# 高次精度DG法におけるセル緩和型陰解法の乱流統計量への影響

Effects on Turbulence Statistics of Cellwise Relaxation Implicit Scheme with High-Order DG Method

○ 淺田啓幸，東北大学工学研究科，宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01, E-mail：asada@cfd.mech.tohoku.ac.jp
河合宗司，東北大学工学研究科，宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01, E-mail：kawai@cfd.mech.tohoku.ac.jp
澤田惠介，東北大学工学研究科，宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01, E-mail：sawada@cfd.mech.tohoku.ac.jp
Hiroyuki Asada, Tohoku University, 6-6-01 Aramaki-Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai
Soshi Kawai, Tohoku University, 6-6-01 Aramaki-Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai
Keisuke Sawada, Tohoku University, 6-6-01 Aramaki-Aza-Aoba, Aoba-ku, Sendai

The effects on turbulent statistics of cellwise relaxation implicit (CRI) scheme with high-order Discontinuous Galerkin (DG) method are investigated by computing the inviscid Taylor-Green vortex and the turbulent channel flow. It is shown that, employing sufficient inner iteration numbers, the computed results obtained by the implicit scheme with various CFL numbers well agree with those by the explicit scheme in the Taylor-Green vortex computation. The convergence accereleration techniques are shown to be required in the computation with large CFL numbers with insufficient inner iterations. In the turbulent channel flow computation, the higher order DG-CRI scheme gives better resolved wall turbulence, while the obvious differences between presented results and other DNS data are observed.

## 1. 緒論

数値流体力学 (CFD) はコンピュータの発展と共に急速に発展し，今日では航空機設計の分野などで必要不可欠となっている．中でも，非構造格子法は，航空機全機のような複雑形状まわりの計算を容易にし，CFD の分野に大きなインパクトを与えた．現在では，巡行時の航空機まわりの定常流解析により，空力係数を高精度に予測できるまでとなっている．今後は，離着陸時の空力騒音メカニズムの解明や高揚力装置による最大揚力係数の予測などのために，非定常でより複雑な乱流を解析することが重要となる．

しかし，これまで非構造格子法として用いられてきた有限体積 (FV) 法は，このような複雑形状まわりの複雑な乱流を解析することが難しいとされている．それは，定式通りの空間精度を得ることができず，空間精度が低いという問題があるからである．この問題は，セル境界面の値を再構築する際に，セル外部の情報 (ステンシル) を用いることに起因する．再構築の際に隣接形状の影響を強く受け，格子の品質が劣悪な場合に補間精度が低下してしまうのである．今後の航空機まわりの非定常流解析のためには，非構造格子上でも高次精度化が実現できる計算手法を用いる必要がある．

これに対し，高次精度非構造格子法である Discontinuous Galerkin 法 (DG 法)[(1)]が注目されている．DG 法は有限要素法の一種であり，セル内部に変数分布をもつ．この変数分布は，セル内部に導入した自由度と基底関数を用い両者の線形和で表現される．自由度は，各基底関数の係数という意味合いを持っている．セル境界面の値は，セル内部の変数分布を用いて再構築され，セル外部のステンシルを用いることはない (コンパクトである)．したがって，隣接セルの形状や品質に依存することなく定式どおりの高次精度化を実現できる．

DG 法は，そのコンパクト性が最大の利点であり，高次精度化が実現できるだけでなく，並列化効率や数値安定性に優れる．しかし，時間積分法に LU-SGS 陰解法のような大域的な情報を用いる従来の陰解法を用いると，DG 法のコンパクト性を最大限に活用することができない．本研究は，これに対しセル緩和型陰解法 (CRI スキーム) を提案してきた[(2)]．CRI スキームは，セル内部の情報のみを用いて時間積分を行う．その意味では陽解法であり，DG 法のコンパクト性を損なうことはない．また，クーラン数を大きくとることができるという意味では陰解法である．これまでの研究では，DG-CRI スキームの空間精度を 4 次精度まで向上させることに成功し，デルタ翼まわりの定常流解析で空間精度の向上を確認している[(3)(4)]．また，数値積分を簡略化することで，数値安定性を維持したまま必要メモリの増加なく陰解法の 33 倍の高速化に成功している[(5)]．

DG 法を用いることで，複雑形状まわりの流れを高精度に解くことができる．しかし，乱流解析に時間平均を施した Reynolds Averaged Navier-Stokes Simulation(RANS) を用いてしまうと，乱流の非定常性や細かい構造を捉えることが難しい．今後の複雑な乱流の解析のことを考えると，時間平均を施さない Large Eddy Simulation(LES) が望ましい．LES は，信頼性の高い解析が必要な大きな乱流渦に対してはモデル化せず，小さい乱流渦に対してのみモデル化することで高精度な乱流解析を実現している．壁乱流を考えた場合，時間積分はモデル化する小さな乱流渦ではなくモデル化しない大きな乱流渦の時間スケールに合わせることが望ましい．陽解法を用いた場合はこの様な時間刻み幅の調整は困難であるが，陰解法を用いるとこれが実現できる．本研究で提案した CRI スキームも陰解法であるから，この様な時間刻み幅の調整が可能である．しかし，これまでの DG-CRI スキームの研究は定常流解析のみであり，非定常流解析への展開は例がない．

