ へ制限補間

$$u^0_{h1} = I^{h1}_{h2} u^*_{h2} \tag{9}$$

$$R^0_{h1} = \tilde{I}^{h1}_{h2}\left(R_{h2}(u^*_{h2}) - r_{h2}\right) \tag{10}$$

$$r_{h1} = R_{h1}(u^0_{h1}) - R^0_{h1} \tag{11}$$

[5] $h1$:内部反復により $\tilde{u}_{h1}$ を得る

$$\left(\frac{V_{h1}}{\Delta t} - \frac{\partial R_{h1}}{\partial u_{h1}}\right)\Delta u_{h1} = R_{h1}\left(u_{h1}\right) - r_{h1} \tag{12}$$

[6] $h1$ から $h2$ へ延長補間

$$u_{h2} = u^*_{h2} + J^{h2}_{h1}\left(\tilde{u}_{h1} - u^0_{h1}\right) \tag{13}$$

[7] 式 (8) でスムージングを行い，$\tilde{u}_{h2}$ を得る

[8] $h2$ から $h3$ へ延長補間

$$u_{h3} = u^*_{h3} + J^{h3}_{h2}\left(\tilde{u}_{h2} - u^0_{h2}\right) \tag{14}$$

[9] 式 (4) でスムージングを行い，u^{n+1}_{h3} を得る

ここで，I は変数の制限補間演算子，$\tilde{I}$ は残差の制限補間演算子，J は変数の延長補間演算子を表す．これらは SV 法の形状関数や分割方法により求められる．SV 法におけるサブセルを利用することで，粗い格子への補間または，低次精度への補間を比較的容易に行うことができる．マルチグリッドサイクルとしては V サイクルを採用した．

3. 計算条件

計算格子は 1 辺の長さ 1 の立方体領域を $N \times N \times N$ に分割して作成した．N は問題によって異なる．初期値は全領域で 0 とし，境界 6 面には境界条件として次式を与えた．

$$\begin{aligned} u = &\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &+ e^{-x}\left(x\mathrm{sin}y - y\mathrm{cos}y\right) \\ &+ e^{-y}\left(y\mathrm{sin}z - z\mathrm{cos}z\right) \\ &+ e^{-z}\left(z\mathrm{sin}x - x\mathrm{cos}x\right) \end{aligned} \tag{15}$$

上式は定常時の解析解となる．全ての計算は Xeon E5-2687W(3.10GHz) のシングルコアで計算した．

4. 計算結果

マルチグリッドの有無で計算により得られる定常解が変化しないことを確認した上で収束率についての結果を以降示す．

4.1 h-MG

h-MG のみの計算では空間精度は 2 次精度で固定し，N=10，20，40 の格子を用い，それぞれ N=5 の格子レベルまでマルチグリッド法を適用した．格子サイズは 1 レベル粗くなると 1 次元方向で 2 倍異なるため，総セル数は 1/8 となる．N=5，10，20，40 のケースでのマルチグリッドのレベルをそれぞれ $h1$, $h2$, $h3$, $h4$ と表すこととする．計算のケースを以下に示す．( ) 内には内部反復回数を示す．比較対象としてマルチグリッドを用いない計算も行った．比較対象を含む全ケースで最も細かいレベルでの内部反復回数の合計が 1 タイムステップあたりで 4 回となるように統一してある．

[1] $N = 10$ のケース

- no MG:$h2(4)$
- 2 Grid:$h2(2) - h1(4) - h2(2)$

[2] $N = 20$ のケース

- no MG:$h3(4)$
- 3 Grid:$h3(2) - h2(4) - h1(4) - h2(1) - h3(2)$

[3] $N = 40$ のケース

- no MG:$h4(4)$
- 4 Grid:$h4(2) - h3(4) - h2(4) - h1(4) - h2(1) - h3(1) - h4(2)$

計算の収束履歴を図 3，4 に示す．タイムステップと残差のグラフから，マルチグリッドを用いた場合は格子数によらず，20 回程度で収束していることがわかる．従って，収束加速の度合いは格子数が多いほど大きく，N=40 のケースで 50 倍の加速が見られた．CPU time と残差のグラフでは，マルチグリッドを用いない場合に N=10，20，40 と格子数が 8 倍ずつ増えると CPU time は約 30 倍ずつ増えていることが示されている．これは，格子数増加に伴う 8 倍の演算量増加に加えて収束にかかるタイムステップ数も約 4 倍ずつ増えているからである．一方，マルチグリッドを用いた場合は，CPU time の増え方は格子数と同じく約 8 倍となっている．N=40 のケースでは計算時間が 1/40 となった．

