

Octree 細分化格子を導入した格子ボルツマン法による 乱流の GPU 計算

Turbulent Flows solved by Lattice Boltzmann Method with Octree-based Mesh Refinement using GPU

- 長谷川 雄太, 東工大, 東京都目黒区大岡山 2 丁目 12-1, E-mail : hasegawa@sim.gsic.titech.ac.jp
 青木 尊之, 東工大, 東京都目黒区大岡山 2 丁目 12-1, E-mail : taoki@sim.gsic.titech.ac.jp
 小林 宏充, 慶大, 神奈川県横浜市港北区日吉 4-1-1, E-mail : hkobayashi@phys-h.keio.ac.jp
 Yuta Hasegawa, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo
 Takayuki Aoki, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo
 Hiromichi Kobayashi, Keio University, 4-1-1 Hiyoshi, Koho-ku, Yokohama-shi, Kanagawa

This paper shows an efficient GPU implementation of Lattice Boltzmann Method (LBM) with Octree-based Mesh Refinements. For the stability and accuracy in solving turbulent problems, Multiple Relaxation Time (MRT) collision term and Coherent-structure Smagorinsky Model LES are adopted to the present method. Validations of turbulent channel flow and a flow around a cylinder are performed, and the present method showed reasonable results in the validations. A flow around a bicyclist is computed for an example of application. It is shown that the present method can calculate the application problem accurately, while reduces 95.92% number of grids from uniform mesh.

1. はじめに

格子ボルツマン法は、非圧縮性流体の解法として広く用いられている計算手法である。格子ボルツマン法は厳密には弱圧縮性解法であるため、完全な陽解法で解くことができる。Navier-Stokes 方程式に基づく従来の非圧縮性流体の解法のようにポアソン方程式を解く必要が無く、メモリアクセスが局所的であるため、GPU (Graphics Processing Unit) を用いた大規模計算に適している。

格子ボルツマン法を用いた大規模計算では等間隔格子が用いられてきた⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾。しかし、格子点数は計算機の演算性能やメモリ量によって制限されるため、等間隔格子による計算は大規模化の限界を迎えつつある。さらに大規模・高解像度な計算が求められる問題に対しては、局所的に高解像度格子を集中させ、格子点数の増大を必要最小限に抑えながら格子解像度を上げる必要がある。

本稿では、局所的に高解像度な格子を集めることのできる Octree 細分化格子を格子ボルツマン法に導入し、GPU 計算に実装する。乱流のような高レイノルズ数の条件でも安定的かつ精度良く計算を行うため、MRT (Multiple Relaxation Time) モデルを導入し、さらに乱流モデルとして LES (Large Eddy Simulation) を用いる。

2. 計算手法

2.1 格子ボルツマン法

2.1.1 基礎モデル 格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method; LBM) は、気体をいくつかの離散速度を持った仮想粒子の集合体と仮定し、仮想粒子の並進と衝突の時間発展を計算する手法である。仮想粒子の速度は、1 タイムステップで粒子がちょうど隣の格子点に移動するような速度が選ばれ、離散化される。本稿では、仮想粒子の速度の離散化として、3 次元 27 速度 (D3Q27) モデルを用いる。D3Q27 モデルにおける仮想粒子の速度は、次のように定義される。

$$\mathbf{c}_\alpha = \begin{cases} (0, 0, 0), & \alpha = 0 \\ (\pm c, 0, 0), (0, \pm c, 0), (0, 0, \pm c), & \alpha = 1-6 \\ (\pm c, \pm c, 0), (\pm c, 0, \pm c), (0, \pm c, \pm c), & \alpha = 7-18 \\ (\pm c, \pm c, \pm c), & \alpha = 19-26 \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 c は定数で、格子幅と時間刻みの比 ($c = \Delta x / \Delta t$) で定義される。

