

格子幅自己認識型 SGS モデルの平行平板間乱流への適用

Application of the Scale Self-Recognition Mixed SGS Model to a Turbulent Channel Flow

- 木原 瑞希, 東工大院, 〒 152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1, mkihara@navier.mes.titech.ac.jp
 中 吉嗣, 東工大院, 〒 152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1, ynaka@navier.mes.titech.ac.jp
 福島 直哉, 東大院, 〒 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1, fukushima@frcer.t.u-tokyo.ac.jp
 志村 祐康, 東工大院, 〒 152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1, mshimura@navier.mes.titech.ac.jp
 店橋 護, 東工大院, 〒 152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1, mtanahas@mes.titech.ac.jp
 Mizuki Kihara, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo
 Yoshitsugu Naka, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo
 Naoya Fukushima, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo
 Masayasu Shimura, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo
 Mamoru Tanahashi, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo

A static test and large eddy simulations (LES) have been performed in a turbulent channel flow at $Re_\tau = 400$ to validate the applicability of the scale self-recognition mixed SGS (SSRM) model. The SSRM model determines the model coefficient C_S dynamically by the ratio of the filter width to the Kolmogorov length Δ/η predicted from the resolved scale quantities. Results from the SSRM model are compared with the filtered DNS data and the data obtained by the Smagorinsky model with the van Driest damping function (SMVD). In the static test, the SSRM model is capable of giving both positive and negative contributions of the GS-SGS energy transfer while the SMVD yields only the positive contribution. Through the dynamic test, the SSRM model employs no wall function, and it gives predictions of the velocity fluctuations as good as the SMVD.

1. 緒論

近年, 計算機技術の発達によって, 実際の製品設計の場で Large Eddy Simulation (LES) が多く利用されている。LES では, フィルター操作を施された支配方程式に基づき格子スケール (Grid Scale, GS) 以上の運動のみを解像し, 格子幅未満の小スケール (Sub-Grid Scale, SGS) 運動は SGS モデルによって考慮する。最も広く用いられている基本的な SGS モデルとして, Smagorinsky モデル⁽¹⁾があるが, そのモデル定数 (C_S) は流れ場によって異なることが知られている。モデル定数 C_S をスケール相似の仮定に基づいて動的に決定する Dynamic Smagorinsky モデル⁽²⁾も広く用いられるが, モデル係数がしばしば負値をとるため計算が不安定になりやすいという問題点が指摘されている。小林ら⁽³⁾は乱流中の秩序構造を考慮して, 速度勾配テンソルの第二不変量を用いてモデル係数を決定する Coherent Structure モデルを提案している。

福島ら⁽⁴⁾は乱流の GS-SGS 間エネルギー輸送に着目し, 上述の SGS モデルによる GS-SGS 間エネルギー輸送の予測値は, いずれもフィルター幅とコルモゴロフスケールの比である Δ/η に依存することを明らかにした。さらに, 福島ら⁽⁴⁾は乱流の階層構造に基づき, GS 成分から Δ/η を予測しモデル係数を動的に決定する, 格子幅自己認識型 (Scale Self-Recognition Mixed, SSRM) SGS モデルを提案した。一様等方性乱流において, SSRM モデルは GS-SGS 間エネルギー輸送を良く予測することを示した。また, SSRM モデルは一様等方性乱流の動的評価においても, Smagorinsky モデルや Bardina モデル⁽⁵⁾に対して DNS 結果と整合性の高い結果を与えることが確認されている⁽⁶⁾。加えて, SSRM モデルはこれまでに乱流平面噴流に適用され, 平均せん断を有する流れ場においても, 静的評価で GS-SGS エネルギー輸送を適切な予測値を与えること, 動的評価では瞬時速度場や乱流統計量分布の良い予測値を得ることが示されている⁽⁷⁾。

本研究では, SSRM モデルの適用性をさらに向上させるため, 平行平板間乱流において SSRM モデルの静的及び動的評価を行い, SSRM モデルの壁乱流における有効性を明らかにすることを目的とする。

2. 格子幅自己認識型 SGS モデル

LES ではフィルター操作を施された運動量保存式の SGS 応力 τ_{ij} に SGS モデルを導入する必要がある。SGS 応力は以下のように3つの項に分解できることが知られており, L_{ij} , C_{ij} および R_{ij} はそれぞれ Leonard 項, cross 項, Reynolds 項と呼ばれている。

