臨界帯方程式の数値解法

Numerical Solution of Critical-Band Equation

○　木田重雄，同大, 京田辺市多々羅都谷 1-3, E-mail：skida@mail.doshisha.ac.jp
Shigeo Kida, Doshisha University, Tatara-Miyakodani 1-3, Kyotanabe-shi, Japan

歳差回転球内の定常流には、歳差が極めて強い、あるいは弱い極限で、境界層を突き破る臨界層が現れる。この臨界層の流れ場は、独立変数が２つの偏微分方程式で変域は半無限平面である。これを差分法で解くには、１次の後退差分を用いるなど特別な工夫がいる。差分スキームと得られた解について議論する。

1.　歳差回転球内部の流れ

自転軸と歳差軸が直交している歳差回転球内の非圧縮性粘性流体の運動を考える。自転角速度を Ω_s、歳差角速度を Ω_p とする。この系の流れ状態は、２つの無次元パラメター、すなわちレイノルズ数 $Re = a^2\Omega_s/\nu$ とポアンカレー数 $Po = \Omega_p/\Omega_s$、で規定される。ここに、a は球の半径、ν は流体の動粘性係数である。

自転軸を x 軸、歳差軸を z 軸とする歳差回転座標系 (x, y, z) で、非圧縮粘性流体の運動は、長さと時間をそれぞれ球の半径 a と自転角速度の逆数 $1/\Omega_s$ で規格化すると、ナヴィエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p + 2Po\widehat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{u} - \frac{1}{Re}\nabla^2\boldsymbol{u} = 0 \quad (1)$$

と連続の式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \quad (2)$$

および球面上での境界条件

$$\boldsymbol{u} = \widehat{\boldsymbol{x}}\times\widehat{\boldsymbol{r}} \qquad (|\boldsymbol{r}| = 1 \text{ で}) \quad (3)$$

で記述される。ここに、$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ は速度場、$p(\boldsymbol{r}, t)$ は圧力場、$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル、t は時間、∇ は $\boldsymbol{r}$ についての微分演算子である。また、x, y, z 軸、および動径方向の単位ベクトルをそれぞれ $\widehat{\boldsymbol{x}}$、$\widehat{\boldsymbol{y}}$、$\widehat{\boldsymbol{z}}$、$\widehat{\boldsymbol{r}}$ と表す。

2.　弱歳差および強歳差の極限

ここでは、歳差が極めて弱い場合と、逆に、歳差が極めて強い場合における定常流の空間構造を調べる。

歳差が弱い（$Po \ll 1$, $Re \gg 1$, $RePo^2 \ll 1$）場合は、文献 (1) に示したように、南北緯度が 30^o の円の近傍（臨界帯とよぶ。Fig. 1 の AA', BB'）を除いて球全体に広がる厚さ $O(\delta_W)$ の薄い境界層が形成される。ここに、

$$\delta_W = Re^{-1/2} \ (\ll 1) \quad (4)$$

である。この境界層と臨界帯を除いて、流れは球面とほぼ同じ角速度で回転する（回転軸は自転軸から少しずれている）剛体回転流になっており、剛体回転流からのずれは $O(Po)$ である。

一方、歳差が強い場合（$Po \gg 1$, $PoRe \gg 1$）は文献 (2) に示したように、歳差軸に垂直な大円の近傍（これも臨界帯とよぶ。Fig. 2 の CC'）を除いて球面全体に広がる厚さ $O(\delta_S)$ の薄い境界層が形成される。ここに、