格子ボルツマン法では、流体の粘性は仮想粒子同士の衝突によって生じると仮定される。衝突項には一般に BGK

(Bhatnagar-Gross-Krook) 衝突緩和モデルに基づく SRT (Single Relaxation Time) モデル⁽⁴⁾ または MRT (Multiple Relaxation Time) モデル⁽⁵⁾⁽⁶⁾ が用いられる。SRT はアルゴリズムが単純で実装が簡単であるが、高レイノルズ数の計算において数値的な不安定性が増大することが知られている。一方、MRT は計算量が比較的大きいものの数値安定性が高く乱流計算にも適用可能であるため、本稿では MRT を採用している。衝突項に MRT を用いた場合、格子ボルツマン法の支配方程式は次のように表される。

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) \\ = -M_{\alpha\gamma}^{-1} \hat{S}_{\gamma\beta} \left(m_\beta(\mathbf{x}, t) - m_\beta^{eq}(\mathbf{x}, t) \right) + F_\alpha \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、添え字の β, γ はアインシュタインの総和規約に従い、 $\beta, \gamma = 0-26$ である。

f_α は速度 \mathbf{c}_α を持つ仮想粒子の速度分布関数、 m_β は速度分布関数のモーメントである。速度分布関数とそのモーメントは、以下のような関係にある。

$$m_\beta = M_{\beta\alpha} f_\alpha \quad (3)$$

ただし、 $M_{\beta\alpha}$ はモーメント変換行列である。モーメント m_β は流体の巨視的量に対応しており、例えば、密度 ρ に対応する 0 次モーメント、運動量 $\rho \mathbf{u}$ に対応する 1 次モーメント、運動エネルギーやひずみ速度テンソル $\partial u_j / \partial x_i$ などに対応する 2 次モーメントがある。MRT で用いるモーメントには、線形独立な組み合わせとなる 27 個のモーメントを任意に選択する。 $\hat{S}_{\gamma\beta} = \text{diag}(s_\beta)$ は緩和係数行列で、各モーメントの緩和係数 s_β を要素とする対角行列となっている。緩和係数は、ひずみ速度テンソルに相当するモーメントに対して $s_\beta = 1/\tau$ である。ただし、 τ は BGK 衝突モデルにおける緩和時間係数で、流体の動粘度 ν を用いて以下のように与えられる。

$$\tau = \frac{1}{2} + \frac{3\nu}{c^2 \Delta t} \quad (4)$$

その他のモーメントに対する緩和係数は流体の物理的性質と無関係であり、任意に取ることが出来るため、数値

的に安定となる定数が与えられる。本稿では、Suga ら⁽⁶⁾のモーメント変換行列および緩和係数行列を用いている。 m_{β}^{eq} は平衡モーメントであり、速度分布関数の平衡分布 f_{α}^{eq} を用いて以下のように定義される。

$$m_{\beta}^{eq} = M_{\beta\alpha} f_{\alpha}^{eq} \quad (5)$$

$$f_{\alpha}^{eq} = w_{\alpha} \rho \left(1 + \frac{3\mathbf{c}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_{\alpha} \cdot \mathbf{u})^2}{2c^2} - \frac{3\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2c^2} \right) \quad (6)$$

ここで、 w_{α} は各速度方向の重みづけ係数で、以下のような値を持つ。

$$w_{\alpha} = \begin{cases} 8/27, & \alpha = 0 \\ 2/27, & \alpha = 1-6 \\ 1/54, & \alpha = 7-18 \\ 1/216, & \alpha = 19-26 \end{cases} \quad (7)$$

また、 ρ, \mathbf{u} は流体の密度、流速であり、以下の式によって求められる。

$$\rho = \sum_{\alpha=0}^{26} f_{\alpha} \quad (8)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=0}^{26} \mathbf{c}_{\alpha} f_{\alpha} \quad (9)$$

F_{α} は外力項であり、体積力によって生じる加速度 \mathbf{a} を用いて次のように求められる。

$$F_{\alpha} = w_{\alpha} \rho \frac{3\mathbf{c}_{\alpha} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \Delta t \quad (10)$$

