

# 格子ボルツマン法による弾性体モデルの提案と

## その流体・構造連成解析への応用

### A novel lattice Boltzmann method for elastics and its application for fluid-structure interaction analysis

- 西岡恵祐, 名大院, 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail: nishioka@fluid.nuae.nagoya-u.ac.jp  
 森 浩一, 名大工, 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail: mori@nuae.nagoya-u.ac.jp  
 Keisuke Nishioka, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, Aichi  
 Koichi Mori, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, Aichi

We present a new lattice Boltzmann method (LBM) for the wave propagation in isotropic elastic body. Since this model uses same algorithm for previous LB model for fluid analysis, it is easy to implement fluid-structure interaction (FSI) simulation program. In this paper, we conducted 1D and 2D LBM elastics simulation and 2D finite difference time domain method for elastics to validate present model. And also, we demonstrate 1D FSI simulation which uses our model for structure and previous LB model for thermal fluid.

#### 1. 緒言

格子ボルツマン法(lattice Boltzmann method, LBM)は、有限差分法などにより流体の方程式を離散化して解く従来の CFD 手法とは異なる流体解析手法として近年注目をあつめ、盛んに研究が行われている<sup>(1)</sup>。本手法の特長として、アルゴリズムが簡単であること、並列計算に向けた手法であるため、大規模な計算に適用しやすいということが挙げられる。LBM においてはこれまでに、内部エネルギーを考慮しない流体モデル<sup>(2)</sup>や、熱流体モデル<sup>(3)</sup>など様々なモデルが提案されてきた。また、それらのモデルと lattice spring model を組み合わせた解析<sup>(4)</sup>や、immersed boundary method を組み合わせた細糸の解析<sup>(5)</sup>などのような流体・構造連成計算も行われている。さらに、本手法は流体以外の計算にも適用例があり、例えば、波動方程式<sup>(6)</sup>、Poisson 方程式<sup>(7)</sup>などといった偏微分方程式を LBM で解く手法が提案されている。しかしながら、弾性体の変形について LBM を用いて解析したという例は過去に見受けられなく、LBM だけを用いて流体・構造連成計算を行った例もない。LBM により弾性体の解析を行うことが可能になれば、既存の LBM のコードの一部に変更を加えるだけで弾性体の解析が可能となる。また、弾性体と流体の LBM を組み合わせることにより、流体・構造連成解析を単一の計算手法で行えるため、非常に簡便に解析を行うことができ、かつ、計算の並列化により高速に解析を行えることが期待できる。

本稿では、LBM による等方性弾性体の変形の解析手法を新たに提案し、その計算結果が妥当であるかどうかを 1 次元及び 2 次元問題で検証する。2 次元問題については時間領域有限差分(FDTD)法を用いた解と比較を行った。また、提案手法と LBM による既存の熱流体解析手法を組み合わせ、LBM のみを用いて 1 次元流体・構造連成計算を行った。

#### 2. 数値計算手法

LBM においては、通常、空間の離散化に直交等間隔格子を用いる。本研究においても、アルゴリズムの単純化のため、直交等間隔格子を採用した。

##### 2.1 格子ボルツマン法

本研究では、LBM の基礎方程式である格子ボルツマン方程式の衝突項として BGK モデルを用いた格子 BGK 方程式を採用した。

$$f_a(\mathbf{x} + \mathbf{c}_a \Delta t, t + \Delta t) = f_a(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_a(\mathbf{x}, t) - f_a^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (1)$$

ここで、 $f$  は格子点上の仮想粒子の分布関数、 $f^{eq}$  は局所平衡分布関数で、これは速度などといったマクロ量から決定される。 $\mathbf{c}$  は粒子速度、 $\tau$  は無次元緩和時間、 $a$  は粒子の離散化された速度の種類を表すインデックスである。

##### 2.1.1 弾性体の計算手法

微小変形する弾性体の質量保存則、及び運動方程式は次のように表される。なお、以降の式は断りがない場合総和規約に従うものとする。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (3)$$

ここで、 $u_i$  は弾性体の変位速度成分、 $\sigma_{ij}$  は応力テンソルである。また、等方性弾性体の構成式は以下のような式で表される。

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial r_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial r_i}{\partial x_j} + \frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