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= (\overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}) \\ &= L_{ij} + C_{ij} + R_{ij}\end{aligned}\quad (1)$$

$$L_{ij} = \overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad (2)$$

$$C_{ij} = \overline{u'_i u'_j} + \overline{u_i u'_j} \quad (3)$$

$$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \quad (4)$$

ここで, $\overline{u_i}$ は速度の GS 成分, u'_i は速度の SGS 成分を表す。格子幅自己認識型 SGS モデル⁽⁴⁾において, SGS 応力 τ_{ij} は以下の式で表される。

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= (\overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}) + (\overline{u_i} \overline{u_j} + \overline{u_i} \overline{u_j} - 2\overline{u_i} \overline{u_j}) \\ &\quad - 2(C_S \Delta)^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij}\end{aligned}\quad (5)$$

$$C_S = C_\infty (1 - \alpha e^{-\beta(\Delta/\eta)}) \quad (6)$$

$$\frac{\Delta}{\eta} = a \left(\frac{2\Delta^6 |\overline{S}| \overline{S}_{ij} \overline{S}_{ij}}{\nu^3} \right)^b \quad (7)$$

ここで \overline{S}_{ij} は GS 成分のひずみ速度テンソルである。また, 式 (6), (7) 中の α , β および a , b は, 一様等方性乱流の DNS データを用いて決定されるモデル定数である⁽⁴⁾。式 (1) 中の各項のうち, Leonard 項はモデル化の必要がなく, 直接計算することができる。また, cross 項には Bardina モデルを用い, モデル定数を 1.0 とした。こ

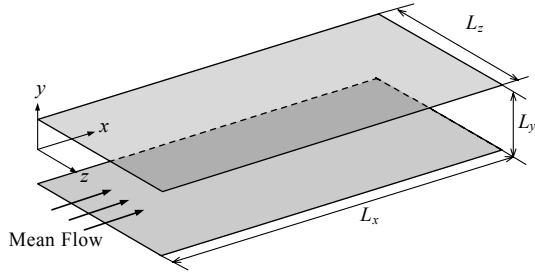


Fig. 1: Schematic of a turbulent channel flow.

Tab. 1: Computational conditions of DNS and LES.

	DNS	LES
$N_x \times N_y \times N_z$	$256 \times 385 \times 192$	$64 \times 193 \times 48$
Δ_x^+	9.817	39.27
Δ_y^+	0.479~5.183	0.963~10.36
Δ_z^+	6.545	26.18
Δt	0.0005	0.002

れにより、モデル定数が Leonard 項の係数と一致し、ガリレイ不変性を満たすモデルとなる。Reynolds 項については、Smagorinsky 型モデルを用いる。福島ら⁽⁴⁾によって、一様等方性乱流において Smagorinsky 係数 (C_S) は定数ではなく Δ/η の関数であり、 Δ/η とともに増加し、0.15 に漸近することが確認されている。この漸近値は一般的に一様等方性乱流に対して用いられる Smagorinsky 係数の値である 0.2 に比べて小さいが、これは、SSRM モデルでは Smagorinsky モデルは Reynolds 項に対してのみのモデルとして評価されているためである。また、高レイノルズ数条件では C_S はレイノルズ数に依存しないことが確認されており、定数 α, β は $222.7 \leq Re_\lambda \leq 344.1$ の一様等方性乱流の DNS データを用いて最小二乗法により $\alpha = 1.1547, \beta = 0.0427$ と決定された。

SSRM モデルでは、GS 成分の値から Δ/η を予測する。これには、局所平衡の仮定に加えて、 C_S がレイノルズ数に依らず Δ/η の関数であることを用いて、式 (7) に示されるように GS 成分の物理量から Δ/η を予測する。ここで、定数 a, b は式 (6) のモデル定数 α, β と同様に、一様等方性乱流の DNS データを用いて最小二乗法によって決定された $a = 0.3328, b = 0.2651$ を用いている。この SSRM モデルによって、 Δ/η に依存することなく GS-SGS 間エネルギー輸送を忠実に予測可能であることが示されている。