2.1.2 LES の導入 乱流モデルとして LES (Large Eddy Simulation) を導入する。LES では、格子解像度以上 (Grid Scale; GS) の変動を直接計算する一方で、格子解像度以下 (Sub-grid Scale; SGS) の成分の変動の効果が分子粘性と同様に作用すると仮定し、渦粘性を導入する。これにより、動粘度 ν は以下のように定義される。

$$\nu = \nu_0 + \nu_{sgs} \quad (11)$$

ν_0 は分子粘性であり、流体の物性値としての動粘度に対応している。 ν_{sgs} は渦粘性であり、以下のような SGS モデルによって導出される。

$$\nu_{sgs} = C \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \quad (12)$$

ここで、 C はモデル係数、 $\bar{\Delta}$ はフィルタ幅、 $|\bar{S}|$ はひずみ速度テンソル $\bar{S}_{ij} = \partial \bar{u}_j / \partial x_i$ の大きさである。モデル係数の決定には、演算局所性が高く GPU 計算に適しているコヒーレント構造スマゴリンスキーモデル (CSM)⁽⁷⁾ を用いる。

$$\begin{aligned} C &= C_{CSM} |F_{CS}|^{3/2}, \\ F_{CS} &= \frac{Q}{E} \\ Q &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ E &= \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、添え字の i, j は座標軸 x, y, z のいずれかを取り、アインシュタインの総和規約に従う。 C_{CSM} は定数であり、本稿では $C_{CSM} = 0.1$ を用いている。

Refinement level

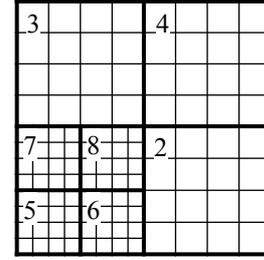
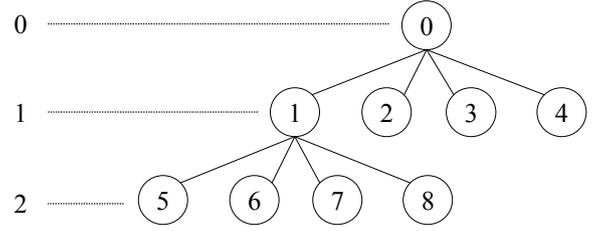


Fig. 1: Octree-based Mesh Refinement.

2.2 Octree 細分化格子

2.2.1 データ構造 Octree 細分化格子は、木データ構造に基づく再帰的な領域分割によって生成される。細分化格子の木データ構造とそれに対応する細分化格子の例を Fig. 1 に示す。2次元格子では1回の領域分割で元の領域が4つに分割され、三次元では8つに分割される。Octreeの末端であるリーフには一定数の点の格子が割り当てられるが、本稿ではそれぞれに対して 17^3 の格子をノードセンターで割り当てている。Octreeのリーフの再帰深度を細分化レベルと呼ぶ。細分化レベルが高いほどリーフの格子解像度は高く、例えば Fig. 1 では、リーフ 5,6,7,8 はリーフ 2,3,4 の2倍の格子解像度を有する。

単一の Octree のみを用いた場合、計算領域は常に立方体状になり、直方体状の計算領域を設定することができない。そこで、 x, y, z の軸ごとに異なる長さの計算領域を取るために複数の Octree を連結したデータ構造を導入している。複数の Octree を連結した場合の格子配置の例を Fig. 2 に示す。Fig. 2 では、6個の Octree を連結し、縦横比 3:2 の計算領域を設定している。このように、 x 方向に nx 個、 y 方向に ny 個、および z 方向に nz 個の Octree を並べることで、任意の整数比の長さ $nx \times ny \times nz$ を持った直方体状の計算領域を取ることができる。