本研究は，高次精度 DG-CRI スキームを用いた LES 解析を行うことを目的としている．今回は，高次精度 DG-CRI スキームを用いて Taylor-Green 渦やチャネル乱流の解析を行い，陰解法 CRI スキームの乱流統計量への影響を調査することで LES 解析への展開の可能性を調べる．

## 2. 数値計算法

### 2.1 不連続ガレルキン (DG) 法

DG 法はセル内部の物理量を以下の様に表現する．

$$Q(x,y,z,t)=\sum_j \phi_j(x,y,z)Q_j(t). \tag{1}$$

ここで，$\phi_j$ は基底関数，$Q_j$ は自由度である．また，$j$ は自由度の数であり，空間 2 次精度ならば 4，3 次精度ならば 10，4 次精度ならば 20 である．本研究では基底関数に Warburton らの研究によって提案された直交基底関数を用いる[(8)]．

### 2.2 DG 法による Navier-Stokes 方程式の離散化

3 次元 Navier-Stokes 方程式は以下のように表される．

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial z}=0. \tag{2}$$

ただし，5 成分の内 1 成分のみを表した．ここで，$Q$ は保存変数，$E, F, G$ は $x, y, z$ 方向の流束関数である．$E, F, G$ は，対流項と粘性項に分けて以下のように表現できる．

$$E = E_c - E_v, \tag{3}$$

$$F = F_c - F_v, \tag{4}$$

$$G = G_c - G_v. \tag{5}$$

本研究では，数値流束評価法として対流項には AUSM-DV 法[7]，粘性項には BR2 法[6]を用いる．BR2 法では，支配方程式 (2) を以下のように二つの式のシステムとして表現し，両者を DG 法により離散化する．

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_v(Q, \nabla Q) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_v(Q)\nabla Q. & (6) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{F}_c - \nabla \cdot \boldsymbol{F}_v = 0. & (7) \end{cases}$$

ただし，$\boldsymbol{F}_c, \boldsymbol{F}_v$ はそれぞれ対流項と粘性項の流束関数を成分とするベクトルである．また，$\boldsymbol{\mathcal{A}}_v$ は二階テンソルのヤコビ行列であり，以下の式で与えられる．

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_v(Q) = \frac{\partial \boldsymbol{F}_v(Q, \nabla Q)}{\partial \nabla Q} = \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{bmatrix}. \tag{8}$$

テスト関数を $\psi_x$ として，式 (6) の $x$ 成分を弱形式化すると，ガウスの発散定理より以下のように表現できる．

$$\int_\Omega \psi_x E_v d\Omega = \int_{\partial\Omega} \psi_x Q^* \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} d\partial\Omega - \int_\Omega \nabla \cdot (\psi_x \boldsymbol{A})\, Q d\Omega. \tag{9}$$

ただし，$\Omega$ はセル内部，$\partial\Omega$ はセル境界面であり，$\boldsymbol{n}$ はセル境界面の法線ベクトルである．また，$\boldsymbol{A}$ は $A_x, A_y, A_z$ を成分とするベクトルである．$Q^*$ は数値流束であり，BR2 法では以下のように平均値で表される．

$$Q^* = \begin{cases} \dfrac{Q^- + Q^+}{2} & (\text{on } \partial\Omega_i) \\ Q^b & (\text{on } \partial\Omega_b) \end{cases}. \tag{10}$$

ただし，$\partial\Omega_i$ は計算領域内部のセル境界面，$\partial\Omega_b$ 計算領域境界に接しているセル境界面である．また，上付き添字の $-, +$ はそれぞれ自セルと隣接セルの値を意味する．式 (9) より，

$$\int_\Omega \psi_x E_v d\Omega = \int_{\partial\Omega} \psi_x \left(Q^* - Q^-\right) \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} d\partial\Omega + \int_\Omega \psi_x \boldsymbol{A} \cdot \nabla Q d\Omega. \tag{11}$$

したがって，粘性流束関数 $E_v$ は弱形式的に以下のように表現できる．

$$E_v = \boldsymbol{A} \cdot \nabla Q + \delta_x. \tag{12}$$

ここで，$\delta_x$ は global リフティング演算子とよばれるベクトルの $x$ 成分である．同様にして $y, z$ 方向の流束関数は以下のように弱形式的に表現される．

$$F_v = \boldsymbol{B} \cdot \nabla Q + \delta_y, \tag{13}$$

$$G_v = \boldsymbol{C} \cdot \nabla Q + \delta_z. \tag{14}$$

一方，テスト関数を基底関数 $\phi_i$ として式 (7) を弱形式化すると，ガウスの発散定理より

$$\int_\Omega \phi_i \frac{\partial Q}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \phi_i \boldsymbol{F}_c^* \cdot \boldsymbol{n} d\partial\Omega - \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \boldsymbol{F}_c d\Omega - \int_{\partial\Omega} \phi_i \boldsymbol{F}_v^* \cdot \boldsymbol{n} d\partial\Omega + \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \boldsymbol{F}_v d\Omega. \tag{15}$$