$$\delta_S = (RePo)^{-1/2} \ (\ll 1) \quad (5)$$

である。この境界層と臨界帯を除いて、流れはほぼ静止しており、速さは $O(Po^{-1})$ である。

3.　臨界帯流

上述のように、歳差が弱い極限および強い極限のいずれの場合にも臨界帯が現れるが、そこでの流れ場の構造

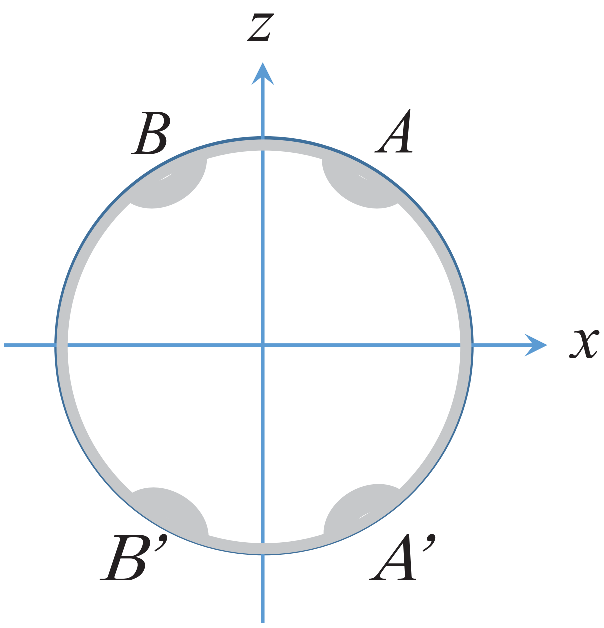


Fig. 1: The structure of steady flow in a rotating sphere with weak precession. The thin boundary layer of thickness $O(\delta_W)$ is interrupted by two critical bands (designated by AA' and BB' of which the depth is of $O(\delta_W^{4/5})$ and the width is of $O(\delta_W^{2/5})$. The x- and z-axes prepresent the spin and precession axes, respectively.

は同一の微分方程式

$$\left[\frac{\partial^3}{\partial\xi^3} - 2\mathrm{i}\left(\eta\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right]\frac{\partial F}{\partial\xi} = 0$$
$$(-\infty < \eta < \infty,\ 0 < \xi < \infty) \quad (6)$$

と境界条件

$$F(\eta, 0) = 0 \qquad (-\infty < \eta < \infty) \quad (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial\xi}(\eta, 0) = 1 \qquad (-\infty < \eta < \infty) \quad (8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial\xi}(\eta, \xi) \to 0 \qquad (-\infty < \eta < \infty,\ \xi\to\infty) \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\eta\partial\xi}(0-, \xi) = \frac{\partial^2 F}{\partial\eta\partial\xi}(0+, \xi) \quad (0 \le \xi < \infty) \quad (10)$$

で記述される。ただし、変数の意味は２つの場合で異なっている。

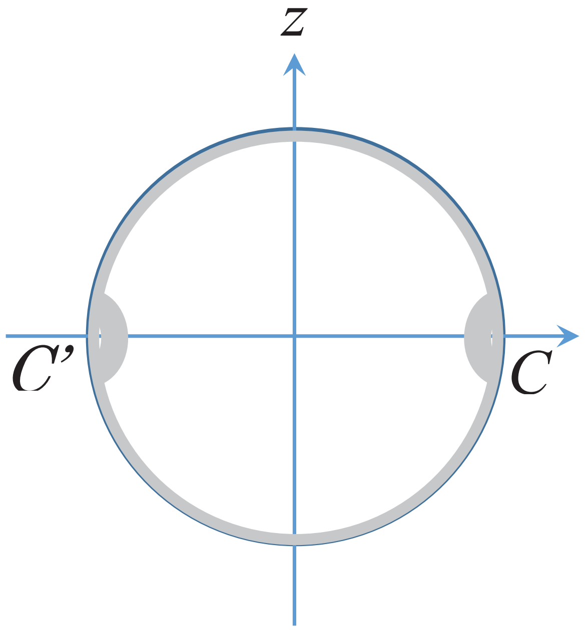


Fig. 2: The structure of steady flow in a rotating sphere with strong precession. The thin boundary layer of thickness $O(\delta_S)$ is interrupted by a critical band (designated by CC' of which the depth is of $O(\delta_S^{4/5})$ and the width is of $O(\delta_S^{2/5})$. The x- and z-axes prepresent the spin and precession axes, respectively.

