区分要素に線形関数を用いた空間モーメント法による一次元移流方程式の計算法の基本特性

Basic characteristics on numerical method of 1-D convective equation by means of spatial moment method with linear function

○ 細田　尚 1, 京大院・工, 京都市西京区京都大学桂 C1-3, hosoda.takashi.4w@kyoto-u.ac.jp
湯澤史也 2, 京大院修・工, 京都市西京区京都大学桂 C1-3, yuzawa.fumiya.78e@st.kyoto-u.ac.jp
白井秀和 3, 三洋テクノマリン, 東京都中央区日本橋堀留町 1-3-17,shirai.hidekazu.28w@gmail.com
音田慎一郎 4, 京大院・工, 京都市西京区京都大学桂 C1-3, onda.shinichiro.2e@kyoto-u.ac.jp
HOSODA, Takashi 1, Kyoto Univ., C1-3 Kyoto Daigaku Katsura Nishikyo-ku, Kyoto 615-8540
YUZAWA, Fumiya 2, Kyoto Univ., C1-3 Kyoto Daigaku Katsura Nishikyo-ku, Kyoto 615-8540
SHIRAI, Hidekazu 3, Sanyo Techno Marine, 1-3-17 Horidome Nihonbashi Chuo-ku Tokyo 103-0012
ONDA, Shinichiro 4, Kyoto Univ., C1-3 Kyoto Daigaku Katsura Nishikyo-ku, Kyoto 615-8540

This paper describes the basic features of a computational method for convective equation using the spatial moment method with a linear shape function for divided elements. The formulation of a computational method for convective equation is firstly represented using linear polygonal lines to approximate an arbitrary distribution in a cell. The computational method is applied to 1-D convective equation under a few types of initial distribution. Basic features of calculated results are shown to clarify the performance of the computational method proposed here.

1．はじめに

空間モーメント法は古くから移流拡散方程式に適用され，空間モーメントを理論的，数値的に計算することで，せん断流中の移流分散現象等の考察が行われてきた [1)]．最近では，移流項を直接離散化する必要がないという利点を生かして，流体方程式の数値解析手法としても用いられている [2)].

流体方程式の数値解析法として空間モーメント法を適用する際に，Minoshima 等 [2)]は内挿関数として４次多項式を用いている．本研究では, まず区分された対象領域の一格子内をさらに細分し, 細分区間内の未知量の分布形として線形形状関数を用いた場合の移流方程式の数値計算法の定式化を示す．その後，得られた計算結果の基本的な特性について考察した結果を記述する.

2．定式化の概要

(1)　１セル内の分布形状の表現

Fig.1 に示すように，対象領域を格子で分割し，その一格子内をさらに細分する．Fig.2 に示した要素内の i 番目の細分区間に対して，式(1)に示した線形形状関数を適用する.

$$c^{(i)} = c_i \frac{x_{i+1} - x}{\Delta l} + c_{i+1} \frac{x - x_i}{\Delta l}$$

$$= \frac{1}{\Delta l} \left\{ \left(x_{i+1} c_i - x_i c_{i+1} \right) + x \left(c_{i+1} - c_i \right) \right\} \qquad (1)$$

ここに，$c^{(i)}$ ：細分区間 i の未知量，c_i ：格子点 i の値，x ：空間座標，x_i ：格子点 i の座標，Δl ：細分区間の長さ．　要素内の空間モーメントは次式で計算される.

$$M_n = \int_{-l}^{l} \sum_{i=1}^{N} c^{(i)} x^n dx$$

$$= \frac{1}{\Delta l} \sum_{i=1}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left\{ \left(x_{i+1} c_i - x_i c_{i+1} \right) x^n + x^{n+1} \left(c_{i+1} - c_i \right) \right\} dx$$

$$= \frac{1}{\Delta l} \left[c_1 \left\{ x_2 \left(\frac{x_2^{\,n+1}}{n+1} - \frac{x_1^{\,n+1}}{n+1} \right) - \frac{1}{n+2} \left(x_2^{\,n+2} - x_1^{\,n+2} \right) \right\} \right.$$