ただし、 $r_i$  は弾性体の変位成分、 $\lambda, \mu$  はそれぞれ Lamé の第一、第二定数、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。以上が弾性体の支配方程式である。

ここで、LBM における分布関数と、弾性体の方程式における変数 (マクロ量) の関係を次のように与える。

$$0 = \sum_a f_a \quad (5)$$

$$\rho u_i = \sum_a f_a c_{ai} \quad (6)$$

$$-\sigma_{ij} = \sum_a f_a c_{ai} c_{aj} \quad (7)$$

方程式(1)を Chapman-Enskog 展開<sup>(8)</sup>し、得られた分布関数のモーメントの時間発展方程式に式(5)-(7)を代入すると、弾性体の方程式(2)と、方程式(3)-(4)に誤差項 $O(\Delta x^2)$ が付与された形で得られるため、このモデルを用いると弾性体の計算が空間に 1 次精度で可能であると考えられる。なお、弾性体の変位は変位速度を積分することで求める。ただし、このモデルを用いる場合、弾性係数 $\lambda, \mu$ は以下に示す形で表される。

$$\lambda = \mu = \frac{\rho c^2}{3}$$

なお、 $c = \Delta x / \Delta t$ である。つまり、本来は独立である 2 つの弾性係数が等しい値を取るため、弾性係数の比を表すポアソン比を一意に決定することができず、この場合ポアソン比は常に 0.25 となる。また、弾性係数が密度と格子速度の関数になるために、媒質中を伝わる縦波の速度  $c_l$  は常に

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = c \quad (8)$$

となり、縦波の伝播速度と格子速度（情報の伝播速度とも言い換えられる）が常に一致する。

式(5)-(7)を満たす平衡分布関数として、次に示す式が考えられる。

$$f_a^{eq} = w_a \left( \frac{3\rho}{c^2} c_{ai} u_i - \frac{9}{2c^4} c_{ai} c_{aj} \sigma_{ij} + \frac{3}{2c^2} \sigma_{ii} \right) \quad (9)$$

ここで、 $w_a$  は速度  $c_a$  に対応する重み係数である。本研究では速度モデルとして 1 次元の計算には DIQ3 モデルを、2 次元の計算には D2Q9 モデルを採用する。(8)式中の重み係数は、一般的な格子ボルツマン法のもの<sup>9)</sup>と等しい。

### 2.1.2 流体の計算手法

流体の計算には、高田らによる熱流体モデル<sup>6)</sup>を用いた。粒子速度モデルには、1 次元 7 速度(DIQ7)モデルを採用する。

### 2.2 境界条件

流体の境界条件としては、固体壁の条件として bounce-back 条件を採用した。一方、壁面が移動速度をもつ場合、流体の速度は壁面において同じ速度になる。この場合、壁面において粒子が平衡状態にあると仮定し、壁面における密度、流速、エネルギーより粒子の分布関数を計算した。

構造の境界条件としては、流体のような bounce-back 条件を採用できないため、本研究では境界上において粒子の平衡状態を仮定し、マクロ量である変位速度と応力から平衡分布関数を用いて分布関数を決定する手法を採用した。

また、本稿での流体・構造連成計算においては、流体のセクションと構造のセクションは同じ 1 つの格子を共有し、その中の格子点を流体側の格子点、構造側の格子点に振り分けた。さらに、境界の扱いの簡単化のために、構造側と流体側の境界がちょうど格子点上に乗るようにジオメトリを設定した。なお、構造の変形による物体表面の移動を考慮しなかったため、流体と構造の接触点は移動しない。なお、連成手法は弱連成である。

## 3. 弾性体 LBM の検証計算

提案手法による LBM を用いて 1 次元及び 2 次元弾性体の検証計算を行った。

### 3.1 1 次元弾性体の引張

固定端と応力境界条件もつ弾性体の計算結果と解析解を比較した。モデルの模式図を図 1 に、パラメータを表 1 に示す。なお、これらのパラメータは鉄の物性値を模したものである。また、このモデルにおいて格子の解像度を変化させ計算を行った。このモデルの格子について表 2 に示す。