ここで，$\boldsymbol{F}_c^*, \boldsymbol{F}_v^*$ はそれぞれ対流項と粘性項の数値流束であり，前述したように本研究では対流項については AUSM-DV 法，粘性項については BR2 法で評価する．BR2 法では，粘性項の数値流束を以下のように評価する[6]．

$$\boldsymbol{F}_v^* = \begin{cases} \dfrac{(\boldsymbol{\mathcal{A}}\nabla Q)^- + (\boldsymbol{\mathcal{A}}\nabla Q)^+}{2} + \eta_e \dfrac{(\boldsymbol{\delta}^f)^- + (\boldsymbol{\delta}^f)^+}{2} & (\text{on } \partial\Omega_i) \\ (\boldsymbol{\mathcal{A}}\nabla Q)^b + (\boldsymbol{\delta}^f)^b & (\text{on } \partial\Omega_b) \end{cases}. \tag{16}$$

ここで，$\boldsymbol{\delta}^f$ は local リフティング演算子であり global リフティング演算子の面積分を注目しているセル境界面についてのみ行うことで得られる．また，$\eta_e$ は安定性パラメータであり，$N_f$ がセルを構成するセル境界面の数のとき，一般に $\eta_e > N_f$ を満たせば安定に計算できる．しかし，本研究では $\eta_e = 1$ でも安定に計算できているため，この値を用いる．式 (12),(13),(14) と式 (16) を式 (15) に代入して，対流項と粘性項，リフティング項に分けると，式 (1) より

$$\sum_j \frac{dQ}{dt} I_{ij} + \int_{\partial\Omega} \phi_i \boldsymbol{F}_c^* \cdot \boldsymbol{n} d\partial\Omega - \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \boldsymbol{F}_c d\Omega - \int_{\partial\Omega} \phi_i \boldsymbol{F}_v^* \cdot \boldsymbol{n} d\partial\Omega + \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \boldsymbol{F}_v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \phi_i \boldsymbol{\delta}^* \cdot \boldsymbol{n} d\partial\Omega + \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \boldsymbol{\delta} d\Omega \tag{17}$$

ただし，基底関数が直交性をもつとして以下の式を用いた．

$$I_{ij} = \begin{cases} \int_\Omega \phi_i \phi_j d\Omega & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}. \tag{18}$$

### 2.3 セル緩和型陰解法 (CRI スキーム)

CRI スキームでは，自セルの値のみを用いて時間積分を行う[2]．まず，式 (17) の第 2-7 項について，以下のように線形化を考える．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}^{n+1} &\simeq \boldsymbol{F}^n + \frac{\partial \boldsymbol{F}^n}{\partial Q}\Delta Q + \frac{\partial \boldsymbol{F}^n}{\partial \nabla Q}\Delta\nabla Q, \\ \boldsymbol{\delta}^{n+1} &\simeq \boldsymbol{\delta}^n + \frac{\partial \boldsymbol{\delta}^n}{\partial Q}\Delta Q. \end{aligned} \tag{19}$$

ただし，第 2,3 項の対流項については

$$D = \frac{\partial \boldsymbol{F}^n}{\partial Q} \cdot \boldsymbol{n}, \tag{20}$$

に対して

$$D^+ = \frac{\kappa\left(D + \lambda_{max} I\right)}{2}, \tag{21}$$

と近似する．ここで，$I$ は単位行列，$\kappa$ は定数であり，LU-SGS 陰解法と同様に $\kappa = 1.05$ とし，$\lambda$ は以下の式で与えられる．

$$\lambda_{max} = |\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n}| + c. \tag{22}$$

また，式 (19) の流束関数の線形化の右辺第 3 項は空間 3 次精度における優対角性を保持する項である．なお，対流項では対流流束関数が保存変数の勾配の関数ではないため無視している．次に，第 1 項について以下のように近似する．

$$\sum_j \frac{dQ}{dt} I_{ij} \simeq \frac{1}{\Delta t} \sum_j I_{ij} \Delta Q_j. \tag{23}$$

式 (19) と式 (23) により $\Delta Q$ に関する以下の代数方程式を得る．

$$\sum_j \boldsymbol{M}_{ij} \Delta Q_j = \boldsymbol{R}_i. \tag{24}$$

$\boldsymbol{M}_{ij}$ は自由度と保存変数の数に依存した行列であり，3 次元 Navier-Stokes 方程式の場合は空間 2 次精度で $20 \times 20$，空間 3 次精度で $50 \times 50$，空間 4 次精度で $100 \times 100$ の行列となる．この代数方程式は，セル内部の情報のみを含んでいるため，セルごとに独立に解かれる．そのため，DG 法のコンパクト性を最大限に活かしながら時間積分を行うことができる．

