

# Uhlmann の IBM を用いたクエット流中の回転楕円体の 運動シミュレーション

Motion of Spheroid Simulation in Couette Flow using IBM of Uhlmann

- 梶原 勇一, 京工織大院, 〒 606-8585 京都府京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : m4623009@edu.kit.ac.jp  
西田 秀利, 京工織大, 〒 606-8585 京都府京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : nishida@edu.kit.ac.jp  
田中 満, 京工織大, 〒 606-8585 京都府京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : mtanaka@edu.kit.ac.jp  
Yuichi Kashihara, Dept.of Mech.and Syst.Eng.,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki,kyoto,606-8585,JAPAN  
Hidetoshi Nishida, Dept.of Mech.and Syst.Eng.,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki,kyoto,606-8585,JAPAN  
Mitsuru Tanata, Dept.of Mech.and Syst.Eng.,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki,kyoto,606-8585,JAPAN

Turbulent flows laden with non-spherical particles are encountered in many natural and industrial situations, such as sediment transport, plankton dynamics, and combustion. In the present study, numerical simulations of motion of a finite-size spheroidal particle in Couette flow are performed to examine whether the immersed boundary method of Uhlmann is applicable to the cases of non-spherical particles. Numerical results show good agreement with the theory of Jeffery for both oblate and prolate spheroids.

## 1. 緒言

粒子を含む乱流は、多くの自然現象や工業装置において見られる重要な流れである。例えば、土石流や流砂、攪拌層や固液分離装置などが挙げられる。このような流れをシミュレーションする際、流体が有する多数の粒子間の相互作用の流れ場に与える影響は大きいため、粒子の存在をより正確に表現する必要がある。従来、物体形状を正確に表現する手法としては、物体の境界に沿って計算格子を配置する境界適合座標系での解析が一般的であった。しかし、境界適合座標系では、複数の物体が流体内に存在する場合、格子形成に要する時間が実際の解析時間よりも多大になる可能性も想定される。そのため、デカルト格子のように格子形成が比較的容易な計算格子において粒子を表現する必要性が好ましい。そのような手法の一つとして Uhlmann の埋め込み境界法 (immersed boundary method; IBM)<sup>(1)</sup> が挙げられる。

Uhlmann の IBM では、粒子境界上にマーカー点となる格子点を配置し、その格子と計算格子との関係によって有限サイズの粒子を表現することが可能となる。本手法を用いて Uhlmann は 4096 個の球形粒子を含む鉛直平板間上昇乱流の解析を行った<sup>(2)</sup>。また、Kempe, Vowinckel and Fröhlich<sup>(3)</sup> はチャンネル中を流れる粒子のシミュレーションを Uhlmann の IBM を用いて行っている。本手法を用いた研究は前述の研究を合わせ、いずれも球形粒子に対して適用されている。しかし、流体に含まれる粒子の形状は一般的に完全な球形ではなく、様々な形状が存在し、その形状によって粒子の運動は異なると推測される。

例えば、クエット流中の回転楕円体の運動は、長軸と短軸の比によって変化することが Jeffery<sup>(4)</sup> によって示されており、それによって流れの挙動は大きく変化している。そのため、粒子を含む流れをシミュレーションするためには、球形のみならず様々な形状の粒子を表現することが必要である。

そこで、本研究は、非球形な粒子を含む流れ場をシミュレーションすることを目的として、Uhlmann の IBM を用いてクエット流中の回転楕円体の運動シミュレーションを行い、計算手法の有効性の検証を行う。

## 2. 基礎方程式

流れの基礎方程式は、連続の式

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

及び、Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i + f_i \quad (2)$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

である。 $\rho_f$  は流体の密度、 $f_i$  は IBM による付加力を表している。また、粒子の並進及び回転の運動方程式は

$$M_c^{(m)} \dot{\mathbf{u}}_c^{(m)} = -\rho_f \sum_{l=1}^{N_L} \mathbf{F}(\mathbf{X}_l^{(m)}) \Delta V_l^{(m)} + \rho_f \frac{d}{dt} \int_{S_m} \mathbf{u} dV + V_c^{(m)} (\rho_p - \rho_f) \mathbf{g} \quad (3)$$

$$\mathbf{I}_c^{(m)} \dot{\boldsymbol{\omega}}_c^{(m)} = -\rho_f \sum_{l=1}^{N_L} (\mathbf{X}_l^{(m)} - \mathbf{x}_c^{(m)}) \times \mathbf{X}_l^{(m)} \Delta V_l^{(m)} + \rho_f \frac{d}{dt} \int_{S_m} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c^{(m)}) \times \mathbf{u} dV \quad (4)$$