代表として、Case1 及び Case3 の時刻  $t = 89.45 \mu\text{s}$  での計算結果と解析解の比較を図 2, 3 に示す。この時刻において、波面が  $x = 0.5$  に到達する。変位速度の解析解は、波面において無限大になるので、図中では見きれている。図 2(a)と図 2(b)を見比べると、格子解像度の荒い Case1 の場合では波の進行が遅れ、波面が明確に捉えられていない。しかし、どちらのケースでも  $x = 0.6$  以降は変位

速度が定常値に収束している。次に、解析解と数値解の誤差について評価する。時刻  $t = 89.45 \mu\text{s}$  における格子幅と誤差の関係を図 3 に示す。なお、ここに示す誤差は、解析解と数値解との相対誤差を空間で平均したものである。

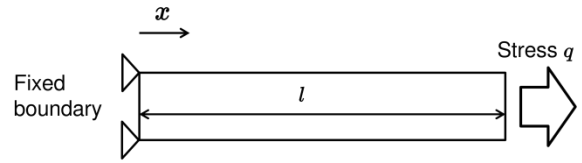


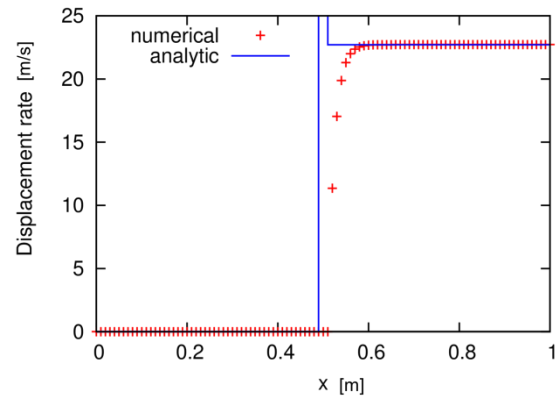
Fig. 1 Schematic of 1D analysis model

Table 1 1D analysis model parameters

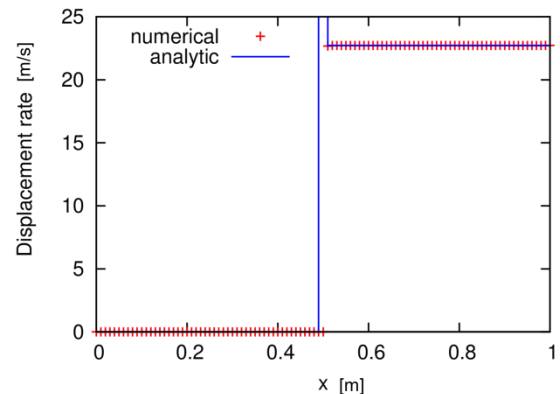
length $l$ [m]	1
density $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	7874
shear modulus $\mu$ [GPa]	82
lattice speed $c$ [m/s]	5589
applied stress $q$ [GPa]	1

Table 2 Lattice configuration

Case	lattice points	spacing [m]
1	101	$1 \times 10^{-2}$
2	501	$2 \times 10^{-3}$
3	1001	$1 \times 10^{-3}$
4	2001	$5 \times 10^{-4}$