3. 平行平板間乱流の DNS および LES

本研究では、 $Re_\tau = 400$ における平行平板間乱流の DNS および LES を行った。図 1 に計算対象の概略図を示す。計算領域の主流方向、壁垂直方向、スパン方向の長さをそれぞれ $L_x = 2\pi\delta, L_y = 2\delta, L_z = \pi\delta$ とした。主流方向とスパン方向にはそれぞれ等間隔格子を、壁垂直方向には式 (8) に示す不等間隔格子を用いた。

$$\frac{y}{\delta} = \frac{\tan^{-1}(\theta_i)}{\tan^{-1}(\pi)} \quad (8)$$

$$\theta_i = 2\pi \frac{i}{N_y - 1}, \quad i = -\frac{N_y - 1}{2}, \dots, \frac{N_y - 1}{2}$$

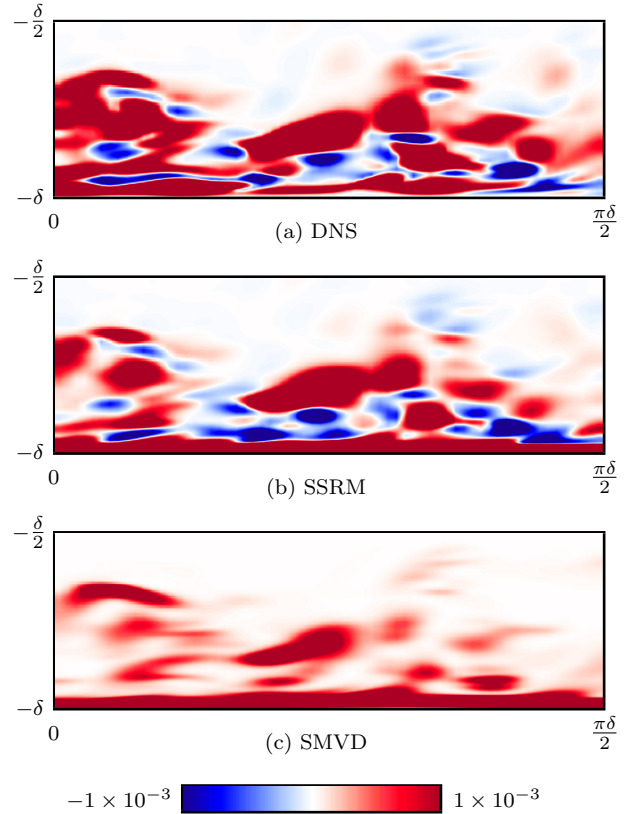


Fig. 2: Distributions of the GS-SGS energy transfer of DNS data (a), predicted by the SSRM model (b) and the Smagorinsky model with van Driest function (c) in an $x - y$ plane ($0 \leq x \leq \pi\delta/2, -\delta \leq y \leq -\delta/2$).

各方向の格子点数 N_x, N_y, N_z 、格子間隔 $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ および時間刻み幅 Δt を表 1 に示す。境界条件は、主流方向とスパン方向を周期境界条件、壁垂直方向を滑りなし境界条件とし、流れは主流方向に一定の圧力勾配によって駆動される。空間の離散化手法は、主流方向とスパン方向にはスペクトル法を、壁垂直方向には粘性項に 2 次精度中心差分法、残りの項には 4 次精度中心差分法を採用した。時間進行法には、Fractional Step 法を採用し、圧力項には 1 次精度 Backward-Euler 法を、残りの項には 2 次精度 Adams-Bashforth 法を用いた。

静的評価および動的評価において不等間隔格子により生じる微分操作とフィルター操作の交換誤差を避けるため、Moin ら⁽⁸⁾ と同様に、フィルター操作は主流方向とスパン方向のみを行った。フィルター操作は波数空間上において行い、式 (9) に示す Gaussian フィルターを用いた。

$$\hat{G}(k) = \exp\left(-\frac{1}{24} \Delta^2 k^2\right) \quad (9)$$

4. SSRM モデルの静的評価

フィルター操作を施された DNS データを用いて、SGS モデルの静的評価を行った。ここでは、フィルタ幅は $\bar{\Delta}_x = 4\Delta_x, \bar{\Delta}_y = 2\Delta_y, \bar{\Delta}_z = 4\Delta_z$ と設定した。式 (5)-(7) に現れる Δ に関しては、 $\Delta = \sqrt[3]{\bar{\Delta}_x \bar{\Delta}_y \bar{\Delta}_z}$ とした。図 2, 3 は、それぞれ壁面近傍領域 ($-\delta \leq y \leq -\delta/2$) と流路中心領域 ($-\delta/2 < y \leq 0$) における、GS-SGS 間エネルギー輸送の $x - y$ 平面における分布を示している。図 2(a), 3(a) は DNS データより求めた GS-SGS 間エネルギー輸送の厳密値、図 2(b), 3(b) は SSRM モデルによる予測