$+\cdots\cdots$

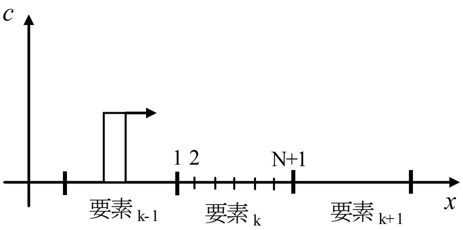

Fig.1 Schematic illustration of computational method

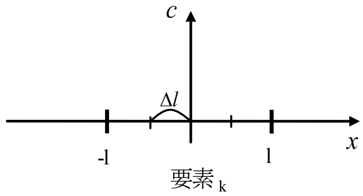

Fig.2 Explanation of computational method

$$+ c_i \left\{ - x_{i-1} \frac{1}{n+1} \left(x_i^{\,n+1} - x_{i-1}^{\,n+1} \right) + \frac{1}{n+2} \left(x_i^{\,n+2} - x_{i-1}^{\,n+2} \right) \right.$$

$$\left. + x_{i+1} \frac{1}{n+1} \left(x_{i+1}^{\,n+1} - x_i^{\,n+1} \right) - \frac{1}{n+2} \left(x_{i+1}^{\,n+2} - x_i^{\,n+2} \right) \right\}$$

$+\cdots\cdots$

$$\left. + c_{N+1} \left\{ - \frac{x_N}{n+1} \left(x_{N+1}^{\,n+1} - x_N^{\,n+1} \right) + \frac{\left(x_{N+1}^{\,n+2} - x_N^{\,n+2} \right)}{n+2} \right\} \right] \qquad (2)$$

(2)　移流方程式の計算法

式(3)に示した一次元移流方程式を考える.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \ u = \text{const.} \qquad (3)$$

Fig.2 に示した１セル内の空間モーメントの定義式は次式で与

えられる．

$$M_n = \int_{-l}^{l} c x^n dx \tag{4}$$

一方, Fig.2 に示した 1 セルに対する式(3)の空間モーメント方程式は式(5)で与えられる．

$$\int_{-l}^{l} x^n \left(\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} \right) dx = 0 \tag{5}$$

式(4)を用いて式(5)を書き換えると式(6)になる．

$$\frac{dM_n}{dt} = nuM_{n-1} + u\left(cx^n\right)_{x=-l} - u\left(cx^n\right)_{x=l} \tag{6}$$

Fig.3 は二つのセルをまたいで分布形が移流していく状況を示している．このような場合には，左側のセルと右側のセルのモーメント方程式を同時に解くとともに，両者の接合部での流出，流入フラックスが等しくなるように接合部での値を等しくする必要がある．Fig.3 に示したような 1 セルを 4 分割した場合を例として計算法を説明すると以下のようになる．

左側と右側セルのモーメント方程式は式(7), (8)で与えられる．

左側セルの空間モーメント方程式　　（ただし，$c_1^L = 0$）

$$\frac{dM^L{}_n}{dt} = nuM^L{}_{n-1} - uc_5^L x^n \tag{7}$$

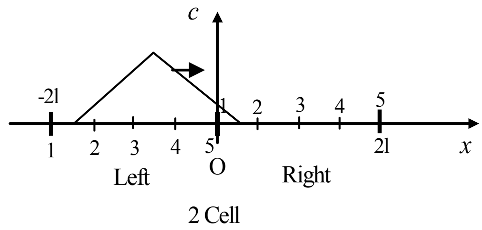

Fig.3 Convection from left cell to right cell

$$c_5^L = \frac{5}{6} M^L{}_3 \Delta l - \frac{5}{4} M^L{}_1 \Delta l \tag{8}$$

右側セルの空間モーメント方程式　　（ただし，$c_5^R = 0$）

$$\frac{dM^R{}_n}{dt} = nuM^R{}_{n-1} + uc_1^R x^n \tag{9}$$

$$c_1^R = -\frac{5}{6} M^R{}_3 \Delta l + \frac{5}{4} M^R{}_1 \Delta l \tag{10}$$