(i) 弱歳差の場合

x 軸を極軸、(x, y) 面を方位角の基準面とする球極座標を (r, θ, ϕ)、速度と圧力のこの座標系における成分を (u_r, u_θ, u_ϕ) および p とすると、

$$\boldsymbol{u} = \mathrm{Real}(\boldsymbol{v}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}), \tag{11}$$

$$p = \mathrm{Real}(q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) \tag{12}$$

と書ける。

このとき、Fig. 1 で右の臨界帯 AA' では、

$$r = 1 - \delta_W^{4/5}\left(\tfrac{4}{3}\right)^{1/4}\xi, \tag{13}$$

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2} + \delta_W^{2/5}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\eta, \tag{14}$$

$$v_r = (Po/\delta_W)\,\delta_W^{2/5}\widetilde{v}_\xi, \tag{15}$$

$$v_\theta = (Po/\delta_W)\,\widetilde{v}_\eta, \tag{16}$$

$$v_\phi = (Po/\delta_W)\,\widetilde{v}_\phi, \tag{17}$$

$$q = (Po/\delta_W)\,\delta_W^{4/5}\widetilde{q} \tag{18}$$

なる変換で、速度場と圧力場は、

$$\widetilde{v}_\xi = -\left(\frac{3}{4}\right)^{3/4}\mathrm{i}a\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}\frac{\partial F^*}{\partial\eta}, \tag{19}$$

$$\widetilde{v}_\eta = \frac{3}{4}\mathrm{i}a\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}\frac{\partial F^*}{\partial\xi}, \tag{20}$$

$$\widetilde{v}_\phi = -\frac{3}{4}a\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}\frac{\partial F^*}{\partial\xi} \tag{21}$$

および、

$$q = -\left(\frac{27}{4}\right)^{3/4}a\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}F^* \tag{22}$$

と書ける。ここに、$a = 0.3797\cdots$ と $b = 0.09831\cdots$ は定数で、* は共役複素数を表す。

(ii) 強歳差の場合

一方、強歳差の場合は、z 軸を極軸、(z, x) 面を方位角の基準面とする球極座標を (r, θ, ϕ) とすると、速度場と圧力場は弱歳差の場合と同じ形の式 (11) と (12) で表される。しかし、臨界帯での局所変数の定義は弱歳差の場合とは異なり、

$$r = 1 - \delta_S^{4/5}\xi, \tag{23}$$

$$\cos\theta = \delta_S^{2/5}\eta, \tag{24}$$

$$v_r = \delta_S^{2/5}\widetilde{v}_\xi, \tag{25}$$

$$v_\theta = \widetilde{v}_\eta, \tag{26}$$

$$v_\phi = \widetilde{v}_\phi, \tag{27}$$

$$q = \delta_S^{4/5}\widetilde{q} \tag{28}$$

(29)

なる変換で、速度場と圧力場は、

$$\widetilde{v}_\xi = -\mathrm{i}\ \mathrm{Real}\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\right), \tag{30}$$

$$\widetilde{v}_\eta = \mathrm{i}\ \mathrm{Real}\left(\frac{\partial F}{\partial\xi}\right), \tag{31}$$

$$\widetilde{v}_\phi = \mathrm{i}\ \mathrm{Imag}\left(\frac{\partial F}{\partial\xi}\right) \tag{32}$$

(33)

および、

$$\widetilde{q} = -2\mathrm{i}\ \mathrm{Imag}\left[F(\eta,\xi) - F(\eta,\infty)\right] \tag{34}$$