4.2 hp-MG

次に h-MG と p-MG を組み合わせた例を示す．空間精度は 4 次精度で N=16 の格子を用いて計算を行う．h-MG のレベルは $N = 16(h3)$, $N = 8(h2)$, $N = 4(h1)$ の 3 レベルを考える．p-MG のレベルは 空間 4 次精度 ($p3$)，空間 2 次精度 ($p1$) の 2 レベルを考える．計算は以下の 5 ケースで行った．内部反復回数を ( ) 内に示す．

[1] no MG:$h3p3(4)$

[2] 2 Grid(p):$h3p3(2) - h3p1(4) - h3p3(2)$

[3] 3 Grid(hp):$h3p3(2) - h3p1(4) - h2p1(4) - h3p1(1) - h3p3(2)$

[4] 4 Grid(hp):$h3p3(2) - h3p1(4) - h2p1(4) - h1p1(4) - h2p1(1) - h3p1(1) - h3p3(2)$

計算の収束履歴を図 5 に示す．収束履歴から，2 レベルの p-MG に h-MG のレベルを重ねていくと更に収束率が向上したことを確認できる．4 Grid(hp) のケースで計算時間は 1/30 となった．

5. 結言

高次精度非構造格子法の一つである SV 法にマルチグリッド法を実装し，3 次元線形拡散方程式を解いた．幾何的マルチグリッドと代数的マルチグリッドを用いた結果，数十倍の収束加速を得た．マルチグリッドを用いると，格子点数増加による収束率の悪化を解消できるため，格子点数が増加する程，加速のファクターは大きくなると考えられる．今後は，境界が曲線である計算領域に対する検証や Euler 方程式，NS 方程式への拡張に取り組む予定である．また，合わせて各マルチグリッドレベルにおける反復回数による収束率への依存性についても調査する．

参考文献

(1) Wang, Z. J., “Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids: Basic formulation,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 178, No. 1, pp. 210–51, 2002.

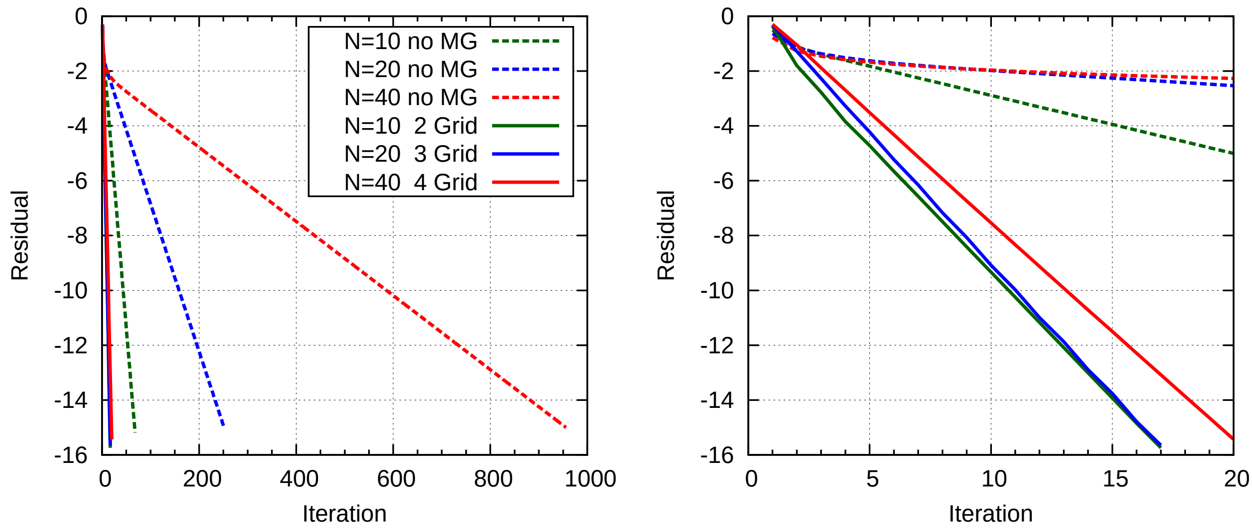
(2) 澤木悠太，芳賀臣紀，荻野要介，澤田恵介，“Hybrid 格子を用いた Spectral Volume 法の検討，” 第 27 回計算力学講演会講演集，2802，2014.

(3) 澤木悠太，芳賀臣紀，荻野要介，澤田恵介，“ハイブリッド格子を用いた Spectral Volume 法の新展開，” 第 46 回流体力学講演会/航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム 2015 講演集，1E09，2015.

(4) Liu, Y., Vinokur, M. and Wang, Z.J., “Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids V:Extension to three-dimensional systems,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 212, No. 2, pp. 454–472, 2006.