次に，両セルの接合部で値が等しくなるように O 点の値を左側と右側の値の平均値で置き換える．

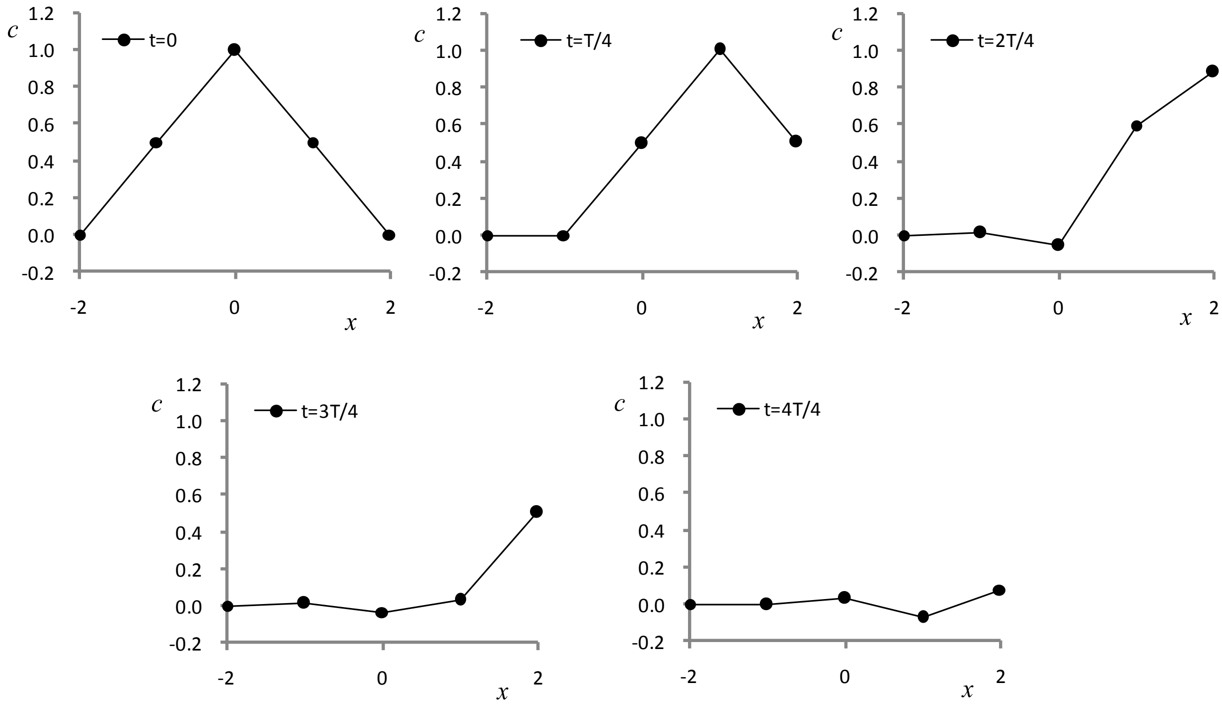

Fig.4 Calculated results of the convection of triangle distribution in one cell

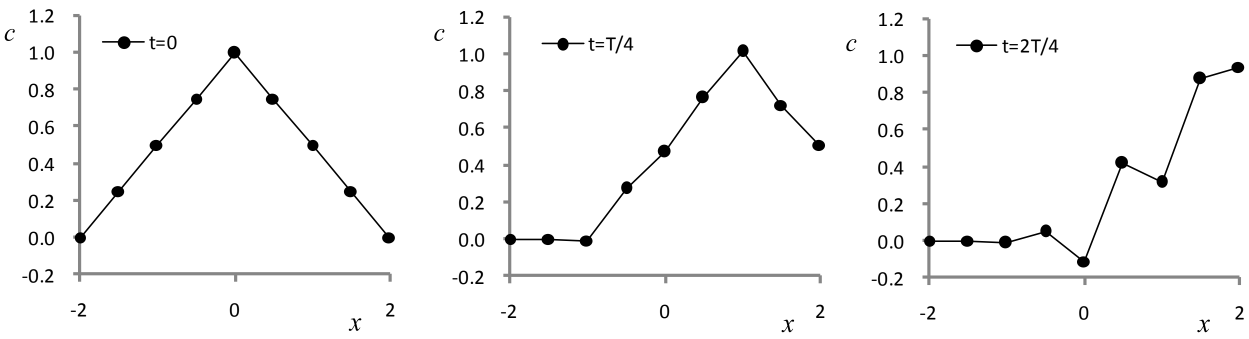

Fig.5 Calculated results of the convection of triangular distribution in one cell with fine divided elements

$$c_O = \frac{1}{2}(c_5^L + c_1^R) \tag{11}$$

３．計算結果の考察

まず 1 セルのみの場合を考える．Fig.4 に初期分布として三角形分布を与えた場合の分布形の移流過程を示した． $u=1$ ，$\Delta t = 0.01$ であり，時間積分には二次精度の Adams・Bashforth 法を用いた．若干の数値振動が発生しているが，おおよそ初期の三角形分布を保ちながら移流していく様子が再現されている．

次に，一セル内の分割幅を半分にした場合の計算結果を Fig.5 に示した．Fig.4 と比較して数値振動が大きくなっている．今後，この数値振動を抑制するための方法として，著者らが提案した方法[3]等が有効かどうか検討したいと考えている．

