乱流における低次元力学系の構築

Construction of low-dimensional dynamical systems in turbulence

○ 清水 雅樹，阪大基, 大阪府豊中市待兼山町 1-3, E-mail : shimizu@me.es.osaka-u.ac.jp
河原 源太，阪大基, 大阪府豊中市待兼山町 1-3
Masaki Shimizu, Graduate School of Engineering Science, Osaka University
Genta Kawahara, Graduate School of Engineering Science, Osaka University

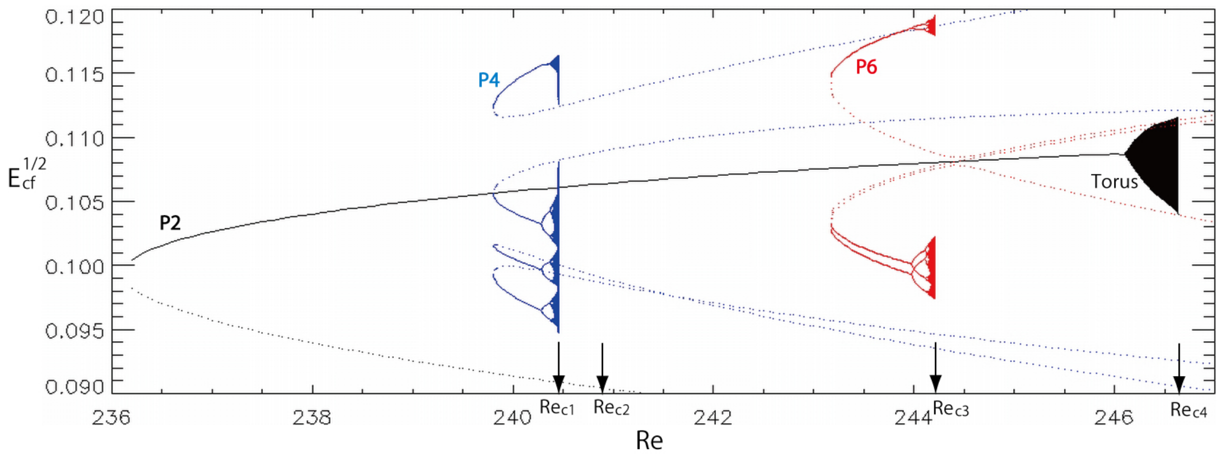


Fig.1: Bifurcation diagram of minimal plane Couette flow for $236 \le Re \le 247$.

1. 緒言

数値流体力学に携わる者としては，計算コストの大幅な削減は切に願うことである．散逸系の解の最終的な軌道は，系の次元より低次元の部分空間（慣性多様体）に留まることが期待される [1]．本講演論文では，平面クエット流における初期の乱流の軌道がごく低次元の部分空間に留まっているという性質から，この部分空間上での低次元近似支配方程式を機械学習を用いて構築する手法を紹介する．

2. システム

反平行に速さ U で移動する 2 枚の平面壁間の非圧縮ニュートン流体を考える．壁の移動方向に x 軸，壁面垂直方向に y 軸をとる．壁面間の距離を $2h$，動粘性係数を ν とし，流れは x, z 方向それぞれに周期 $1.755\pi h, 1.2\pi h$ で周期的であり，壁面では粘着境界条件を満足するとする．このシステムはミニマム平面クエット流と呼ばれる．(詳しくは Kawahara[2] 等を参照．) レイノルズ数は，$Re = \frac{Uh}{\nu}$ と定義される．以下では U, h による無次元量を用いることにする．直接数値計算とニュートン法によって調べた，$236 \le Re \le 247$ における解の分岐図を Fig. 1 に示す [3]．以下では，$Re = 240.4$ 近傍から発生するカオスアトラクタに着目する．

3. 乱流軌道上での２次元写像の構築

$236 \le Re \le 247$ における解の分岐図を Fig. 1 に示す．縦軸にはクロスフローエネルギー $E_{\rm cf} = \frac{1}{V}\int_V (u_y^2 + u_z^2) dV$ の時系列の極大値を用いている．実線や塗りつぶしは安定解であり，点線は不安定解である．Fig. 2 は 4 周期解 (青色) から周期倍分岐によってカオスアトラクタが生じる部分の拡大図である．以下では，このカオスアトラクタ (以下，乱流) の軌道について述べる．Fig. 3 は乱流発生直後付近である $Re = 240.40$ での軌道を，エネルギー注入率 I とエネルギー散逸率 D を用いて示したものである．図中の矢印は軌道の進行方向を表す．I が増加するときに，軌道と断面 $I = 2.55$(ポアンカレ断面) との交点での物理量について，D と運動エネルギー E と流れ方向エネルギー E_{st} を用いたものを Fig. 4 に示す．$I = 2.55$ は 4 周期 (の上分枝) 解が周期内に 1 回だけ通過するように設けた断面である．Fig. 4 より，このポアンカレ断面上での集合は 1 次元の曲線上に存在しているように見える．このため，この乱流軌道の有効次元数は低次元であると思われる．仮にポアンカレ断面での集合が厳密に 1 次元であるとすると，その曲線に沿った位置だけに依存する関数の写像の反復による集合で表現できる．直接数値計算の結果を写像のサンプルとして与え，機械学習によってこの写像の近似関数を求めることを考える．