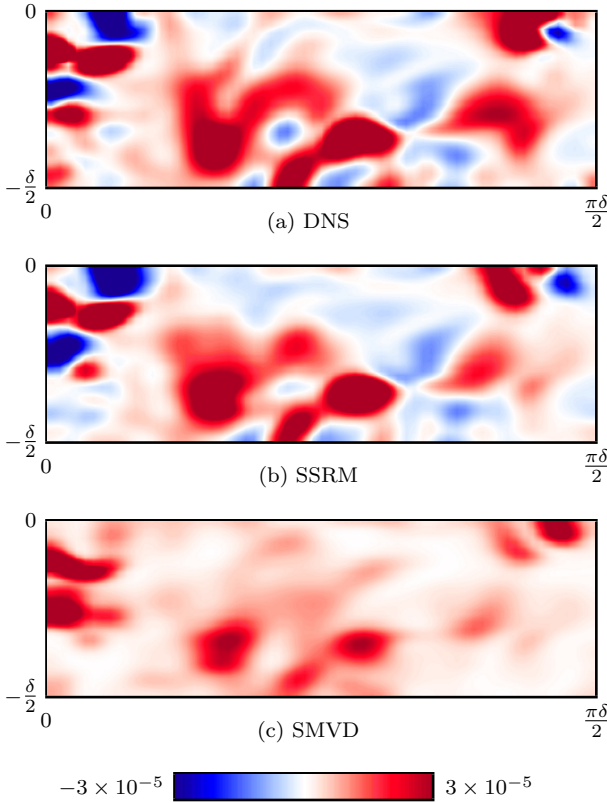
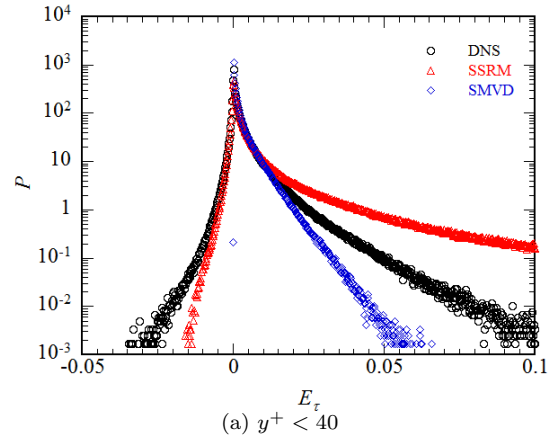


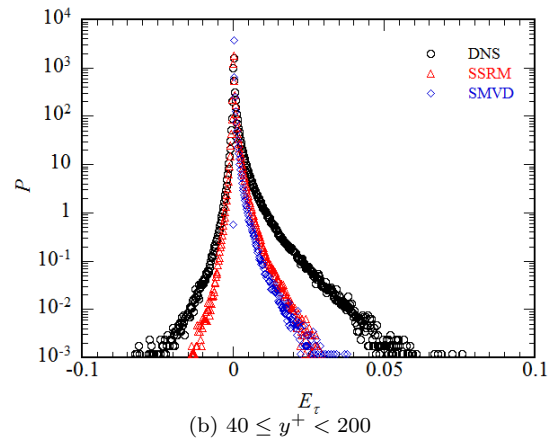
Fig. 3: Distributions of the GS-SGS energy transfer of DNS data (a), predicted by the SSRM model (b) and the Smagorinsky model with van Driest function (c) ($0 \leq x \leq \pi\delta/2$, $-\delta/2 < y \leq 0$).

