

# インタースケールトランスファーモデルを用いた 回転せん断乱流の LES

LES of rotating shear turbulence flow using the inter-scale transfer model

- 野田 啓太, 京工織大院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : m4623034@edu.kit.ac.jp  
西田 秀利, 京工織大院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : nishida@kit.ac.jp  
田中 満, 京工織大院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : mtanaka@kit.ac.jp  
Keita NODA, Dept.of Mech.and Syst.Eng.,Kyoto Inst.Tech. , Matsugasaki, Kyoto, 606-8585, JAPAN  
Hidetoshi NISHIDA, Dept.of Mech.and Syst.Eng.,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki, Kyoto, 606-8585, JAPAN  
Mitsuru TANAKA, Dept.of Mech.and Syst.Eng.,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki, Kyoto, 606-8585, JAPAN

We have performed large eddy simulations of homogeneous shear turbulence with and without background rotation to examine versatility of Interscale Transfer (IST) model recently proposed by Domaradzki et al. Subgrid-scale models in LES are generally classified into two categories; eddy viscosity models and energy transfer models, and IST-model is latter. It is found that the development of non-rotating homogeneous shear turbulence is well reproduced by the LES with IST-model. In the rotating case, on the other hand, the development of turbulence kinetic energy is underestimated by LES, indicating that the IST-model needs to be improved for rotating flows.

## 1. 緒言

自然界には様々なタイプの乱流が存在する。環境シミュレーションの精度向上のためには、このような様々なタイプの乱流の基本構造を理解することが必要である。近年、スパコンの発達により流体の運動方程式であるナビエーストークス方程式を乱流モデルを用いずに、直接解く DNS(Direct numerical simulation) が盛んに行われているが、DNS では最小スケールの渦構造まで離散的に表現する必要があり、適用できる流れ場はレイノルズ数などの低い流れ場に限定されている。高レイノルズ数乱流の数値解析を行うには、乱れによる散逸構造を記述する物理的なモデル、つまり乱流モデルの導入が必須となる。この乱流モデルの一つが格子平均化操作に基づく LES(Large-eddy simulation) である。LES は、秩序渦と秩序構造の形成・発展を決定論的に捉えることができるため、乱流渦構造を解明するために、欠くことのできない手段である。さらに、乱流とそれによって誘導される乱流混合の様々な統計的予測が可能となる。(1) このように、LES 方程式は激しい時空変動を表現できるが、一方、LES には大スケール変数の方程式中で、どのように小スケールの影響を評価するかという、大変困難な SGS(Subgrid scale) のモデル化の問題が存在する。

この問題に対して、最も広く用いられている渦粘性モデルとは異なる概念に基づくモデルとしてエネルギー輸送モデルがある。これは、大スケールからのエネルギーカスケードそのものを除去し、SGS にエネルギーが溜まることを防ぐという考えに基づいている。

一般に、エネルギー輸送モデルは SGS に溜まったエネルギーの除去が不十分である。このため、渦粘性モデルと組み合わせて使用されることが多い。エネルギー輸送モデルのこの欠陥を修正したモデルが近年、Domaradzki et al. によって、提案された。彼らは平行平板間乱流のシミュレーションを行い、提案したモデルの有効性を示している。本研究では、非回転のようせん断乱流と回転せん断乱流において提案されたモデルの有効性を検証する。

## 2. 流れ場における支配方程式

流れ場を支配する方程式として、外力がない場合の非圧縮性流体に関する連続の式と、Navier-Stokes 方程式 (以下 NS 方程式と呼ぶ。) を用いる。

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + Sx_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -Su_2 \delta_{i1} + 2\Omega \epsilon_{ij3} u_j - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i \quad (2)$$

ここで、 $S$  はせん断率、 $\Omega$  は回転角速度、 $\nu$  は動粘性係数を表している。

## 3. 計算手法

本研究では、スペクトル法を用いて渦度方程式を解く。またその際、時間発展式を 4 次精度 Runge-Kutta-Gill 法を用いて数値的に解く。

## 4. SGS モデリング

### 4.1 インタースケールトランスファーモデル

本研究では、SGS モデリングの際、近年提唱されたインタースケールトランスファーモデル (以下、IST-model とする。) を用いる。(2) この IST-model は、大スケール渦から中スケール渦へのエネルギー輸送そのものを除去し、エネルギーの蓄積をさせないという概念のモデルである。

まず、エネルギースペクトルを以下に示すように  $R_1, R_2, R_3$  によって表される 3 つの離散波数領域に分割する。

$$\begin{aligned} R_1 & : 0 \leq k \leq k_1 \\ R_2 & : k_1 \leq k \leq k_2 \\ R_3 & : k_2 \leq k \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $k_1$  は GS での大スケールの渦を表現する低波数を表し、 $k_2$  は GS の最小スケールを表現する波数域を表す。また、 $R_3$  の領域は SGS で表現される高波数域を表し、LES では、 $R_1, R_2$  の領域のみを計算する。