## 3. 計算結果と考察

### 3.1 Taylor-Green 渦

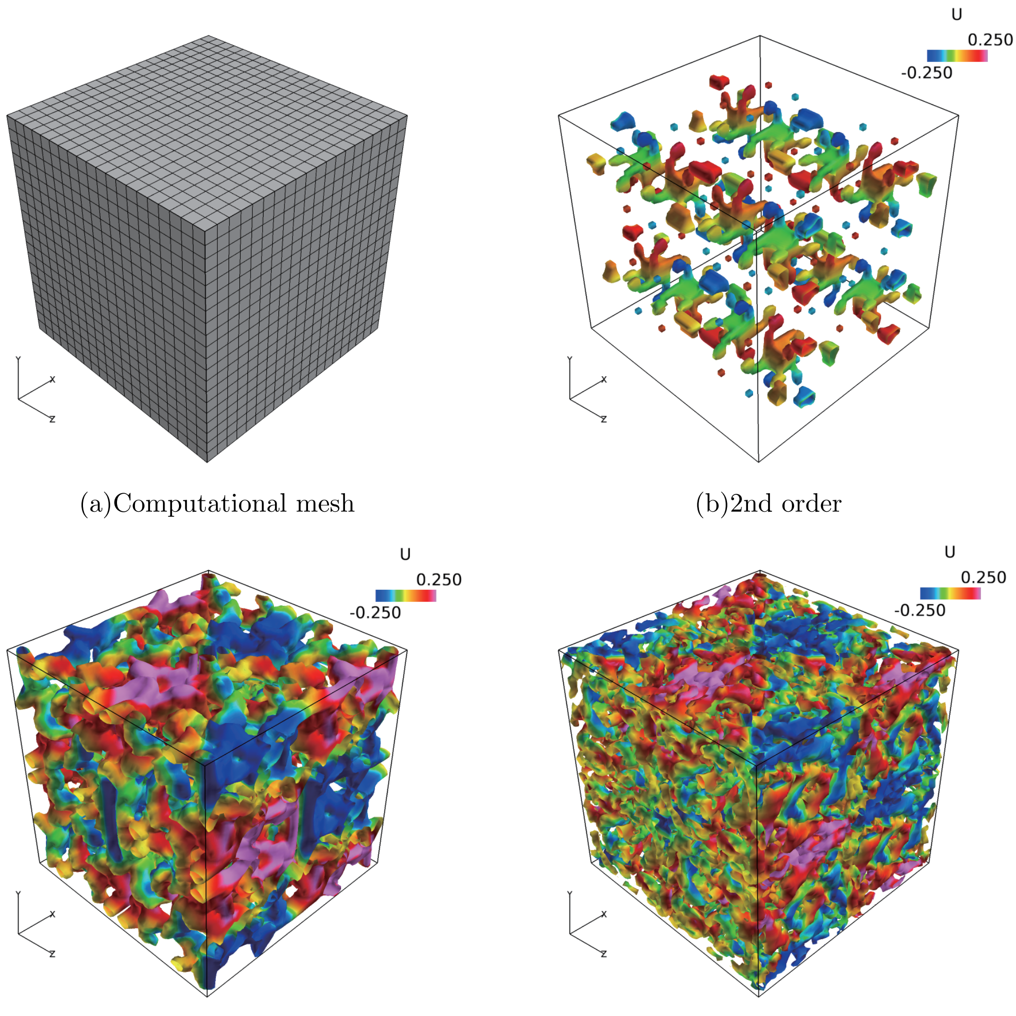
支配方程式は Euler 方程式である．計算領域は

$$-\pi \le x \le \pi, \ -\pi \le y \le \pi, \ -\pi \le z \le \pi$$

であり，計算格子は立方体の各辺を 20 分割してできる六面体格子を用いる (図 1(a)，総格子数 8000)．初期条件は，以下の様に与える．

$$\rho = 1,$$
$$u = M_\infty \sin x \cos y \cos z,$$
$$v = -M_\infty \cos x \sin y \cos z,$$
$$p = \frac{1}{\gamma} + \frac{M_\infty^2}{16}\left[\cos 2z + 2\cos 2x + \cos 2y - 2\right].$$

本研究では，マッハ数を $M_\infty = 0.1$ とした．DG 法では，セル内部に変数分布をもつため，変数分布を決定する自




(a)Computational mesh (b)2nd order (c)3rd order (d)4th order

Fig. 1: Computational mesh and isosurfaces of Q value for the inviscid Taylor-Green vortex.