(a) Case 1



(b) Case 2

Fig. 2 Spatial distribution of displacement rate

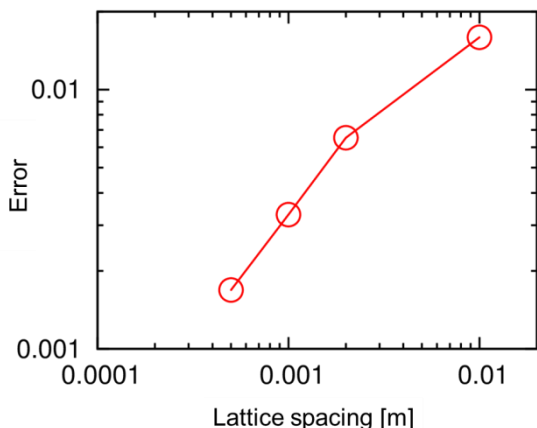


Fig. 3 Discretization error versus lattice spacing

図3において、Case 1(格子幅 0.01)における誤差を除いた3点での傾きは0.98であった。つまり、この計算手法は空間に1次精度を持つ。

### 3.2 2次元弾性体における弾性波の伝播

提案手法による LBM を用いて 2 次元の弾性体の検証計算を行った。ここでは、LBMによる計算結果を、時間領域有限差分(FDTD)法<sup>(40)</sup>による計算結果と比較する。なお、比較対象の FDTD 法は、時間及び空間を 2 次中心差分で離散化している。解析対象の模式図を図4に示す。解析対象の物性値は3.1節のパラメータに従う。格子点数は $251 \times 51$ とし、長手方向の長さを1 m とした。このとき、LBMにおける時間刻みは $\Delta t = 0.716 \mu\text{s}$ となる。また、FDTD法の計算において、格子幅をLBMによるものと一致させ、時間刻みを半分とし CFL 数を0.5とした。入力として、解析モデル上面に $x$ 方向の変位速度として正弦波を1周期加えた。最大の変位速度は1 m/sで、周期は $20\Delta t$ とした。

図5.6はそれぞれ異なる時刻におけるLBMとFDTDによる解析結果を、応力の $xx$ 成分で表したものである。 $t = 200\Delta t$ において波面が $x = 0.8$ に到達し、 $t = 250\Delta t$ において波が境界に達し、反射した後、 $t = 450\Delta t$ において波面が $x = 0.2$ に到達する。図5(a), (b)を比較すると、応力の分布は定性的に等しく与えられている。また、波面通過後に生じる特徴的なX型の弾性波(これは左右の境界で弾性波が反射したものである)が、LBMによるものはFDTDによるものよりも分布が若干ぼやけている。

また、弾性波の反射後の時刻である図6において(a), (b)を比較すると、 $x = 0.2$ に位置する波面が、LBMによるものはFDTDとくらべかなり散逸的になり、分布が広がっている。また、それに続く弾性波はFDTDの解にくらべ到達した距離が短い。このことは、LBMにおける波の伝播速度が遅く見積もられているというよりも、LBMとFDTDの境界条件の差から生じたものと考えられる。また、LBMの解においては、先頭の波面がFDTDの解に比べ若干弓なりになっている。これは左右面に境界条件として与えた平衡分布の仮定が影響しているものと考えられる。この仮定のために、境界で反射する弾性波は散逸的になり、また、境界上を伝播する弾性波の伝播速度が遅くなったと考えられる。

$t = 250\Delta t$ までに弾性波が到達した距離から弾性波の伝播速度を求めると、LBMでは5557 m/s、FDTDでは5706 m/sとなり、縦波の伝播速度の理論値 5589 m/sとの誤差はLBMでは0.6%、FDTDでは2.1%となった。LBMにおいて波の伝播速度を正確に求められるのは、(8)式に示したように縦波の伝播速度と格子速度が一致するためだと考えられる。

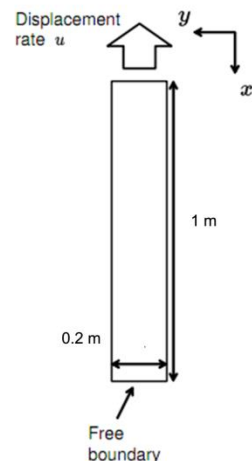


Fig. 4 Schematic of 2D analysis model

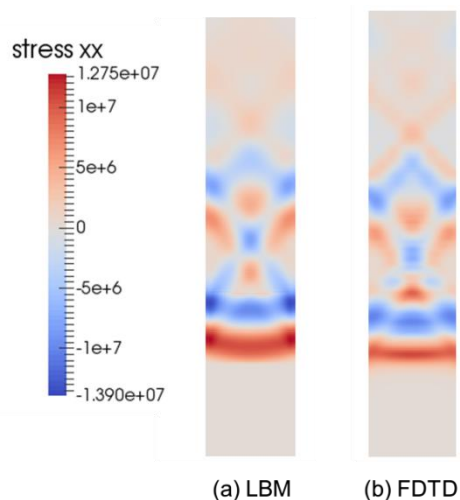


Fig. 5 Comparing LBM and FDTD in spatial distribution of normal stress  $\sigma_{xx}$  at  $t = 200\Delta t$