次に 2 セルの場合の計算結果を Fig.6 に示した．1 セルの場合と同様に若干の数値振動が発生しているが，初期の三角形分布を保ちながら左側セルから右側セルに移流していく様子が再現されている．

４．おわりに

今後，様々な分布形状や格子間隔のもとで計算を行い，数値振動の発生状況を確認するとともに，著者らが提案している数値振動の抑制法[3]の有効性について検討したいと考えている．

参考文献

(1) Aris, R., "On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube," *Proc. Royal Society of London*, Vol.235, Issue 1200, pp.67-77, 1956.
(2) Minoshima, T., Matsumoto, Y. and Amano, T., "Multi-moment advection scheme for Vlasov simulation," *J. Comp. Phys.*, 230, pp.6800-6823, 2011.
(3) 細田・白井・湯澤・音田, "区分要素に線形形状関数を用いた空間モーメント法による移流方程式の数値計算法の検討", 流体力学会年会 2015.

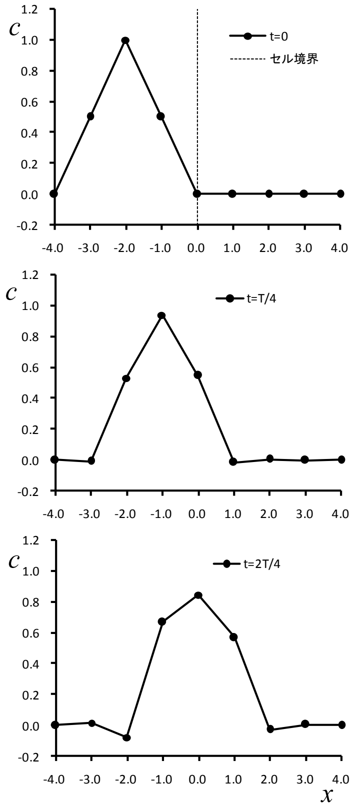

Fig.6 Calculated results of the convection of triangular distribution in two cells