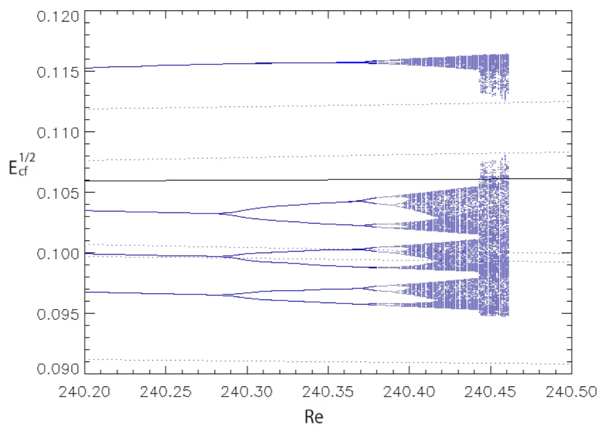


Fig. 2: Bifurcation diagram around $Re = 240.4$.

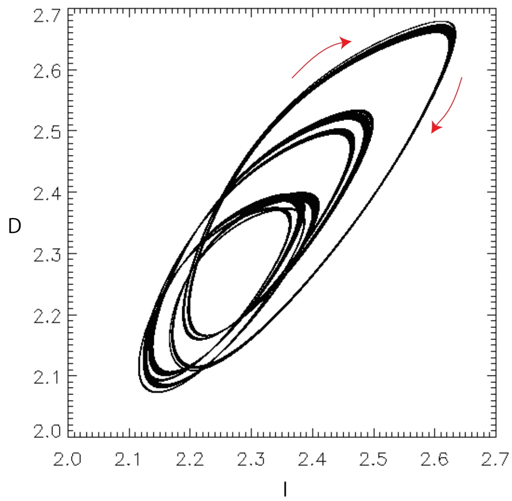


Fig. 3: Projection of the turbulent trajectory onto the plane of input energy rate I and dissipation rate D. $Re = 240.40$.

Fig. 5 に $Re = 240.40, 240.44, 240.45$ でのポアンカレ断面を D と E を用いて示す．□のシンボルが直接数値計算によるサンプル点であり，400 点ある．ここでは，サンプル点の時系列を $D_n, E_n (n = 1, 2, \cdots, 400)$ として，$D_{n+1} = f(D_n, E_n), E_{n+1} = g(D_n, E_n)$ となる関数 f と g についての近似関数を求める (回帰分析) ことにする．入力を 2 変数にするのは，Fig. 5 からも分かるように，例えば同一の D でも複数の点があることや，これらの軌道が厚みを有している場合 (例えば無数の曲線の集合) でも適応できる可能性のためである．この回帰分析は Kernlab[4] の kqr(Kernel Quantile Regression) を用いて行った．Fig. 5 の赤の点の集合は，回帰分析から得た近似関数による写像のアトラクタである．直接数値計算による軌道と求めた 2 次元写像系のアトラクタはよく一致しているように見える．Fig. 6 は $Re = 240.45$ において $I = 2.3$ に変更したポアンカレ断面である．この断面は 4 周期解が周期内に 4 回横切る断面である.Fig.5(c) と比較して複雑な写像から構成されていると想像できるが，kqr による回帰分析の凡化性能はよい．Fig. 5 のアトラクタは，kqr の代わりに多項式による関数の近似でも再現可能であるが，Fig. 6 は再現不可である．

