湖沼内生態系シミュレーションに関する研究

Study on Ecosystem Simulations in a Lake

○ 大槻 祐樹，京工繊大院, 〒 606-8585 京都府京都市左京区松ケ崎御所海道町, E-mail：m4623006@edu.kit.ac.jp
西田 秀利，京工繊大, 〒 606-8585 京都府京都市左京区松ケ崎御所海道町, E-mail：nishida@edu.kit.ac.jp
田中 満，京工繊大, 〒 606-8585 京都府京都市左京区松ケ崎御所海道町, E-mail：mtanaka@edu.kit.ac.jp
Yuki Otsuki, Dept.of Mech.and Syst.Eng.,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki,kyoto,606-8585,JAPAN
Hidetoshi Nishida, Dept.of Mech.and Syst.Eng.,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki,kyoto,606-8585,JAPAN
Mitsuru Tanata, Dept.of Mech.and Syst.Eng.,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki,kyoto,606-8585,JAPAN

In this paper, the seamless immersed boundary method is applied to the ecosystem simulation. In the ecosystem simulation, the governing equations for ecosystem variables are solved together with the incompressible Navier-Stokes equations and the energy equation. In the seamless immersed boundary method for ecosystem equations, the additional terms which satisfies the boundary condition are estimated similar to the external heat flux term in the energy equation. As a lake model, the rectangular region with inflow and outflow parts is considered. The simulation in winter without chemical-biological submodel is carried out. As a result, it is found that the thermally induced large circulation can be reappeared. Then, it is concluded that the seamless immersed boundary method shows the effective property for ecosystem simulations.

1. 緒言

近年，地球温暖化や環境破壊が問題視されており，環境への関心が日々高まりつつある．これらの環境問題は，異常気象や生物の絶滅などの問題と関連し，深刻な社会問題となっている．日本の湖も例外ではなく環境破壊が進んでいる．たとえば，生活排水，工場排水などによって水質の悪化が進んでおり，さらに湖沼における循環は川や海よりも閉鎖的であるため水質汚染の影響を大きく受けやすい．また，これらの環境破壊の影響を受け，外来魚の増加が進んでいることが問題視されている．外来魚の増加は古来の生態系を脅かす結果になり，近年では日本古来の魚類が絶滅の危機に直面している状況である．そこで，これらの湖にかかわる環境問題を解決するために，湖沼内における流れの予測，また，溶存酸素濃度予測が必要となる．湖沼内では，閉鎖的水域のため循環流れが生成される．また，季節変動により表水層における温度が変動する影響を受けて，季節によりそれぞれ異なる循環流れが生成される．この循環流によって，生態系や有機物質の循環が行われており，生態系や有機物質は酸素の消費・生産に大きくかかわっている．そこで湖沼における生態系の数値シミュレーションを行い，季節ごとにおける湖沼での循環を再現することで，生態系や有機物質及び溶存酸素濃度を予測することが可能となる．本研究では，シームレス仮想境界法を用いて２次元で湖沼内をモデル化し，冬季に生じる循環流れの解析を行った．

2. 基礎方程式

２次元非圧縮性流れの支配方程式であるデカルト座標系における連続の式，非圧縮性ナビエ・ストークス方程式は以下のように表すことができる．

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = D = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{2}$$

ここで，u_i は，x_i 方向の速度成分であり，p は圧力である．また，F_i は移流項，粘性項を含む流束項であり，以下のように表すことができる．

$$F_i = -u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{3}$$

なお，上式は以下の式を用いて無次元化を行っている．

$$x_i = \frac{\overline{x}_i}{\overline{L}_0}, u_i = \frac{\overline{u}_i}{\overline{U}_0}, t = \overline{t}\frac{\overline{U}_0}{\overline{L}_0}, p = \frac{\overline{p}}{\overline{\rho}_0\overline{U}_0^2}, Re = \overline{L}_0\frac{\overline{U}_0}{\overline{\nu}} \tag{4}$$

ここで,「-」は有次元量を示し，$\overline{L}_0$ は代表長さ，$\overline{U}_0$ は代表速度，$\overline{\rho}_0$ は代表密度，$\overline{\nu}$ は動粘性係数，Re はレイノルズ数をそれぞれ表している．熱流動を考慮する場合ナビエ・ストークス方程式に密度変化が温度変化のみに依存するブシネ近似を用いた方程式を採用する．式（2）の運動方程式に浮力項を付加すると以下のようになる．