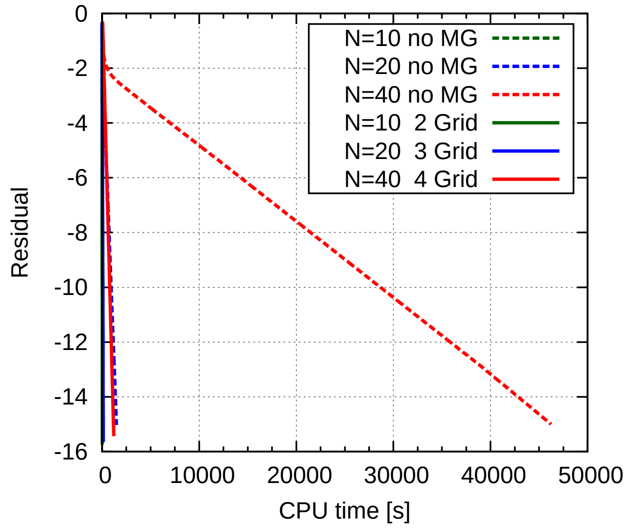
(5) Wang, Z.J., Zhang, L., and Liu, Y., “Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids IV:Extension to two-dimensional systems,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, No. 2, pp. 454–472, 2006.

(6) Bassi, F. and Rebay, S., “Numerical evaluation of two discontinuous Galerkin methods for the compressible Navier-Stokes equations,” *Int.J.Numer.Meth.Fluids*, pp. 197–207, 2002.

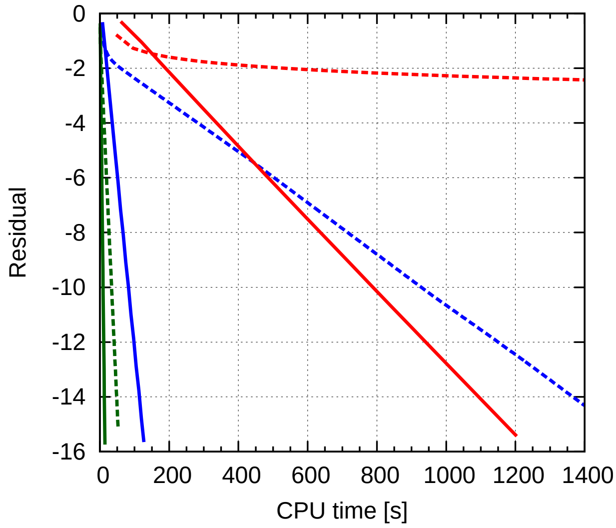


(a) 全体図　(b) 拡大図

Fig. 3: h-MG を用いた計算のタイムステップと残差の関係

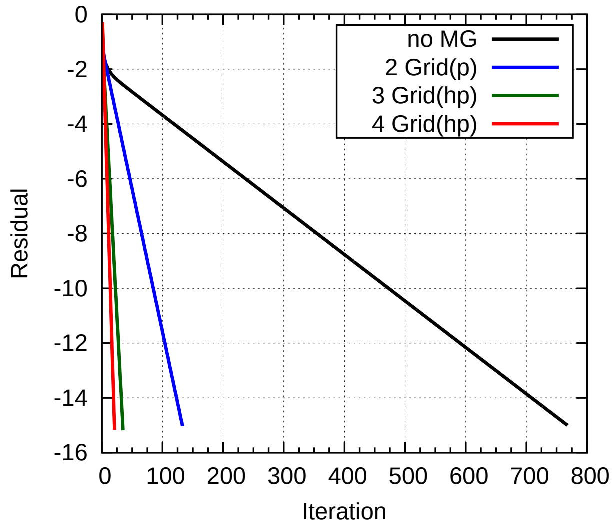


(a) 全体図

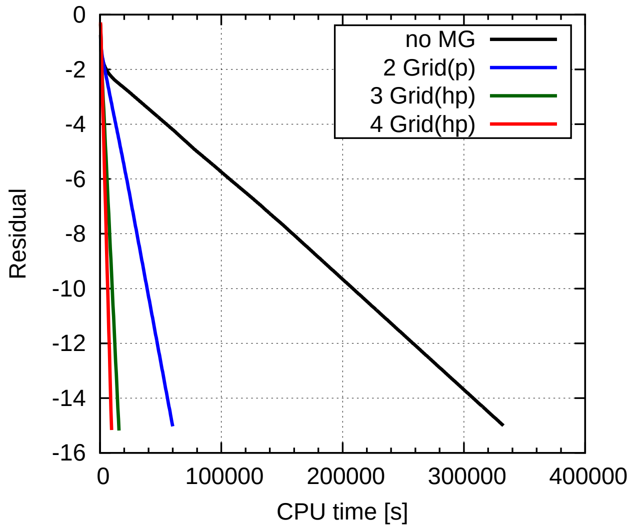


(b) 拡大図

Fig. 4: h-MG を用いた計算の CPU time と残差の関係



(a) タイムステップと残差の関係



(b) CPU time と残差の関係

Fig. 5: hp-MG を用いた計算の収束履歴