2.2.2 細分化レベルごとの時間刻み幅 格子ボルツマン法では、細分化レベルごとの格子幅に合わせて速度分布関数の1ステップ分の移動量を変更する必要がある。速度分布関数の速度 $c = \Delta x / \Delta t$ は一定であるため、格子幅 Δx に応じて時間刻み幅 Δt を変化させる。最も細かい格子の細分化レベルを l_m 、時間刻み幅を $\Delta t^{(l_m)}$ とすると、細分化レベル l の格子における時間刻み幅は、以下のように定められる。

$$\Delta t^{(l)} = 2^{l_m - l} \Delta t^{(l_m)} \quad (14)$$

すなわち、細分化レベルがひとつ高くなるごとに時間刻み幅は半分になり、同時に時間ステップ数は2倍になる。

例として、3つの細分化レベルの格子が存在する場合の時間発展の順序を Fig. 3 に示す。実線の矢印は時間発展計算を表し、点線の矢印は異なる細分化レベルの格子の間での時間補間の操作を表す。このように、粗い格子が1ステップの時間発展を計算する間に、1段細かい格子では2ステップの計算を行う。粗い格子から細かい格

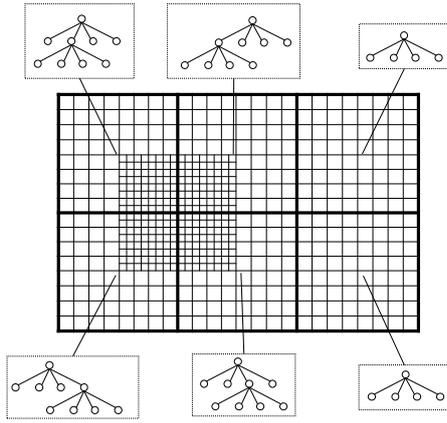


Fig. 2: Refined mesh of rectangular computational area with multiple octrees.

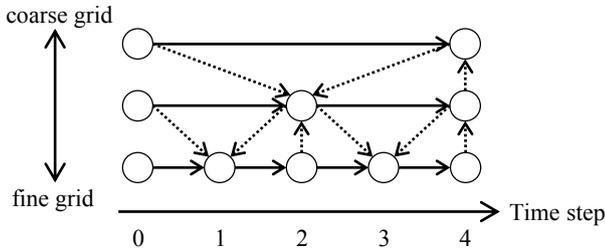


Fig. 3: Temporal sequences in different mesh refinements.

子への時間補間を行うため、同一時刻で複数の細分化レベルの格子の計算を行う場合 (Fig. 3 のタイムステップ 0, 2 など), 粗い格子の時間発展を細かい格子よりも先に計算する。

2.2.3 格子ボルツマン法における補間操作 格子ボルツマン法では、通常の細分化格子における空間補間および時間補間に加えて、偏差応力テンソルの連続性を保つために細分化レベルの変換⁽⁸⁾を行う必要がある。細分化レベルの変換は、次のような式で表される。

$$\hat{f}_i^{(l-1)} = f_i^{(l,eq)} + 2 \frac{\tau^{(l-1)} - 1}{\tau^{(l)} - 1} (f_i^{(l)} - f_i^{(l,eq)}) \quad (15)$$

$$\hat{f}_i^{(l+1)} = \tilde{f}_i^{(l,eq)} + \frac{1}{2} \frac{\tau^{(l+1)} - 1}{\tau^{(l)} - 1} (\tilde{f}_i^{(l)} - \tilde{f}_i^{(l,eq)}) \quad (16)$$

ただし、左辺の $\hat{f}_i^{(l-1)}$ および $\hat{f}_i^{(l+1)}$ はレベル変換により求められた速度分布関数の値であり、チルド記号は速度分布関数に対する空間・時間の補間操作を表す。 $\tau^{(l-1)}$, $\tau^{(l)}$, $\tau^{(l+1)}$ はそれぞれ細分化レベル $l-1, l, l+1$ における緩和時間係数である。