由度にも初期条件を定める必要がある．本研究では，自由度の初期条件を基底関数の直交性を用いて求めた．例えば，$x$ 方向の運動量保存則に対する保存量 $\rho u$ については

$$\rho u = M_\infty \sin x \cos y \cos z,$$

が初期条件である．左辺について

$$\int_\Omega \phi_i \rho u d\Omega = \int_\Omega \phi_i \sum_j Q_{2,j} \phi_j d\Omega = I_{ii} Q_{2,i},$$

であるから，$i$ 番目の自由度の初期条件は

$$Q_{2,i} = \frac{1}{I_{ii}} \int_\Omega \phi_i M_\infty \sin x \cos y \cos z d\Omega, \qquad (25)$$

と求められる．境界条件は，全境界で周期境界条件を課している．時間積分には陽解法として 2 段階 TVD Runge-Kutta 法，陰解法として CRI スキームを用いる．クーラン数は，陽解法で 0.1，陰解法では 1 もしくは 2 とした．計算には東北大学流体科学研究所のスパコンを用い，16 コアを用いた MPI ライブラリによる並列計算を行った．領域分割には METIS を用いた．

まず，陽解法を用いた計算を行った．図 1 に，$t^* = 15.0$ における Q 値の等値面と $u$ を示す．ただし，$t^*$ はマッハ数 $M_\infty$ を基準とした無次元時間である．空間精度が向上するにしたがい，細かい渦構造が減衰することなく捉えられている．また，図 2 に運動エネルギーの統計量の履歴を示す．本解析は非粘性流解析であるため，運動エネルギーが減衰せず一定に保たれるのが解析解となる．時間が経過するにつれて，大きな渦が細かい渦となるため，空間精度の低いスキームではこの細かい渦が捉えられずに運動エネルギーが低下する．一方，空間精度が高いスキームであれば，細かい渦も捉えられるため運動エネルギーは一定に保たれる．本計算の結果でも，空間精度が向上するにつれて，運動エネルギーが一定に保たれている時間が長くなった．しかし，空間 4 次精度で得られた運動エネルギーは途中で空間 3 次精度によるものを下回っている．これは，空間 4 次精度 DG 法の高波数に対する dissipation が，空間 3 次精度 DG 法の高波数に対する dissipation よりも大きいためであると考えられる．ただし，dissipation が効き始める波数は，空間 3 次精度よりも空間 4 次精度の法方が高いため，運動エネルギーが一定に保たれている．図 3 にエンストロフィーの履歴を示す．ただし，エンストロフィーは以下の式を用いて算出した．

$$\Phi = \int_\Omega \frac{\rho\, \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}}{2} d\Omega.$$

$V$ はセル体積，$\boldsymbol{\omega}$ は渦度である．空間精度が向上するにつれて，大きなエンストロフィーをとることができた．これは，細かい渦まで捉えられていることを意味している．

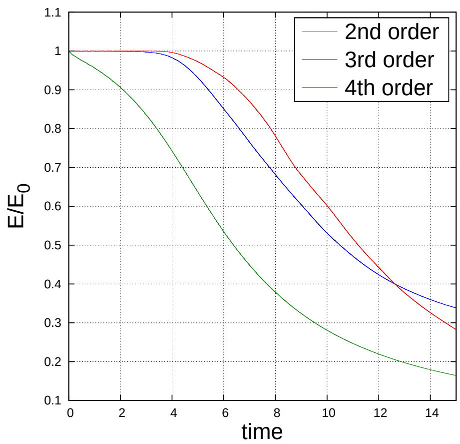


Fig. 2: Kinetic energy histories in the explicit time integration case.

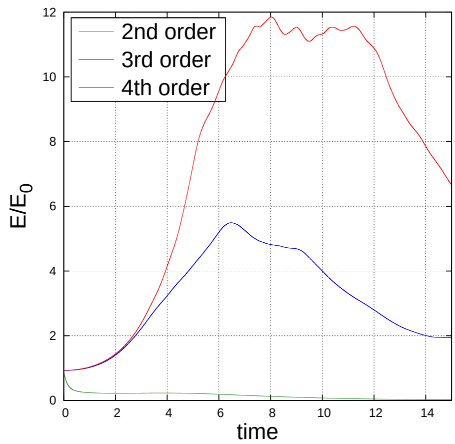


Fig. 3: Enstrophy energy histories in the explicit time integration case.

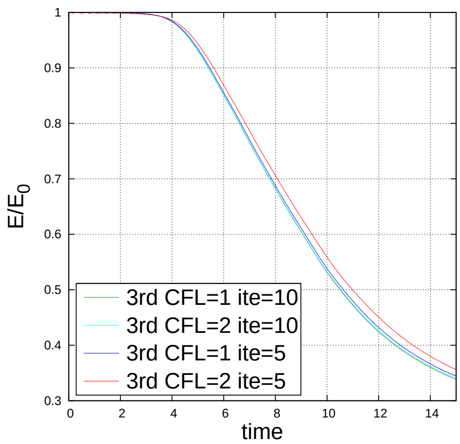


Fig. 4: Kinetic energy histories in theimplciti time integration case for various CFL numbers and inner iteration numbers.