と表される。

4.　臨界帯方程式の数値解

臨界帯方程式 (6) は ξ に関して 3 階、η に関して 1 階の線形偏微分方程式である。係数が定数ではないため解析解は求まりそうにないので、差分法で数値的に解くことを考える。積分領域は半無限平面 $(-\infty < \eta < \infty, 0 < \xi < \infty)$ であるが、解には $\eta = 0$ に関して対称性があるので、$\eta > 0$ に限り、十分大きな矩形領域 $(0 < \eta \leq \eta_{\max}, 0 \leq \xi \leq \xi_{\max})$ で計算する。η 方向には 1 次の後退差分、ξ 方向には各微分階数に対応する最低次の中心差分を用いる。η 方向の格子点を $\eta_j = (j - \frac{1}{2})\Delta\eta\ (j = 1, 2, \cdots, M)$ に選ぶ。ここに、M は格子数で $\Delta\eta = \eta_{\max}/(M+1)$ はきざみ幅である。また、ξ 方向の格子数を N、きざみ幅を $\Delta\xi = \xi_{\max}/N$ とする。

微分方程式 (6) に 1 次の後退差分を適用すると、$j = 2, 3, \cdots, M$ に対し、

$$\left(\frac{\mathrm{d}^4F}{\mathrm{d}\xi^4}\right)_j - \mathrm{i}(2j-1)\Delta x\left(\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\xi^2}\right)_j + \frac{2\mathrm{i}}{\Delta x}\left[\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi}\right)_j - \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi}\right)_{j-1}\right] = 0 \tag{35}$$

を得る。特に、$j = 1$ に対しては、

$$\left(\frac{\mathrm{d}^4F}{\mathrm{d}\xi^4}\right)_1 - \mathrm{i}\Delta x\left(\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\xi^2}\right)_1 + \frac{2\mathrm{i}}{\Delta x}\left[\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi}\right)_1 - \left(\frac{\mathrm{d}F^*}{\mathrm{d}\xi}\right)_1\right] = 0 \tag{36}$$

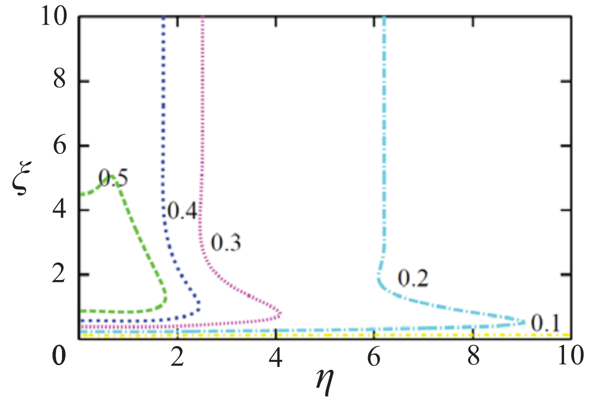


Fig. 3: Contours of the real part of $F(\eta,\xi)$ which is symmetric with respect to η.

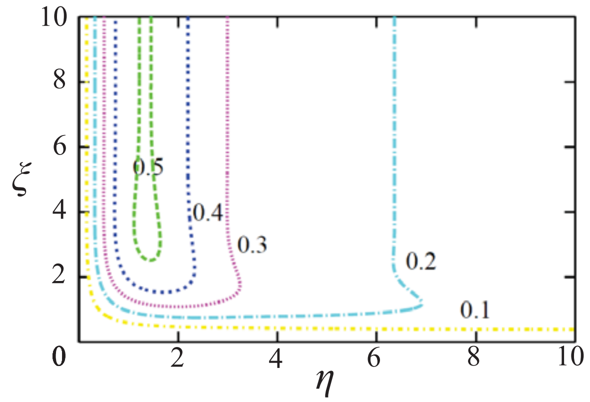


Fig. 4: Contours of the imaginary part of $F(\eta,\xi)$ which is anti-symmetric with respect to η.