値, 図 2(c), 3(c) は van Driest 型の減衰関数を用いた Smagorinsky モデルによる予測値である. van Driest 関数を用いた Smagorinsky モデルが forward scatter のみを予測するのに対して, SSRM モデルは forward scatter と backward scatter の両方を予測し, 分布は厳密値と良い一致を示す. 壁面近傍においては, SSRM モデル, Smagorinsky モデルともに, 正の GS-SGS 間エネルギー輸送を過大に予測している.

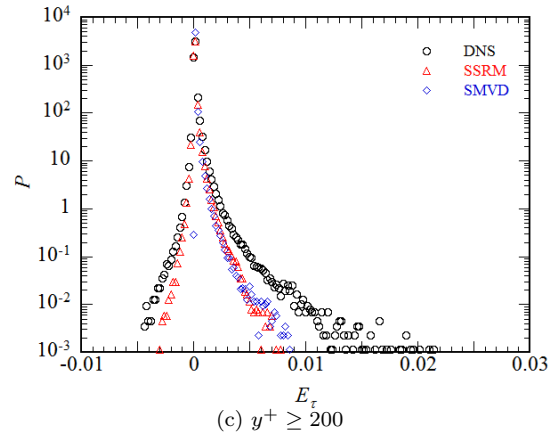
図 4(a)-(c) は, それぞれ $y^+ < 40$, $40 \leq y^+ < 200$, $y^+ \geq 200$ の領域における GS-SGS 間エネルギー輸送の確率密度関数を示している. 図 2, 3 で示された GS-SGS 間エネルギー輸送の空間分布と同様に, van Driest 関数を用いた Smagorinsky モデルは forward scatter のみを予測している. 一方で, SSRM モデルは forward scatter と backward scatter の両方を与えており, 実際の GS-SGS 間エネルギー輸送をより忠実に再現している. $y^+ < 40$ の壁面近傍領域において, SSRM モデルによる GS-SGS 間エネルギー輸送の予測値は, backward scatter については DNS データから得た厳密値と比較的良好一致を示しているが, forward scatter については過大評価している. これは壁面近傍における強い平均せん断により, $|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$ が大きくなるためと考えられる. $40 \leq y^+ < 200$ の領域においては, SSRM モデルと van Driest 関数を用いた Smagorinsky モデルの forward scatter の確率密度分布はおおむね一致しており, どちらも正の GS-SGS 間エネルギー輸送を小さく見積もっている. また, $y^+ \geq 200$ の領域においても, GS-SGS 間エネルギー輸送の絶対値は減少するものの, 同様の傾向を示し, SSRM モデルによる予測は GS-SGS 間エネルギー輸送を概ね正しく予測している.



(a) $y^+ < 40$



(b) $40 \leq y^+ < 200$



(c) $y^+ \geq 200$

Fig. 4: Probability density functions of the GS-SGS energy transfer evaluated by DNS data (a), predicted by the SSRM model (b) and the Smagorinsky model with van Driest function (c).

5. SSRM モデルの動的評価

SSRM モデルの有効性を確かめるために, SSRM モデルを用いた平行平板間乱流の LES を行い, その結果をフィルター操作を施された DNS 結果, および同一の初期場を用いて行った van Driest 関数を用いた Smagorinsky モデルの LES 結果と比較した. ここでは, SSRM モデルについては, SGS 応力を Reynolds 応力項のみで評価したものをを用いた. 図 5(a) は主流方向の平均速度分布を示している. 両モデルともフィルター操作を施された DNS 結果に対して平均流速を過小評価しているが, van Driest