この時、それぞれの領域の速度は、それぞれ

$$\begin{aligned} R_1 & : u_i^1 = \widehat{u}_i \\ R_2 & : u_i^2 = \overline{u}_i' = \overline{u}_i - \widehat{u}_i \\ R_3 & : u_i^3 = u_i - \overline{u}_i \end{aligned} \quad (4)$$

と表される。なお、ここで示した速度についている直線と山線はそれぞれ LES における格子平均化のフィルター

処理, 乱流モデルにおけるフィルター処理を表している.  
LES において粗視化された支配方程式における対流項は

$$\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = \sum_m \sum_p \sum_q \mathcal{N}^{pqm} \quad (5)$$

のように分解できる. ここで,

$$\mathcal{N}^{pqm} = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i^p u_j^q)^m = \left( u_j^q \frac{\partial u_i^p}{\partial x_j} \right)^m \quad (6)$$

は  $p$  番目と  $q$  番目の波数領域の相互作用によって  $m$  番目の波数領域が受ける影響を表している. この対流項の分解は応力  $u_i u_j$  を

$$u_i u_j = \sum_m \sum_p \sum_q N^{pqm} \quad (7)$$

と分解することに対応している. ここで,

$$N^{pqm} = (u_i^p u_j^q)^m \quad (8)$$

である.  $\mathcal{N}^{pqm}$  や  $N^{pqm}$  には 27 個の要素があるが, LES における粗視化操作の後に残る要素は 8 つしかなく,  $N^{pqm}$  に関しては, 4 で示した速度を用いて,

$$\begin{aligned} N^{111} &= \widehat{\widehat{u_i u_j}} \quad , \quad N^{112} = \widehat{\widehat{u_i u_j}} - \widehat{\widehat{u_i u_j}} \\ N^{121} &= \widehat{\widehat{u_i u_j}} \quad , \quad N^{122} = \widehat{\widehat{u_i u_j}} - \widehat{\widehat{u_i u_j}} \\ N^{211} &= \widehat{\widehat{u_i u_j}} \quad , \quad N^{212} = \widehat{\widehat{u_i u_j}} - \widehat{\widehat{u_i u_j}} \\ N^{221} &= \widehat{\widehat{u_i u_j}} \quad , \quad N^{222} = \widehat{\widehat{u_i u_j}} - \widehat{\widehat{u_i u_j}} \end{aligned} \quad (9)$$

と表される.

$(u_j^q \frac{\partial u_i^1}{\partial x_j})^m$  は主流  $u^1$  のもとでのエネルギー生成を表していると考えられる. 一方,  $(u_j^p \frac{\partial u_i^1}{\partial x_j})^m$  は主流  $u^1$  による移流を表していると考えられる. よって,  $N^{112}$  は,  $R_1$  内のスケール間での相互作用から  $R_2$  におけるエネルギー生成を,  $N^{122}$  は,  $R_1$  と  $R_2$  の領域での相互作用によって  $R_2$  におけエネルギー生成を表していると考えられる. Domaradzki *et al.* によると  $N^{112}$ ,  $N^{122}$  は最少スケールへのエネルギー輸送にかなり大きな役割を果たしている.

ここで提案する SGS model の基本的なアイデアはエネルギー生成項  $N^{112}$  と  $N^{122}$  から生じる  $R_2$  へのエネルギー流入を制限することである. 具体的には, SGS 応力項を  $N^{112}$  と  $N^{122}$  を支配方程式から引くよう, 以下のよう定義する.

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= N^{112*} - N^{122} \\ &= \widehat{\widehat{u_i u_j}} - \widehat{\widehat{u_i u_j}} - \widehat{\widehat{u_i u_j}} \end{aligned} \quad (10)$$

これが Domaradzki らが提案した新しいエネルギー輸送モデルである. なお, ガリレオ普遍性を満たすように  $N^{112}$  を

$$N^{112*} = \widehat{\widehat{u_i u_j}} - \widehat{\widehat{u_i u_j}} \quad (11)$$

で置き換えている. これを支配方程式に加えることによって, この乱流モデルを用いた LES を行う.

## 4.2 モデル内のフィルター処理

このモデルに内在するフィルター処理において用いるフィルター関数は

$$\widehat{f}(x^n) = \frac{1}{2}(1-A)f(x^{n-1}) + Af(x^n) + \frac{1}{2}(1-A)f(x^{n+1}) \quad (12)$$

で表される. ここで示したフィルター係数  $A$  の値は Domaradzki らによって複数提案されており, その中で適切なものを検証し用いている.

## 5. IST-model の有効性の検証

今回, 回転せん断乱流のうち回転なし ( $\Omega = 0$ ) と  $\Omega = S/2$  の 2 つの場合を解析対象として, IST-model の有効性を検証した. 以下, 計算条件を示す.

### 5.1 計算条件

Tab. 1: Computational conditions.