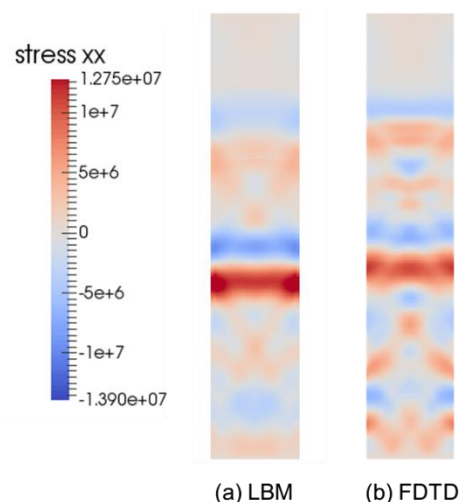


Fig. 6 Comparing LBM and FDTD in spatial distribution of normal stress  $\sigma_{xx}$  at  $t = 450\Delta t$

#### 4. 1次元流体・構造連成解析

計算対象は直列に接続された1次元の流体と弾性体である。計算領域は $x = [0, 1]$ で(単位はm)、 $x = [0, 0.5]$ の領域が流体、 $x = [0.5, 1]$ の領域が弾性体である( $x = 0.5$ において格子点を共有している)。弾性体の物性値は3.1節での計算に準じる。また、この計算においては、流体計算に熱流体モデル<sup>9)</sup>を用いる。流体のパラメータとして、圧力は1気圧、温度は300 K、密度は $1.177 \text{ kg/m}^3$ 、気体定数は $287 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ とした。音速はそれぞれ弾性体が $5589 \text{ m/s}$ 、流体が $508.2 \text{ m/s}$ である。流体の音速の値が、通常の気体よりも大きいのは、この熱流体モデルにおける比熱比は空間次元に依存し、1次元において比熱比が3となるためである。格子点数は流体側が5000、弾性体側が339である。この差は流体側と弾性体側の時間刻みを合わせるためであり、時間刻みは $\Delta t = 0.264 \mu\text{s}$ とした。

このモデルに、変位速度を正弦波振動として1周期分を $x = 1$ の境界に加えた。また、1周期を $100\Delta t$ とし、以降は固定境界とした。入力の最大変位速度は $0.1 \text{ m/s}$ である。

図7に、時刻 $t = 600\Delta t, 3250\Delta t$ での弾性体の変位速度と流体の圧力(ゲージ圧)の分布を示す。同図 $t = 600\Delta t$ では弾性波が1回流体と干渉し、 $t = 3250\Delta t$ では5回干渉している。流体における圧力が、左に伝播するに従い減衰しているのは粘性の影響で、ナビエ・ストークス方程式の非線形移流項のために波面の切り立ちが生じ、強い減衰が発生するためである。また、弾性体側は流体側にエネルギーを受け渡すため、弾性体内を伝播する弾性波の変位速度の振幅は、流体と干渉するたびに小さくなっているが、波の周波数は変化していない。