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \delta_{i2}\frac{Gr}{Re^2}T \tag{5}$$

ここで，T，Re，Gr はそれぞれ温度，レイノルズ数，グラスホフ数である．エネルギ方程式はブシネ近似を用いて以下のように表すことができる．

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j\frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{1}{PrRe}\frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \tag{6}$$

ここで，Pr はプラントル数である．なお，上式は以下の式を用いて無次元化を行っている．

$$T = \frac{\overline{T} - \overline{T}_0}{\Delta\overline{T}_0}, Pr = \frac{\overline{\nu}}{\overline{a}}, Gr = \frac{\overline{L}_0^3\overline{g}\overline{\beta}\Delta\overline{T}_0}{\overline{\nu}^2} \tag{7}$$

ここで,「-」は有次元量を示し，$\overline{T}_0$ は代表温度，$\Delta\overline{T}_0$ は代表温度差，$\overline{a}$ は熱拡散率，$\overline{g}$ は重力加速度，$\overline{\beta}$ は体膨張係数をそれぞれ表している．生態系モデルを考慮する場合，生態系変数 B_i は以下の式に支配される．

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial B_i}{\partial x_j} = \frac{1}{Sc_iRe}\frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j \partial x_j} + q_{Bi} \tag{8}$$

ここで，生態系変数 B_i は植物プランクトン濃度（PHY）, 動物プランクトン（ZOO）, 懸濁態有機炭素濃度（POC），溶存態有機炭素濃度（DOC），無機態リン濃度（DIP），無機態窒素濃度（DIN），溶存酸素濃度（DO）であり，q_{Bi} はそれぞれに対応する化学・生物学的作用を表す項である．生態系モデルの無次元化は各々の代表濃度 $\overline{B}_{i0}$，代表長さ $\overline{L}_0$，$\overline{U}_0$ を用いて行い，Sc_i=$\frac{\overline{\nu}}{\overline{\alpha}_i}$($\overline{\alpha}_i$: 各濃度の拡散係数) はシュミット数である．

2.1　化学・生物学的作用項

植物プランクトン，動物プランクトン，懸濁態有機炭素，溶存態有機炭素，無機態リン，無機態窒素，溶存酸素の化学・生物学的作用項 q_{PHY}，q_{ZOO}，q_{POC}，q_{DOC}，q_{DIP}，q_{DIN}，q_{DO} はそれぞれ次のように表される．(1)

$$q_{PHY} = B_1 - B_2 - B_3 - B_4 - B_5 - B_6 \tag{9}$$

$$q_{ZOO} = B_6 + B_7 - B_8 - B_9 - B_{10} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} q_{POC} = B_4 - B_7 + B_9 + B_{10} - B_{11} \\ -B_{12} - B_{13} + R_{POC} \end{aligned} \tag{11}$$

$$q_{DOC} = B_3 + B_{12} - B_{14} + R_{DOC} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} q_{DIP} = [P:C](-B_1 + B_2) + [P:C]B_8 \\ +[P:C]B_{11} + [P:C]B_{14} + B_{15} + R_{DIP} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} q_{DIN} = [N:C](-B_1 + B_2) + [N:C]B_8 \\ +[N:C]B_{11} + [N:C]B_{14} + B_{16} + R_{DIN} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} q_{DO} = [O:C](B_1 - B_2) - [O:C]B_8 \\ -[O:C]B_{11} - [O:C]B_{14} - B_{17} + B_{18} + R_{DO} \end{aligned} \tag{15}$$

B_1〜B_{18} の作用を次の Table 1 に示す．

Tab. 1: Definition of each process in the chemical-biological submodel.