	DNS	IST
格子点数	$576 \times 576 \times 192$	$144 \times 144 \times 48$
格子幅 $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$	$6\pi/576, 2\pi/192$	$6\pi/144, 2\pi/48$
計算領域	$6\pi \times 6\pi \times 2\pi$	
時間刻み幅 $\Delta t$	$5.0 \times 10^{-3}$	
粘性係数 $\nu$	$4.34 \times 10^{-4}$	
境界条件	$x_1, x_3$ 方向: 周期境界 $x_2$ 方向: せん断周期境界	

IST-model と DNS-downsize には高解像度 DNS における  $St = 2$  での計算結果を初期の流れ場として用いており, IST-model では 5 通りのフィルター係数を用いて検証する. なお, IST-model と同条件の低解像度の DNS も行う. 以下では, これを DNS-downsize と呼ぶことにする.

### 5.2 計算結果

以下の式 (13) 乱流運動エネルギーを計算結果の比較対象とする.

$$E^{(L)} = \sum_{k \leq k_c} E(k) \quad (13)$$

なお,  $k_c$  は IST-model における最大有効波数を示している.

Fig.1 は乱流運動エネルギーの時間発展を示している. case(a) では, 非回転の一樣せん断乱流の計算を行った. 図を見ると,  $A$  の値を大きくするほどエネルギーが規則的に減少している事がわかる. また, 参考文献において Domaradzki らが一番有効だと示していた  $A = \frac{2}{3}$  の場合の IST-model が高解像度 DNS に対して定性的に一番良好な結果を示している. 加えて, DNS-downsize よりも良好な結果を示している事から case(a) における IST-model の有効性が確認できた.

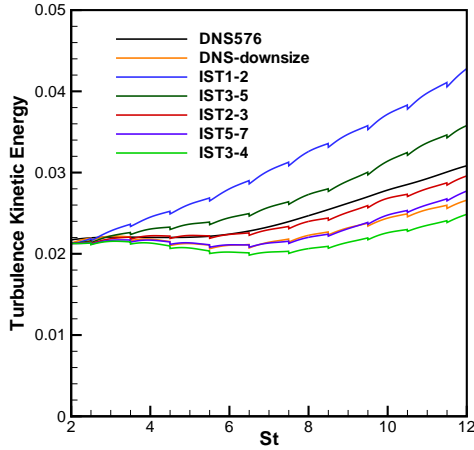
case(b) では, case(a) 同様のフィルター係数  $A$  の値を IST-model に用いて, 回転せん断乱流における計算を行った. 図を見ると, IST-model では case(a) 同様に  $A$  の値

に対してエネルギーが規則的に減少している事がわかるが、DNS との比較では case(a) 同様の A の値では定性的に良好な結果を得られなかった。

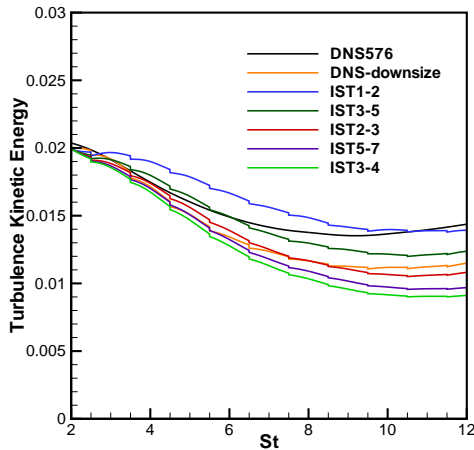
た。これにより、回転の効果を上手く取り込めておらず、IST-model の改善の必要があるという事が分かった。

#### 参考文献

- (1) Marcel Lesieur and Olivier Metais and Pierre Comte, 乱流のシミュレーション－LES による数値計算と可視化－, (2010), 1-43, 森北出版株式会社.
- (2) Brian W Anderson and J. Andrzej Domaradzki, A subgrid-scale model for large-eddy simulation based on the physics of interscale energy transfer interbulence, Phys Fluids 24, (2012), 065104 .



(a) non-rotation case ( $\Omega = 0$ )



(b) rotation case ( $\Omega = S/2$ )

Fig. 1: Time evolution of Turbulence Kinetic Energy. Black and orange lines represent the result of resolved DNS and under-resolved DNS. LES with  $A = \frac{1}{2}$  (blue),  $\frac{3}{5}$  (green),  $\frac{2}{3}$  (red),  $\frac{5}{7}$  (purple),  $\frac{3}{4}$  (lightgreen)

## 6. 結論

本研究では、近年提案された LES のモデルの有効性の検証・改善を行うことによって、乱流解析における高汎用性・高精度を実現したモデルの開発を目的としている。一様等方性乱流における IST-model の有効性を確認したのち、今回は、非回転の一様せん断乱流と回転せん断乱流における IST-model の有効性を検証した。計算結果を見ると、非回転の一様せん断乱流においては Domaradzki らによって適切だとされているフィルター係数  $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$  によって定性的に良好な結果を得たが、回転せん断乱流においては同フィルター係数では良好な結果を得られなかつ