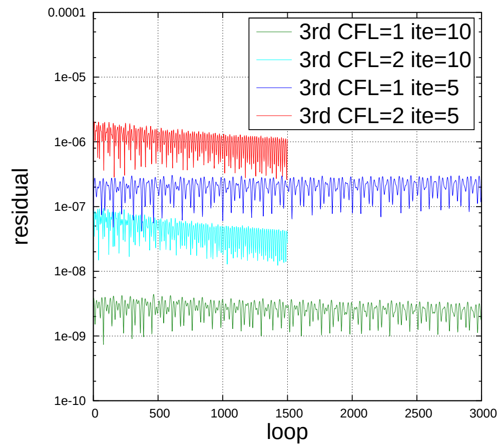


Fig. 5: Resudial decreasing hisotries in the implcit time integration case for various CFL number and inner iteration numbers.

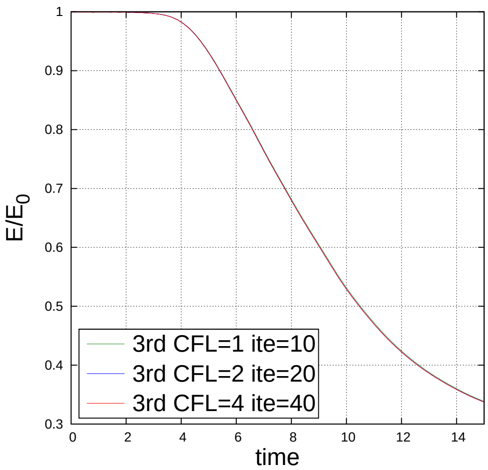
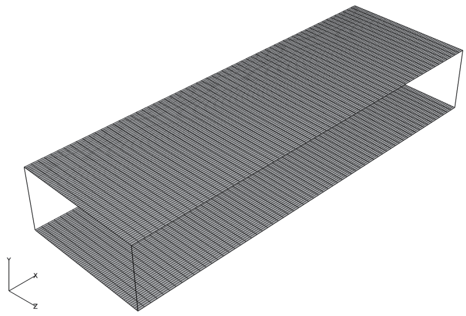
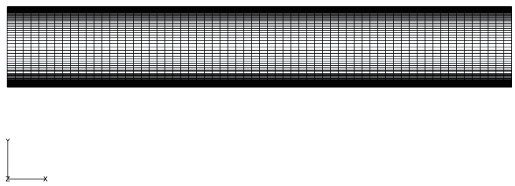



Fig. 6: Kinetic energy history in the implicit time integration case for vaious CFL numbers with sufficient inner iterations.



(a)overview



(b) $+z$ view

Fig. 7: Computaional domain employed in the turbulent channel flow computation.

一方，エンストロフィーがピークを迎えた後の減衰の勾配は，空間 3 次精度よりも空間 4 次精度の方が大きい．これも，高波数に対する dissipation の割合が原因と考えられる．

続いて，陰解法を用いた計算を行った．空間 3 次精度 DG-CRI スキームを用いた．図 4 に，クーラン数を 1 と 2，内部反復数を 5 と 10 としたときの運動エネルギーの履歴を示す．クーラン数の増加，内部反復数の減少にともない，解の遅れが生じたが，クーラン数 1 で内部反復数 10 とすれば解の遅れはほとんど無かった．また，図 5 に，内部反復終了時の密度残差を示す．解の遅れと同様に，クーラン数の増加，内部反復数の減少にともない，残差の低下率は悪化した．したがって，解の遅れは時間刻み幅が大きいことによる時間解像度の低下ではなく，残差の低下が十分でなく定式どおりの時間精度が得られていないことが原因であると考えられる．実際，図 6 に示す様に，内部反復数を十分とれば解の遅れはほぼなくなった．したがって，クーラン数が大きいときに内部反復数が小さい状態で解の遅れを緩和するためには，収束加速が必要であると考えられる．