である。

境界条件 (7)–(9) は、それぞれ、

$$F_j(0)=0 \qquad (j=1,2,\cdots,M), \tag{37}$$

$$\frac{\mathrm{d}F_j}{\mathrm{d}\xi}(0)=1 \qquad (j=1,2,\cdots,M), \tag{38}$$

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{\mathrm{d}F_j}{\mathrm{d}\xi}(\xi)\to 0 \qquad (j=1,2,\cdots,M) \tag{39}$$

となる。４つめの境界条件 (10) は、第１格子点での式 (36) の第３項で表されている $\eta_0=-\frac{1}{2}\Delta\eta$ での後退差分に等しく、自動的に満たされている！

$M=200$, $N=200$, $x_{\max}=10.05$, $y_{\max}=10$ と選んで得た複素関数 $F(\eta,\xi)$ の実部と虚部をそれぞれ Fig. 3 と Fig. 4 に示す。このときの空間きざみ幅は $\Delta x=0.05$, $\Delta y=0.05$ である。

臨界帯の流れ場は、この数値解を、弱歳差の場合は、式 (19)–(22) に、また、強歳差の場合は、式 (30)–(34) に代入して得られる。

弱歳差の場合の速度場を Fig. 5 に、８つの子午面断面 ($\phi+b=0$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, π, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$) 上で示す。一方、強歳差の場合は、速度場も圧力場も $\sin\phi$ に比例するので、$\phi=\frac{3}{2}$ 面における速度場を Figs. 6 と 7 に示す。いずれの場合にも、らせん状の渦構造が観察される。