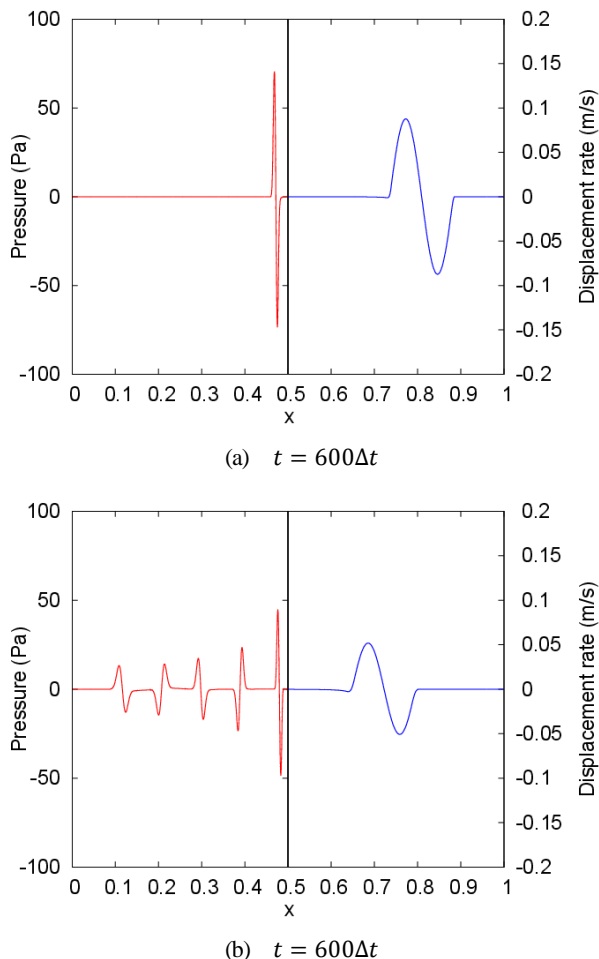


Fig. 7 Distribution of displacement rate and fluid pressure. Left side is fluid domain and the other is structure domain

#### 5. 結言

LBMによって弾性体の計算を行う手法を新たに提案し、この手法を用いて1次元及び2次元の弾性体問題について計算を実施し、理論解、FDTD法による解と比較を行った。また、1次元の流体・構造連成計算を実施し、結果を考察した。

1次元計算においては、空間精度の確認を行い、提案手法は空間1次精度を持つことを確認した。

2次元計算においては、FDTD法による解析結果と提案手法による解析結果を比較し、平衡分布を仮定する境界条件が機能することを確認した。また、弾性波の伝播速度を理論値と比較した。提案手法による弾性波の伝播速度は理論値とほぼ一致しているが、FDTD法による解よりも分布が散逸弱になることを確認した。また、境界付近においては伝播速度が遅くなっていることを確認した。これは境界条件として平衡分布を与えていることが影響していると考えられる。

連成計算では、流体から弾性体側への作用を観察した。弾性体内を伝わる弾性波の波形は変化しなかったが、流体内を伝わる圧力波は方程式の非線形性のため、波形が変化していく様子が観察された。

弾性体のLBMのモデルを改良し、任意の弾性率を与えられるようなモデルを構築すること、解析結果に悪影響を及ぼさない境界条件を新たに与えることが今後の課題である。

#### 参考文献

- (1) 薦原道久, “格子ボルツマン法の基礎と応用,” 日本機械学会論文集, vol. 77, no. 784, (2011), pp. 2367–2377.
- (2) S. Hou, Q. Zou, S. Chen, G. Doolen, and A. C. Cogley, “Simulation of Cavity Flow by the Lattice Boltzmann Method,” *J. Comput. Phys.*, vol. 118, (1995), pp. 329–347.
- (3) 高田尚樹, 山越康広, 薦原道久, “三次元熱流体格子ボルツマン・モデルによる流体解析,” 日本機械学会論文集, vol. 64, no. 628, (1998), pp. 3934–3941.
- (4) G. Buxton, R. Verberg, D. Jasnow, and A. Balazs, “Newtonian fluid meets an elastic solid: Coupling lattice Boltzmann and lattice-spring models,” *Phys. Rev. E*, vol. 71, no. 056707, (2005)
- (5) J. Favier, A. Revell, and A. Pinelli, “A Lattice Boltzmann–Immersed Boundary method to simulate the fluid interaction with moving and slender flexible objects,” *J. Comput. Phys.*, vol. 261, (2014), pp. 145–161.
- (6) G. Yan, “A Lattice Boltzmann Equation for Waves,” *J. Comput. Phys.*, vol. 161, no. 1, (2000), pp. 61–69.
- (7) Z. Chai and B. Shi, “A novel lattice Boltzmann model for the Poisson equation,” *Appl. Math. Model.*, vol. 32, no. 10, (2008), pp. 2050–2058.
- (8) B. Chopard and M. Droz, *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*. (1998).
- (9) S. D. C. Walsh and M. O. Saar, “Macroscale lattice-Boltzmann methods for low Peclet number solute and heat transport in heterogeneous porous media,” *Water Resour. Res.*, vol. 46, no. 7, (2010), pp. 1–15.
- (10) M. Sato, “Finite-Difference Time-Domain Numerical Analysis of Elastic Wave Fields Using both Elastic and Velocity Potential Variables,” *Jpn. J. Appl. Phys.*, vol. 45, no. 5B, (2006), pp. 4453–4461.