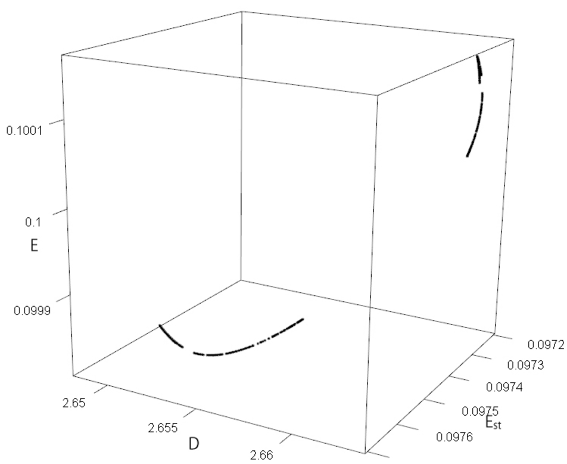
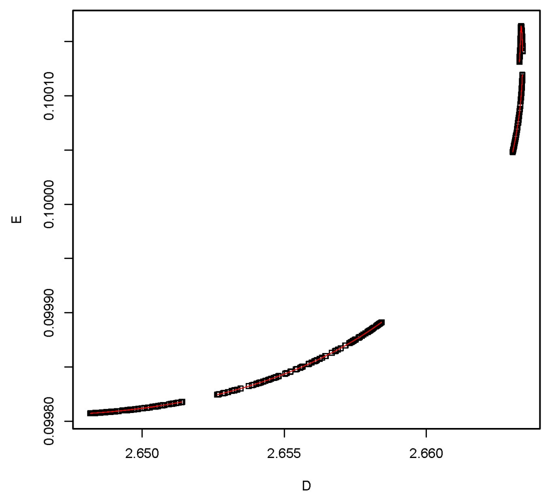
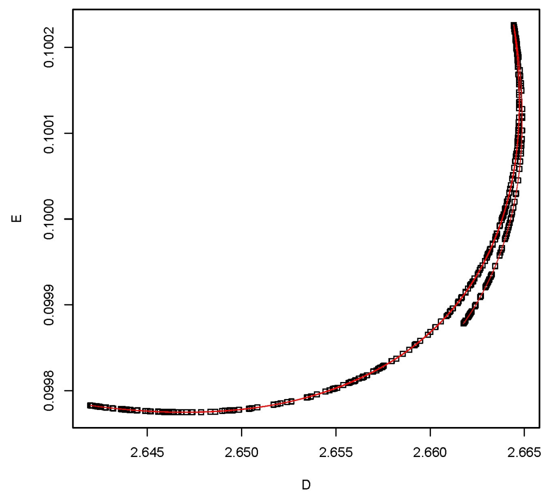


Fig. 4: Intersections of the turbulent trajectory and the Poincare section $I = 2.55$ at $Re = 240.40$.

(a)$Re = 240.40$



(b)$Re = 240.44$



(c)$Re = 240.45$

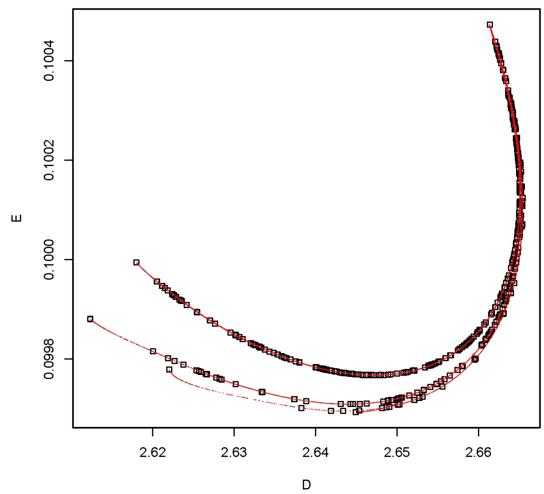


Fig. 5: Learning points from DNS (□) and attractors of the two-dimensional model systems (red) at $I = 2.55$.

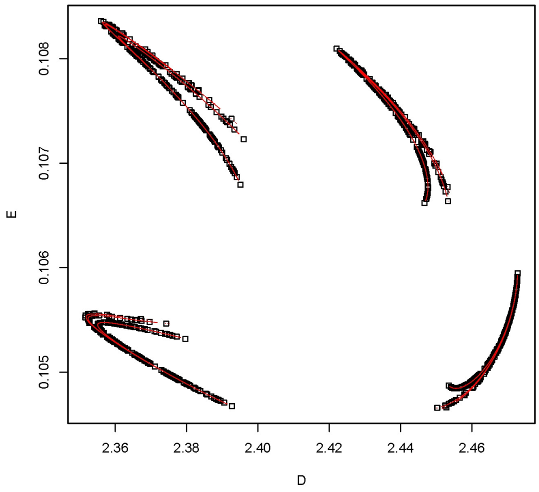


Fig. 6: Same as Fig. 5, but at $I = 2.3$. $Re = 240.45$.

4. 結言

平面クエット流の乱流発生直後の解軌道において，ポアンカレ断面を設定し，その上での 2 次元写像を機械学習によってモデル化した．モデル写像のアトラクタは直接数値計算の軌道とほぼ一致している．本手法ではこのようにポアンカレ断面を設けたが，低次元常微分方程式系の構築についても同様に可能であると考える．(ポアンカレ断面上で軌道がほぼ 1 次元曲線上に存在することは，相空間での軌道は 2 次元曲面上に集中していることを意味する．) この場合，3 自由度系 (例えば E, I, D) の流れを学習することになる．また，Re が少し大きく，さらに有効次元数が大きい場合にも応用したいと考えている．

参考文献

[1] R. Temam, "Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics", Applied Mathematical Sciences Volume 68, 1988.
[2] G. Kawahara,"Laminarization of minimal plane couette flow: Going beyond the basin of attraction of turbulence", *Phys. Fluids*, **17**, 041702, 2005.
[3] M. Shimizu and G. Kawahara,"Route to chaos in minimal plane Couette flow", Euromech Colloquium EC565, 2014.
[4] A. Karatzoglou et al., "kernlab - An S4 package for kernel methods in R", Journal of Statistical Software 11(9), 1-20. URL http://www.jstatsoft.org/v11/i09/, 2004.