3. 検証計算

3.1 平行平板間乱流

乱流計算の検証のため、平行平板間乱流の計算を行った。大きさが $2\pi H \times H \times \pi H$ の計算領域に対して、

$\partial p / \partial x = 1$ の一様な圧力勾配を加えた。摩擦速度 $u_\tau = 1$ とし、摩擦レイノルズ数 $Re_\tau = u_\tau(H/2)/\nu$ を 180 とした。 $y = 0, H$ の面を静止壁 (Interpolated bounce-back 境界⁽⁹⁾) とし、 x, z 方向には周期境界条件を設定した。初期条件として、壁法則から与えられる近似解に擾乱を加えた速度場を与えた。乱流が十分に発達するまで計算を行ったのち、乱流統計量である主流方向速度 U^+ , 乱流強度 $\sqrt{u^2}, \sqrt{v^2}, \sqrt{w^2}$ を時間および x, z 軸方向の空間に平均した値を求めた。

比較のために $1539 \times 241 \times 751$ ($\Delta y^+ = 1.5$) および $769 \times 121 \times 377$ ($\Delta y^+ = 3$) の等間隔直交格子で計算を行った。計算結果を Fig. 4 に示す。ただし、 y^+ は壁面からの距離を摩擦速度で無次元化した値で、 $y^+ = Re_\tau \nu / (H/2)$ である。点線はスペクトル法を用いた DNS による計算結果⁽¹⁰⁾ であり、実線・塗りつぶし点は $\Delta y^+ = 1.5$ の計算結果、実線・中抜き点は $\Delta y^+ = 3$ の計算結果である。 $\Delta y^+ = 1.5$ の計算では参照値とよく一致する結果が得られたが、 $\Delta y^+ = 3$ の計算では主流方向速度が参照値よりも大きく見積もられた。主流方向速度が大きくなった原因として、 $\Delta y^+ = 3$ では粘性底層を十分に解像できておらず、壁面における運動エネルギーの散逸が過小評価されたことが考えられる。

Octree 細分化格子を導入して計算を行った。計算領域の長さは整数比で取る必要があるため、参照値の計算条件に近い長さとして、 $6H \times H \times 3H$ の計算領域を設定した。壁面近傍 ($y^+ \leq H/4, y^+ \geq 3H/4$) に高解像度格子 ($\Delta y^+ = 3$) を、壁面から遠い領域 ($H/4 < y^+ < 3H/4$) に粗い格子 ($\Delta y^+ = 6$) を配置した。計算結果を Fig. 5 に示す。 Fig. 5 には、 Fig. 4 と同様の凡例に加えて、解像度の変化する境界 ($y^+ = 90$) を縦の点線で示している。細分化格子の導入により、解像度の変化する境界の付近で乱流強度に非物理的な変動がみられたが、それ以外の領域では $\Delta y^+ = 3$ の等間隔格子と同様の計算結果が得られた。したがって、Octree 細分化格子を導入した本計算手法は乱流計算に適用可能であると考えてよい。なお、現行の Octree 細分化格子による計算は単一 GPU 計算で実装されているため、メモリ不足により $\Delta y^+ = 1.5$ を解像することが出来なかったが、今後 Octree 細分化格子を複数 GPU 計算に対応させ、より高解像度の格子でも検証を行う必要がある。

3.2 三次元球周りの流れ

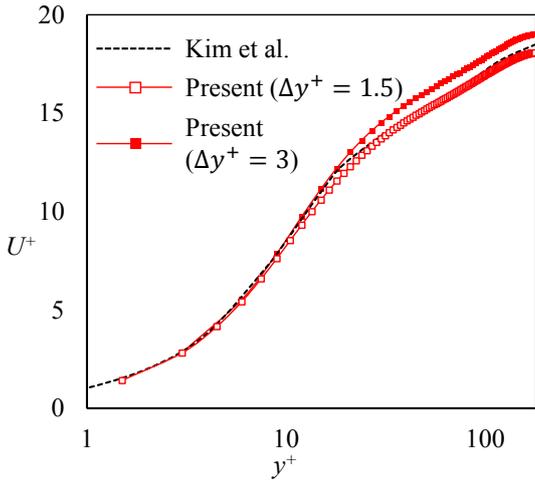
本計算手法による抗力の評価が妥当であるか確認するため、3次元球周りの流れの計算を行った。計算領域の大きさは $0 \leq x, y, z \leq 1$ とし、 $(0.3, 0.5, 0.5)$ の位置に直径 0.1 の球を配置した。Octree 細分化格子を用い、球の近傍に高解像度の格子を集中させた。球近傍の格子は、球の直径を 25.6 格子で解像しており、周辺領域には解像度が半分の粗い格子を配置した。計算格子点数は、球近傍の格子解像度で計算領域を満たした等間隔直交格子に比べて 79.7% 削減されている。境界条件として、 $x = 0, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ の面に $\rho = 1, \mathbf{u} = (1, 0, 0)$ の流入境界条件を、 $x = 1$ の面に $\partial \rho / \partial x = 0, \partial \mathbf{u} / \partial x = \mathbf{0}$ の流出境界を設定した。また、球表面に Interpolated bounce-back 境界条件⁽⁹⁾ を適用した。