Symbol	Process
B_1	primary production of phytoplankton
B_2	respiration of phytoplankton
B_3	extracellular release of phytoplankton
B_4	mortality of phytoplankton
B_5	sinking of phytoplankton
B_6	grazing of phytoplankton
B_7	grazing of POC
B_8	respiration of zooplankton
B_9	egestion of zooplankton
B_{10}	mortality of zooplankton
B_{11}	decomposition of POC
B_{12}	fraction production
B_{13}	sinking of POC
B_{14}	decomposition of DOC
B_{15}	release of phosphorus from bottom
B_{16}	release of nitrogen from bottom
B_{17}	consumption of oxygen from bottom
B_{18}	aeration

また，B_1〜B_{18} は次のように表される．

$$\begin{aligned} B_1 = G_p \cdot \theta_P^{(\overline{T}\ \ 20)} \cdot \frac{I_0 exp(-k\overline{y})}{I_P} exp\{1 - \frac{I_0 exp(-k\overline{y})}{I_P}\} \\ \cdot min(\frac{DIP}{\kappa_{DIP} + DIP}, \frac{DIN}{\kappa_{DIN} + DIN}) \cdot PHY \end{aligned} \tag{16}$$

$$k = k_0 + k_1 \cdot [Chla:C] \cdot PHY \tag{17}$$

$$B_2 = R_P \cdot \theta^{(\overline{T}-20)} \cdot PHY \tag{18}$$

$$B_3 = E_P \cdot exp(\gamma_P \cdot [Chla:C] \cdot PHY) B_1 \tag{19}$$

$$B_4 = M_P \cdot PHY^2 \tag{20}$$

$$B_5 = \frac{\partial(\omega_P \cdot PHY)}{\partial y} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} B_6 = \frac{PHY}{PHY + POC} \cdot C_g \cdot \theta_Z^{(\overline{T}-20)} \\ \cdot [1 - exp\eta(k_T H - PHY - POC)] \cdot ZOO \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} B_7 = \frac{POC}{PHY + POC} \cdot C_g \cdot \theta_Z^{(\overline{T}-20)} \\ \cdot [1 - exp\eta(k_T H - PHY - POC)] \cdot ZOO \end{aligned} \tag{23}$$

$$B_8 = R_z \cdot \theta_z^{(\overline{T}-20)} \cdot ZOO \tag{24}$$

$$B_9 = (1 - a_z) \cdot (B_6 + B_7) \tag{25}$$

$$B_{10} = M_z \cdot ZOO^2 \tag{26}$$

$$B_{11} = R_o \cdot \theta_o^{(\overline{T}-20)} \cdot DOC \tag{27}$$

$$B_{12} = \kappa \cdot B_{10} \tag{28}$$

$$B_{13} = \frac{\partial(\omega_o \cdot POC)}{\partial y} \tag{29}$$

$$B_{14} = R_D \cdot \theta_D^{(\overline{T}-20)} \cdot DOC \tag{30}$$

$$B_{15} = 0.2 \cdot \frac{[P:C] \cdot B_5 + [P:C] \cdot B_{12}}{h_b} \tag{31}$$

$$B_{16} = 0.5 \cdot \frac{[N:C] \cdot B_5 + [N:C] \cdot B_{12}}{h_b} \tag{32}$$

$$B_{17} = \frac{[O:C] \cdot B_5 + [O:C] \cdot B_{12}}{h_b} \tag{33}$$

$$B_{18} = K_{DO}(DO_{sat} - DO) \tag{34}$$

$$\begin{aligned} DO_{sat} = 14.161 - 0.3943 \cdot \overline{T} \\ +0.007714 \cdot \overline{T}^2 - 0.0000646 \cdot \overline{T}^3 \end{aligned} \tag{35}$$

また，式 (11)〜(34) 中の値を次の Table 2 に示す．

Tab. 2: Definition of parameters in the chemical-biological submodel.