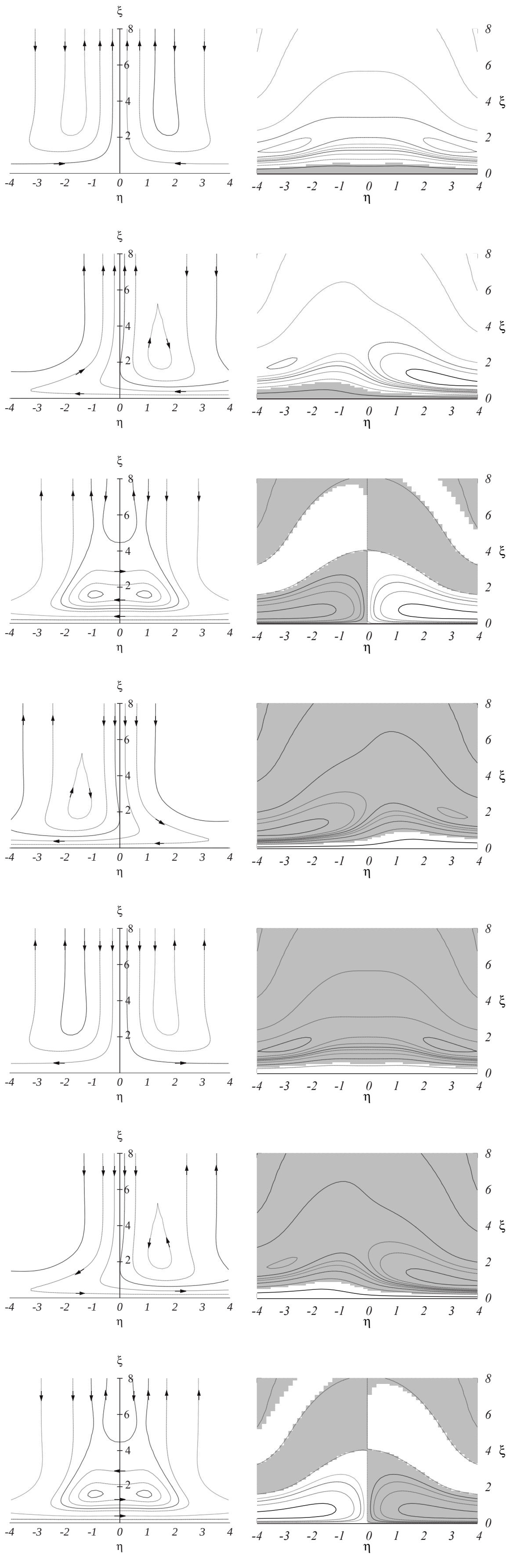
5. 今後の課題

本稿では、歳差回転球内の臨界帯流を記述する偏微分方程式の数値解法について考察した。この微分方程式は線形で、２つの独立変数に関しそれぞれ１階と３階が最高階微分でり、一見簡単そうに見えるが、実は、独立変数のひとつ（η）の原点での境界条件 (10) が特殊であるため、数値解法は意外とむずかしい。ここでは、この変数についての１階微分を１次後退差分を用いることによって解を得ることに成功した。より高精度の差分スキームで計算するため、この境界条件を満足する高次の差分スキームを模索中であるが未だ見つかっていない。今後の課題である。

参考文献

(1) Kida, S. , “Steady flow in a rapidly rotating sphere with weak precession,” J. Fluid Mech., **680**, (2001), 150-193.

(2) 木田重雄, “歳差回転球内流れの定常流–強歳差の極限,” 日本流体力学会年会２０１５講演論文集, (2015), 115.



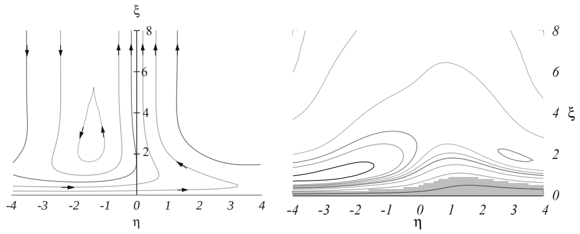


Fig. 5: Streamlines (left) and contours of $\widetilde{u}_\phi$ (right) on the (η, ξ) planes at $\phi + b = 0$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, π, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$ (from top to bottom). The arrows attached to the streamlines indicate the flow direction, whereas $\widetilde{u}_\phi$ takes the negative values in the shaded regions. Weak precession limit.

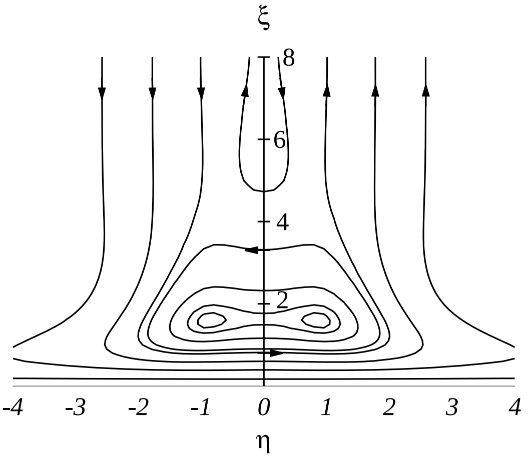


Fig. 6: Streamlines on the (η, ξ) plane at $\phi = \frac{3}{2}\pi$ of the critical band. The arrows indicate the flow direction. Strong precession limit.

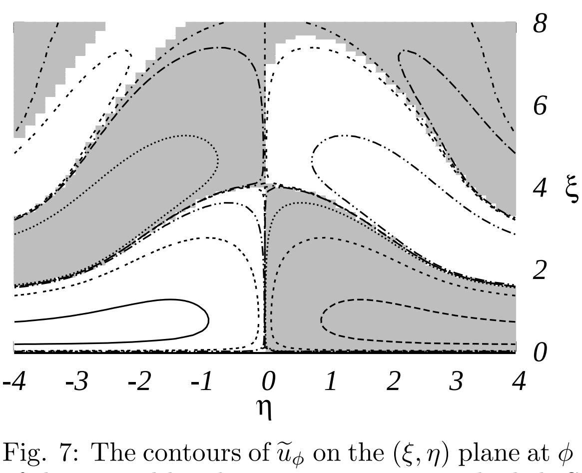


Fig. 7: The contours of $\widetilde{u}_\phi$ on the (ξ, η) plane at $\phi = \frac{3}{2}\pi$ of the critical band. Negative parts are shaded. Strong precession limit.