流れが十分発達したのち、球に加わる力の時間平均値を求めた。ただし、各時刻における力の瞬時値は、Momentum exchange method⁽¹¹⁾ により計算した。力の時間平均値から、抗力係数を以下の式により求めた。

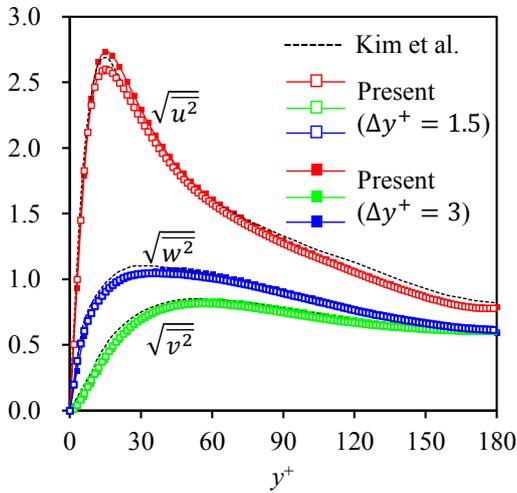
$$C_D = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho_0 U^2 \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} \quad (17)$$

ただし、 F_x は球に加わる力の主流方向成分、 ρ_0 は主流の流体密度、 U は主流速度である。

レイノルズ数の条件を変化させながらいくつか計算を行い、レイノルズ数ごとの抗力係数を求めた。結果を Fig.



(a) Mean velocity.



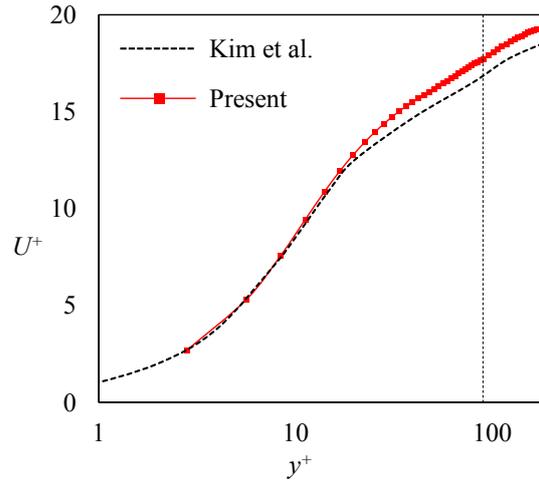
(b) Turbulent intensity.

Fig. 4: Result of a turbulent channel flow with uniform mesh.