### 3.2 チャネル乱流

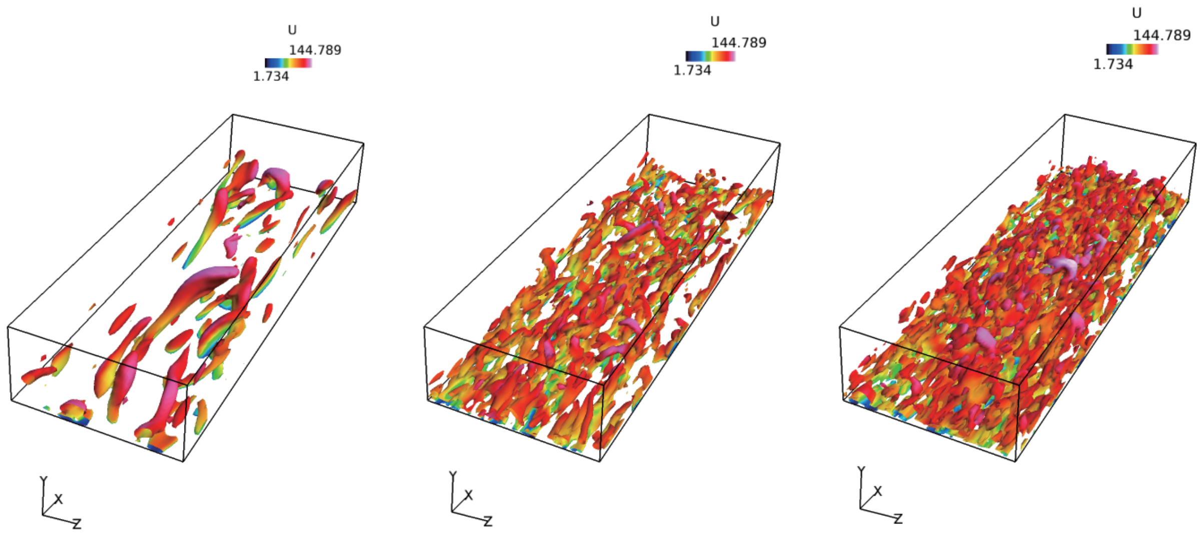
支配方程式は Navier-Stokes 方程式であり，SGS モデルを用いない implicit LES で計算を行った．計算領域は

$$-2\pi\delta \le x \le 2\pi\delta,\ -\delta \le y \le \delta,\ -\frac{2}{3}\pi\delta \le z \le \frac{2}{3}\pi\delta,$$

である．ただし，$\delta$ はチャネル半幅であり，本解析では $\delta = 10^{-3}$ とした．計算格子は図 7 に示すように $64 \times 64 \times 64$ の六面体格子 (総格子数 262144) をもちいた．$x, z$ 方向は格子間隔が $\Delta x^+ = 35.4$, $\Delta z^+ = 11.8$ の等間隔であり，$y$ 方向は最小格子幅を $\Delta y^+_{\min} = 2$ の不等間隔格子である．境界条件は $y_{\min}$ と $y_{\max}$ で壁面境界条件を課し，その他の境界は周期境界条件を課した．チャネル乱流の解析では，壁面摩擦によりエネルギーが消耗されるため流れを持続させるために生成項を加えなくてはならない．本研究では，各時間ステップでの壁面剪断力 $\tau_w$ を計算し，生成項を

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\tau_w}{\delta} \\ 0 \\ 0 \\ u\frac{\tau_w}{\delta} \end{pmatrix},$$

とした．初期条件は，計算時間短縮のために他の計算コードによる結果から補間して与えた．主流条件は，マッハ数 $M_\infty = 0.3$，レイノルズ数 $Re_\tau = 180$(代表長さが $\delta$，代表速度が摩擦速度 $u_\tau$) とした．時間積分には陽解法として 2 段階 TVD Runge-Kutta 法を用い，クーラン数を




(a)2nd order (b)3rd order (c)4th order

Fig. 8: Computed isosurface of Q value and streamwise velocity for the turbulent channel flow.

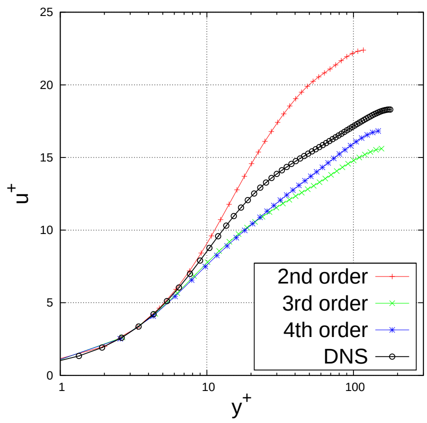



Fig. 9: Computed velocity profiles.

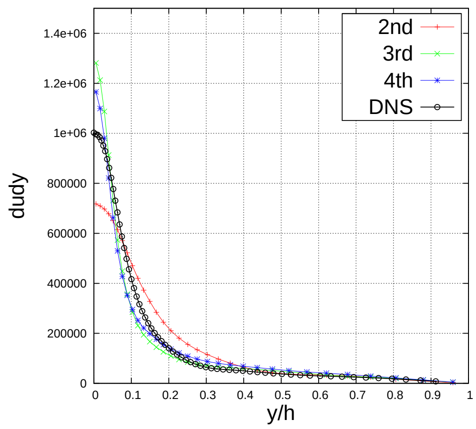



Fig. 10: Computed streamwise velocity gradient in wall-normal direction obtained.