$Symbol(Value)$	$Definition$
$R_{POC}(=0[\mu gC/l/s])$	flux of POC through rivers
$R_{DOC}(=0[\mu gC/l/s])$	flux of DOC through rivers
$R_{DIP}(=0[\mu gP/l/s])$	flux of inorganic phosphorus through rivers
$R_{DIN}(=0[\mu gN/l/s])$	flux of inorganic nitrogen through rivers
$R_{DO}(=0mgO/l/s)$	flux of oxygen through rivers
$[Chla:C](=0.05$ $[(\mu g/l)/(\mu gC/l)])$	ratio of chlorophyll a to carbon in phytoplankton
$[P:C](=0.05[-])$	ratio of phosphorus to carbon in organic matters
$[N:C](=0.5[-])$	ratio of nitrogen to carbon in organic matters
$[O:C](=4.92\times10^{-}3[-])$	ratio of oxygen to carbon in organic matters
$G_P(2[1/day])$	maximum specific growth rate of phytoplankton
$\theta_P(=1.05[-])$	temperature coefficient of phytoplankton
$I_P(=100[J/m^2/s])$	optimum light intensity for primary production
$I_0(=360.75[J/m^2/s])$	light intensity water surface
$\kappa_0(=0.3[1/m])$	base extinction coefficient of the lake
$\kappa_1(=0.02[1/m])$	extinction coefficient based on the concentration of chlorophyll a
$K_{DIP}(=2[\mu gP/l/s])$	half saturation constant of phosphorus
$K_{DIN}(=2[\mu gP/l/s])$	half saturation constant of nitrogen
$R_P(=0.03[1/day])$	specific respiration rate of phytoplankton
$E_P(=0.13[-])$	ratio of extracellular release to primary production
$\gamma_P(=-8.44\times10^{-}4)$ $[1/(\mu g/l)])$	coefficient for extracellular release based on the concentration of chlorophyll a
$M_P(=1\times10^{-}4)[1/(\mu g/l)])$	mortality rate of phytoplankton
$\omega_P(=0.1[1/day])$	sinking rate of phytoplankton
$C_g(=0.65[1/day])$	specific grazing rate of zooplankton
$\eta(=0.007[-])$	Ivrev constant
$K_{TH}(=0[\mu gC/l])$	threshold of grazing of zooplankton
$\theta_Z(1.05[-])$	temperature coefficient of zooplankton
$R_Z(=0.15[1/day])$	specific respiration rate of zooplankton
$a_Z(=0.6[-])$	assimilation rate of zooplankton
$M_Z(=5\times10^{-}4$ $[1/(\mu g/day)])$	mortality rate of zooplankton
$R_O(=0.05[1/day])$	relative decomposition rate of POC
$\theta_O(=1.056[-])$	temperature coefficient of decomposition of POC
$\kappa(=0.25[-])$	ratio of fraction production of DOC to decomposition of POC
$\omega_O(=0.5[1/day])$	sinking rate of POC
$R_D(=0.002[1/day])$	relative decomposition rate of DOC
$\theta_D(=1.05[-])$	temperature coefficient of decomposition of DOC
$h_b(=1/30[m])$	thickness of the grid just above water bottom
$K_DO(=3[1/day])$	aeration rate

3. シームレス仮想境界法

シームレス仮想境界法 [2] は非圧縮性ナビエ・ストークス方程式に外力項 G_i を，エネルギ方程式に付加熱量項 G_T を，さらに生態系方程式に付加作用項 G_{Bi} をそれぞれ付加した次式で表される．

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=F_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\delta_{i2}\frac{Gr}{Re^2}T+G_i \tag{36}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u_j\frac{\partial T}{\partial x_j}=\frac{1}{PrRe}\frac{\partial^2 T}{\partial x_j\partial x_j}+G_T \tag{37}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial B_i}{\partial x_j}=\frac{1}{Sc_iRe}\frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j\partial x_j}+q_{Bi}+G_{Bi} \tag{38}$$

シームレス仮想境界法ではナビエ・ストークス方程式に固体内部では速度が 0 になるように外力項を与えている．

3.1 外力項評価

仮想境界法において速度条件を満足するように境界に最も近いセルでの値を内挿により求め，そのセルにおいてナビエ・ストークス方程式に付加するべき外力項の値を計算する．ナビエ・ストークス方程式に外力項 G_i を付加した式 (36) において，時間微分項を離散化し，Fig.1 のように，境界外部の境界に最も近いセルの速度をそのセルに隣接するセルの速度 u_{i+1} と境界上での速度 U から線形的に求め，これを $\bar{U}$ とする $n+1$ 時間段階において $\bar{U}$ を満足するような外力 G_i は次のように表される．ただし，F_i^nには浮力項も含めている．

$$G_i^n=-F_i^n+\nabla p^n+\frac{(\bar{U}^{n+1}-u_i^n)}{\Delta t} \tag{39}$$

従来の外力評価法では，仮想境界の流体側のみ，あるいは，境界を挟むように外力を与えていたが，両者とも仮想境界近傍で非物理的な振動が生じてしまう．そこでシームレス仮想境界法では，境界近傍だけでなく仮想境界内部（物体内部）のすべての格子点に速度条件を満足するような外力項を付加するものとする．