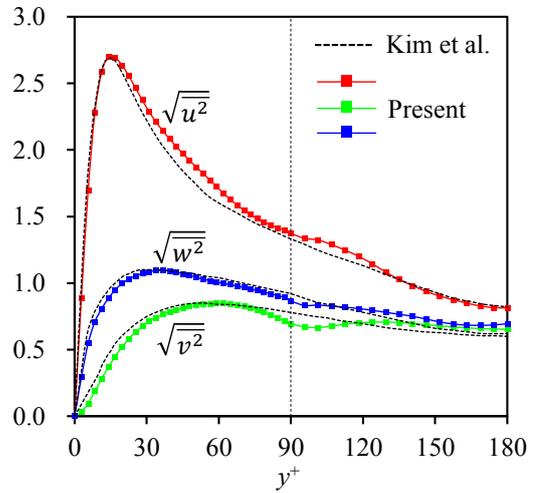
6 に示す。横軸はレイノルズ数、縦軸は抗力係数の値である。点は本手法による計算結果、実線は実験値⁽¹²⁾である。高いレイノルズ数でも計算を安定的に行うことができ、かつ、 $Re = 80,000$ まで実験値とよく一致する計算結果を得た。したがって、球周りの流れにおいて抗力係数を正しく評価できていることが確認できた。

4. 自転車競技の気流計算

本手法の空力解析への応用例として、自転車競技の気流計算を行った。物体として競技用自転車に乗った選手を計算領域に置き、その周りに発生する気流を計算した。物体近傍に高解像度格子を集中させることで、等間隔格子の $1025 \times 1025 \times 1025$ の解像度に相当する格子を設定し、1 GPU で計算した。本計算の格子点数は、最も細かい格子と同一の解像度の等間隔格子を用いる場合に比べて、95.92% 削減されている。計算領域は $0 \leq x, y, z \leq 1$ であり、物体は $z = 0$ の面に接するように配置した。境界条件として、 $x = 0, y = 0, y = 1, z = 1$ の面に $\rho = 1, \mathbf{u} = (1, 0, 0)$ の流入境界、 $x = 1$ の面に $\partial\rho/\partial x = 0, \partial\mathbf{u}/\partial x = \mathbf{0}$ の流出境界、 $z = 0$ の面に静止壁を設定した。物体の境界は Interpolated bounce-back 境界とした。また、主流の速度は、自転車競技の平均的な走行速度である 40 km/h に設定した。



(a) Mean velocity.



(b) Turbulent intensity.

Fig. 5: Result of a turbulent channel flow with octree-based mesh refinement.

計算結果を Fig. 7 に示す。図にはトレーサ粒子を可視化している。自転車後方で流れが非常に乱れており、強い乱流状態になっていることがわかる。また、一定の走行速度を維持するために必要な動力（空気抵抗と走行速度の積）は 270 W で、現実の値とよく一致している。したがって、本計算手法により複雑形状物体周りの流れを精度よく計算できることが示された。

5. まとめ

格子ボルツマン法に Octree 細分化格子を導入し、GPU で実装した。乱流問題を取り扱うため、数値安定性の高い MRT (Multiple Relaxation Time) および乱流モデルの CSM-LES (Coherent-structure Smagorinsky Model Large Eddy Simulation) を導入した。平衡平板間乱流の計算により、本手法が乱流を正しく計算できることを確かめた。球周りの流れの計算により、本手法が抗力を正しく評価できていることを確認した。また、自転車競技の気流計算を行い、本手法の空力解析に対する有用性を示した。今後、複数の GPU を用いた並列計算を導入することで、複数の自転車が列を作って走行する場合などより大規模な応用計算を行う予定である。

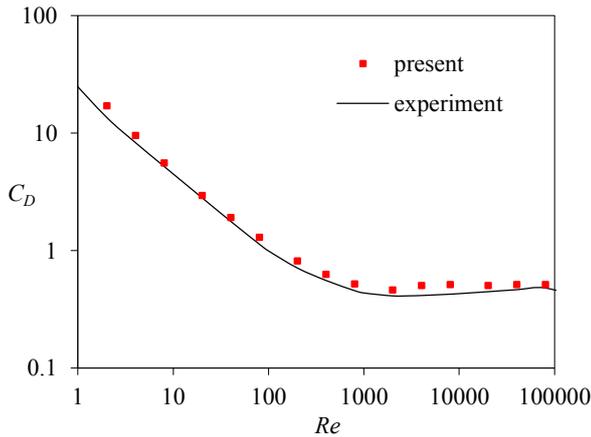


Fig. 6: Drag coefficient of a sphere with various Re numbers.