0.1 とした．陰解法による解析は今後行うが，現段階では行っていない．計算には東北大学流体科学研究所のスパコンを用い，160 用いた MPI ライブラリによる並列計算を行った．領域分割には METIS を用いた．

図 8 に，あるスナップショットにおける Q 値の等値面と主流方向流速を示す．空間精度が向上するにつれ，乱流境界層内の細かい渦構造を捉えることができている．図 11 に，乱流境界層内の速度の統計量を，Moser らの DNS の結果と合わせて示す．ただし，統計は空間方向だけでなく，時間方向にもある程度平均してとっている．空間精度が向上するにつれて，DNS の結果に近づいていった．しかし，空間 4 次精度でも DNS の結果と良く一致する結果を得ることはできなかった．これは，壁面の剪断力 $\tau_w$ を正しく算出していないためと考えられる．空間 3 次精度と空間 4 次精度では $\tau_w$ を DNS の結果より大きく評価してしまったため，無次元距離 $y^+$ が大きく，無次元速度 $u^+$ が小さく評価されてしまい，DNS の結果から外れている．実際，図??に示すように壁面の速度勾配が DNS の結果よりも大きく算出されている．DNS とよい一致を得るには，より細かい格子を用いる必要があると考えられる．また，図??にレイノルズ応力を示す．$u^+$ と同様に空間精度向上にともない DNS の結果に近づいたがよい一致を得ていないだけでなく，壁面から離れた領域で統計量が直線になっていない．これは，統計に用いるデータ量が足りないことを示している．この領域で直線となるためには，時間方向にさらに細かく統計をとる必要がある．

## 4.　結論

高次精度 DG-CRI スキームを用いて非定常流解析を行い，LES 解析への展開の可能性を調査した．Taylor-Green 渦の解析では，陽解法と陰解法の両者による解析をそれぞれ行った．陽解法の解析では，空間精度が向上するにつれて運動エネルギーを一定に保てる時間が長くなり，細かい渦まで捉えることができた．陰解法による解析では，クーラン数が大きく，内部反復数が小さくなるにつれて解の遅れが生じたが，クーラン数 1 内部反復数 10 で陽解法による結果とよい一致を示した．解の遅れの原因は，内部反復による残差低下率が低いことにあり，小さい内部反復数で解の遅れを緩和するには収束加速が必要である．チャネル乱流の解析では，陽解法による解析を行った．空間精度が向上するにともない他の DNS の結果に近づいたが，よい一致を得ることができなかった．今後は，細かい格子を用いて陽解法によるチャネル乱流の解析を行った上で，陰解法 CRI スキームの乱流統計量への影響を調査する．

## 参考文献

(1) B. Cockburn, G.E. Karniadakis, and C-W. Shu, “The Development of Discontinuous Galerkin Meth-

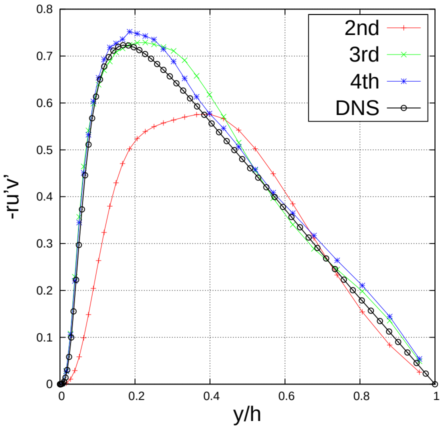



Fig. 11: Computed Reynolds stress profiles.

ods". *Theory,Computation and Application*, pp3-50, 1999.

(2) K. Yasue, "Study of High Order Discontinuous Galerkin Finite Element CFD solver for Aerospace Application". phD thesis, Department of Aerospace Engineering, Tohoku University, 2010.

(3) 淺田啓幸, 保江かな子, 荻野要介, 澤田惠介, "翼まわり定常計算に向けた空間 4 次精度非構造格子法の構築", 第 46 回流体力学講演会/第 32 回航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム 講演論文集, JSASS-2014-2102-A, 2014.

(4) H. Asada, Y. Ogino, K. Yasue and K. Sawada, "A Third Order Accurate Cellwise Relaxation Implicit Discontinuous Galerkin Scheme for Unstructured Hybrid Meshes", submmitted to *Mathematical Problems in Engineering*

(5) H. Asada, K. Yasue, Y. Ogino and K. Sawada, "A Fourth Order Accurate Cellwsie Relaxation Implicit Discontinuous Galerkin Scheme for Solving RANS Equations", AIAA Paper 2015-0057, pp. 1-14, 2015.

(6) F. Bassi, A. Crivellini, S.Rebay and M.svaini, "Discontinuous Galerkin solution of Reynolds-averaged Navier-Stokes and k-$\epsilon$ turbulence model equation". *Computers & Fluid*, Vol.34, pp.507-540, 2005.

(7) Y. Wada and M-S. Liou, "S flux splitting scheme with high-resolution and robustness for discontinuities", AIAA Paper 94-0083, 1994.

(8) T. C. Warburton, "Spectral/hp Methods on Polymorphic Mult-Domeins : Algorithms and Applications". phD thesis, Center for Fluid Mechanics, Division of Applied Mathematics, Brown University, Providence, RI, 1998.