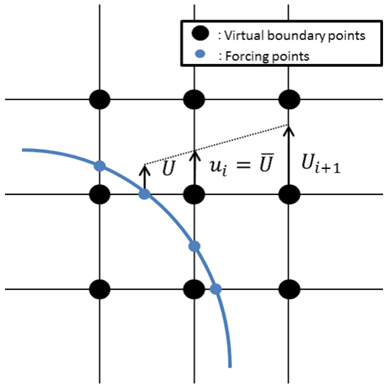


Fig. 1: Interpolation of u_i.

3.2 付加熱量項及び付加作用項評価

等温条件の場合，付加熱量項は先ほどの外力項と同様にして与える．断熱条件の場合，条件 ($\frac{\partial T}{\partial n}=0$) より境界上の温度を決定した後，等温条件と同一の操作を行う．[3] また，生態系方程式における付加作用項は Dirichlet 条件及び Neumann 条件に対しては付加熱量項と同じ評価を行う．

4. 計算手法

4.1 Fractional Step 法

運動方程式である式 (2) を前進オイラー法を用いて時間積分すると，

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \left(\mathbf{F}^n - \nabla p^n \right) \tag{40}$$

が得られる．ただし，$\mathbf{u} = (u, v), \mathbf{F} = (F_u, F_v)$ であり，肩文字 $[n]$ および $[n+1]$ は時間段階，Δt は時間刻み幅を表している．Fractional Step 法は式 (42) を以下の二段階に分けて計算する手法である．

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{F}^n \tag{41}$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p^n \tag{42}$$

さらに，$[n+1]$ 時間段階の連続の式に式 (44) を代入することにより圧力方程式

$$D^{n+1} = D^* - \Delta t \nabla^2 p^n = 0 \tag{43}$$

が得られる．したがって，式 (41) により部分段階の速度 $\mathbf{u}^*$ を求め，式 (43) により圧力 p^n を求めることにより，式 (42) で次の時間段階の速度 $\mathbf{u}^{n+1}$ を決定することができる．また，圧力方程式の解法には SOR 法を用いるものとする．

4.2 エネルギ方程式及び生態系方程式の離散化

エネルギ方程式及び生態系方程式における，時間微分項，空間微分項の離散化を以下に示す．以降はエネルギ方程式に対して説明する．

4.2.1 時間微分項の離散化 時間微分項の離散化は前進差分法を用いると以下のようになる．

$$T^{n+1} = T^n + \Delta t \left(-u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{1}{PrRe} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \right)^n \tag{44}$$

上式により，$[n+1]$ 段階の温度を求めることができる．

4.2.2 空間微分項の離散化 エネルギ方程式である式 (6) の移流項の離散化には移流速度の各成分に半格子ずらした位置で離散化し，それらをもとのコロケーション格子上の速度点に補間する保存性差分法を用いて，以下のように行う．

$$u \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{i,j} = \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{i+1/2,j} + u \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{i-1/2,j} \right) \tag{45}$$

$$v \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{i,j} = \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{i,j+1/2} + v \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{i,j-1/2} \right) \tag{46}$$

ただし，Δx，Δy はそれぞれ x 方向，y 方向の格子間隔を表し，半格子上の物理量は線形補間を用いて評価する．また，拡散項では 2 次精度中心差分法を用いて離散化する．

5. 2 次元湖沼内の循環流れの解析

5.1 計算条件

2 次元湖沼を Fig.2 のようにモデル化し，冬季を想定し循環流れの解析を行う．初期条件として流入流出部を含む深さ 1 の領域に対して，平均流速 1 の半ポアズイユ流，上面温度，代表生態系濃度を与え，他の領域に対しては圧力 $(p = 1)$ を除きすべての物理量を 0 とする．境界条件としては以下のように設定する．

流入境界：速度，温度，生態系濃度は初期値で固定，圧力は線形外挿

流出境界：速度，温度，生態系濃度は線形外挿，圧力は $p = 1$ で固定

上面境界：$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$，$v = 0$，$T = 0$，$\frac{\partial B_i}{\partial y} = 0$

下面境界：$u = v = 0$，$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial B_i}{\partial n} = 0$

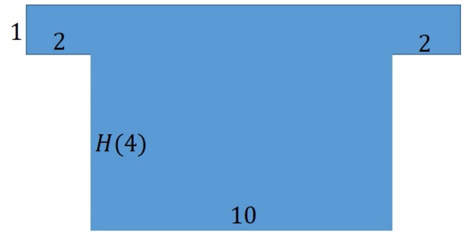


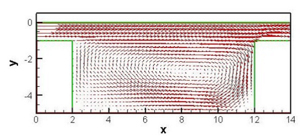
Fig. 2: Computational domain.