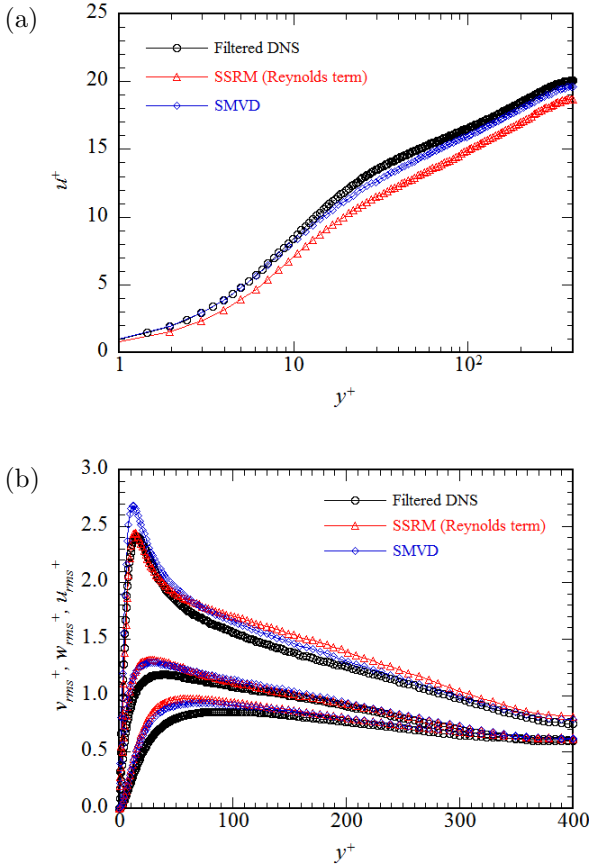


Fig. 5: Profiles of the mean streamwise velocity (a) and RMS of the velocity fluctuations (b) evaluated by the filtered DNS data, the LES data with the SSRM model and the Smagorinsky model with van Driest function.

関数を用いた Smagorinsky モデルがフィルター操作を施された DNS 結果により近い結果を示している。図 5(b) は、主流方向、壁垂直方向およびスパン方向の変動速度の RMS 値の分布を示している。SSRM モデルの u_{rms}^+ は、対数則域では値を過大評価するものの、バッファ領域ではフィルター操作を施された DNS 結果と良い一致を示した。van Driest 関数を用いた Smagorinsky モデルによる LES の u_{rms}^+ は、フィルター操作を施された DNS 結果に対して特にバッファ領域で値を過大評価している。 v_{rms}^+ および w_{rms}^+ は、両モデルとも $y^+ \leq 120$ の領域でフィルター操作を施された DNS 結果に対して値を過大評価しているものの、 $y^+ > 120$ では良い一致を示している。

6. 結論

本研究では、 $Re_\tau = 400$ の平行平板間乱流を対象とし、フィルター幅とコルモゴロフスケールの比を予測し、モデル係数を動的に決定する格子幅自己認識型モデル (SSRM モデル) の静的評価及び動的評価を行った。静的評価において、van Driest 型の減衰関数を用いた Smagorinsky モデルは GS-SGS 間エネルギー輸送の forward scatter のみを予測するのに対して、SSRM モデルは backward scatter を含む GS-SGS 間エネルギー輸送をより忠実に再現可能であることを明らかにした。また動的評価において、SSRM を用いた LES は、平均流速分布を過小評価するものの、速度変動の RMS 値についてはフィルター操作を施された DNS 結果の分布と良く一致することを明

らかにした。SSRM モデルを用いた LES により、減衰関数を用いることなく平行平板間乱流の予測が可能であることを示した。

参考文献

- (1) Smagorinsky, J., "General circulation experiments with the primitive equations," *Mon. Wea. Rev.*, 91 (1963), pp. 99-164.
- (2) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W. H., "A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model," *Phys. Fluids*, A3 (1991), pp. 1760-1765.
- (3) Kobayashi, H., "The subgrid-scale models based on coherent structures for rotating homogeneous turbulence and turbulent channel flow," *Phys. Fluids*, 17 (2005), 045104.
- (4) 福島, 松本, 志村, 小林, 店橋, 宮内, "高レイノルズ数乱流の階層構造に基づく SGS モデル," 日本流体力学学会年会 2012 (2012), 255.
- (5) Bardina, J., Ferziger, J. H., and Reynolds, W. C., "Improved subgrid scale models for large eddy simulation," *AIAA Paper 80* (1980), 1357.
- (6) 福島, 中, 平岡, 志村, 店橋, 宮内, "格子幅自己認識型 SGS モデルによる一様等方性乱流の LES," 日本流体力学学会年会 2015 (2015), 244.
- (7) Matsui, K., Naka, Y., Fukushima, N., Shimura, M., Tanahashi, M., Miyauchi, T., "Static and dynamic tests of the grid-width self-recognizing SGS model in a turbulent plane jet," *ASME-JSME-KSME Joint Fluids Engineering Conference 2015* (2015), 08642.
- (8) Moin, P., Reynolds, W. C., Ferziger, J. H., "Large eddy simulation of incompressible turbulent channel flow," *NASA Technical Reports* (1978), NASA-CR-152190.