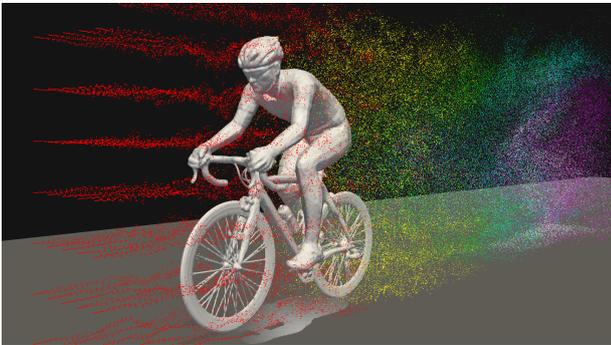


Fig. 7: A flow around a bicyclist.

謝辞

本研究の一部は科学研究費補助金・基盤研究（S）課題番号 26220002 「ものづくり HPC アプリケーションのエクサスケールへの進化」、科学技術振興機構 CREST 「ポストペタスケール高性能計算に資するシステムソフトウェア技術の創出」から支援を頂いた。記して謝意を表す。

参考文献

- (1) 小野寺直幸, 青木尊之, 下川辺隆史, 小林宏充. "格子ボルツマン法による 1m 格子を用いた都市部 10km 四方の大規模 LES 気流シミュレーション". ハイパフォーマンスコンピューティングと計算科学シンポジウム論文集, 第 2013 巻, pp. 123-131, 2013.
- (2) X. Wang and T. Aoki. Multi-GPU Performance of Incompressible Flow Computation by Lattice Boltzmann Method on GPU Cluster. *Parallel Computing*, Vol. 37, No. 9, pp. 521-535, 2011.
- (3) A. Rahimian, I. Lashuk, S. Veerapaneni, A. Chandramowlishwaran, D. Malhotra, L. Moon, R. Sampath, A. Shringarpure, J. Vetter, R. Vuduc, D. Zorin, and G. Biros. Petascale Direct Numerical Simulation of Blood Flow on 200K Cores and Heterogeneous Architectures. In *Proceedings of the 2010 ACM/IEEE International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis, SC '10*, Washington, DC, USA, 2010. IEEE Computer Society.
- (4) T. Abe. Derivation of the Lattice Boltzmann Method by Means of the Discrete Ordinate Method for the Boltzmann Equation. *Journal of Computational Physics*, Vol. 131, No. 1, pp. 241-246, 1997.
- (5) D. d'Humières, I. Ginzburg, Lallemand P. Krafczyk, M., and L.S. Luo. Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions.
- (6) K. Suga, Y. Kuwata, K. Takashima, and R.S. Chikasue. A D3Q27 multiple-relaxation-time lattice Boltzmann method for turbulent flows. *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 69, No. 6, pp. 518-529, 2015.
- (7) H. Kobayashi. Large eddy simulation of magneto-hydrodynamic turbulent channel flows with local subgrid-scale model based on coherent structures. *Physics of Fluids*, Vol. 18, No. 4, p. 045107, 2006.
- (8) F. Olga and H. Dieter. Grid Refinement for Lattice-BGK Models. *Journal of Computational Physics*, Vol. 147, No. 1, pp. 219-228, 1998.
- (9) M. Bouzidi, M. Firdaouss, and P. Lallemand. Momentum transfer of a Boltzmann-lattice fluid with boundaries. *Physics of Fluids*, Vol. 13, No. 11, pp. 3452-3459, 2001.
- (10) J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 177, pp. 133-166, 1987.
- (11) R. Mei, D. Yu, W. Shyy, and L.S. Luo. Force evaluation in the lattice boltzmann method involving curved geometry. *Physical Review E*, Vol. 65, No. 041203, 2002.
- (12) J. Almedeij. Drag coefficient of flow around a sphere: Matching asymptotically the wide trend. *Powder Technology*, Vol. 186, No. 3, pp. 218-223, 2008.