Tab. 3: Computational condition.

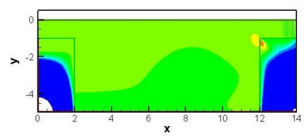
Domain	14×5
Grid points	280×100
Grid spacing	$\Delta x = \Delta y = 1/20$
Time step	$\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$
Grashof number	$Gr = 10^3$
Prandtl number	$Pr = 7.1$
Reynolds number	$Re = 100$

5.2 計算結果

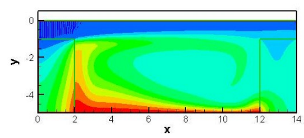
$t = 800$ 及び $t = 1000$ における速度および圧力，温度，濃度分布を Fig.3 及び Fig.4 に，示す．ただし本解析では濃度方程式中の化学・生物学的作用項は与えていない。



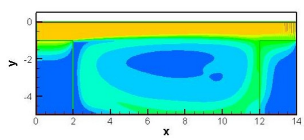
Velocity vector (t=800).



Pressure (t=800).



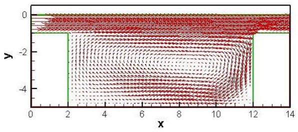
Temperature (t=800).



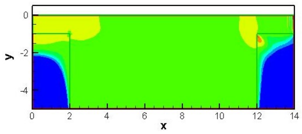
Concentration (t=800).

Fig. 3: Flow and ecosystem fields at t=800.

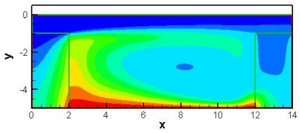
冬季の湖沼内では湖面と湖底との温度差により誘起される大規模循環流が発生し，流入する冷水塊が湖底へと取り込まれる全循環が確認できる．この大規模循環流は非定常性を有し，或る瞬間には流出し，その後冷水塊を取り込む運動を繰り返す．本研究においては，流入流出及び上下面境界以外の境界を仮想境界として表現し，矩形領域で計算を実施している．速度ベクトルより壁内部に速度は存在せず，圧力場・温度場・生態系場ともに仮想境界近傍において非物理的な振動は見られず，滑らかな分布が得られている．従って，流動場のみならず温度場・生態系場に対してもシームレス仮想境界法が有効に機能していることが認められる．



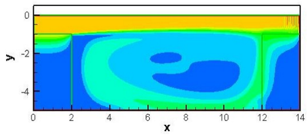
Velocity vector (t=1000).



Pressure (t=1000).



Temperature (t=1000).



Concentration (t=1000).

Fig. 4: Flow and ecosystem fields at t=1000.

6. 結論

シームレス仮想境界法を用いて湖沼内生態系シミュレーションを行った結果，冬季に特徴的な全循環を再現することができ，シームレス仮想境界法が生態系方程式に対しても有効に機能するという結論を得た．
講演会では化学・生物学的作用項を考慮した解析結果と夏季のものも発表する予定である．

参考文献

(1) Daisuke Kitazawa and Michiko Kumagai，NUMERICAL SIMULATION ON SEASONAL VARIATION IN DISSOLVED OXYGEN TENSION IN LAKE BIWA，The 2nd Joint Japan/Korea Workshop on Marine Environmental Engineering，(2005)

(2) Nishida, H. and Sasao, K. Incompressible flow simulations using virtual boundary method with new direct forcing terms estimation, Computational Fluid Dynamics 2006 (Springer), (2009), 371-376.

(3) 西田秀利，田尻恭平，熱流動を伴う非圧縮性流れ解析に対するシームレス仮想境界法，日本機械学会論文集 (B 編)， 76-765， (2010)， 741-746.