と表される。ここで、 $\mathbf{u}_c^{(m)}$ 、 $\boldsymbol{\omega}_c^{(m)}$ 、 $\mathbf{x}_c^{(m)}$ 、 $M_c^{(m)}$ 、 $\mathbf{I}_c^{(m)}$ 、 $V_c^{(m)}$ 、 $\rho_c^{(m)}$ 、 $S_m$  はそれぞれ  $m$  番目の粒子の重心速度、重心周りの角速度、重心位置、質量、慣性テンソル、体積、密度、内部領域であり、 $\mathbf{g}$  は重力加速度である。 $\mathbf{F}(\mathbf{X}_l^{(m)})$  は  $m$  番目の粒子の境界上の点  $\mathbf{X}_l^{(m)}$  での力であり、 $N_L$  は粒子の境界上の点の総数、 $\Delta V_l^{(m)}$  は各境界点に対する体積を表す。

## 3. 埋め込み境界法 (IBM)

埋め込み境界法 (IBM) は、物体の境界近傍の格子点に適切な体積力を付加することにより、境界上における滑りなし条件を満足させる手法である。このとき、物体内部も外部と同様の流体で満たされているとして計算を行う。境界近傍に付加する力は、次式より求める。

$$\mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{u}^{(d)} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \mathbf{r} \mathbf{h} \mathbf{s}^{n+\frac{1}{2}} \quad (5)$$

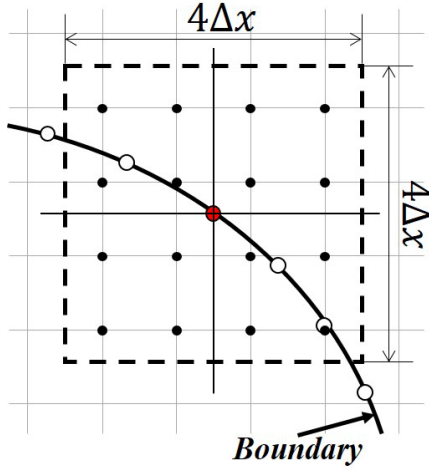


Fig. 1: Schematic of the immersed boundary.

ここで、 $\mathbf{u}^{(d)}$  はこの力が適用された場合の想定速度である。また、 $\mathbf{rhs}^{n+\frac{1}{2}}$  は、次式を表す。

$$\mathbf{rhs}^{n+\frac{1}{2}} = - \left\{ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_f} \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} \right\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (6)$$

物体境界上の点  $\mathbf{X}_l^{(m)}$  においても、式 (3) が成り立つので、

$$\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{U}^{(d)} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} - \mathbf{RHS}^{n+\frac{1}{2}} \quad (7)$$

が成り立つ。大文字は境界上の値を表す。物体境界上の点  $\mathbf{X}_l^{(m)}$  での想定速度は

$$\mathbf{U}^{(d)}(\mathbf{X}_l^{(m)}) = \mathbf{u}_c^{(m)} + \boldsymbol{\omega}_c^{(m)} \times (\mathbf{X}_l^{(m)} - \mathbf{x}_c^{(m)}) \quad (8)$$

と表される。ここで  $\mathbf{f} = 0$  とした NS 方程式を満足する速度を  $\tilde{\mathbf{U}}$  とすると、

$$\mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{U}^{(d)} - \tilde{\mathbf{U}}}{\Delta t} \quad (9)$$

が得られる。また、格子点上の流速から境界上の値や、境界上の力から格子点上の値は以下の形の補間を用いて評価する。

$$\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X}_l^{(m)}) = \sum \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) D(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l^{(m)}) \Delta x^3 \quad (10)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{N_p} \sum_{l=1}^{N_L} \mathbf{F}(\mathbf{X}_l^{(m)}) \Delta V_l^{(m)} \quad (11)$$

ここで  $\Delta x$  は格子幅である (各方向とも格子幅は  $\Delta x$  である)。また  $D(\mathbf{x})$  はデルタ関数を平滑化した関数、 $N_p$  は粒子の数である。本研究では  $D$  に次式を適用する。

$$D(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l^{(m)}) = \frac{1}{\Delta x^3} \delta_h(z_1) \delta_h(z_2) \delta_h(z_3) \quad (12)$$

$$z_i = \frac{x_i - X_{i_l}^{(m)}}{\Delta x}$$

$$\delta_h(z) = \begin{cases} \frac{1}{8}(3 - 2|z| + \sqrt{1 + 4|z| - 4z^2}) & 0 \leq |z| < 1 \\ \frac{1}{8}(5 - 2|z| - \sqrt{-7 + 12|z| - 4z^2}) & 1 \leq |z| < 2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (13)$$

また、式 (3)(4)(11) で用いる各境界点の体積は、球の場合直径を  $d_p$  とすると、 $\Delta V_l^{(m)} = \frac{\pi h}{3N_L} (3d_p^2 + \Delta x^2)$  である。本研究では、

$$\Delta V_l^{(m)} = \Delta V \sqrt{e_{ab} e_c^2 \sin^2 \theta_l^{(m)} + e_a^2 e_b^2 \cos^2 \theta_l^{(m)}} \quad (14)$$

$$e_{ab} = e_a^2 \sin^2 \phi_l^{(m)} + e_b^2 \cos^2 \phi_l^{(m)}$$

と与える。ここで、 $\Delta V = \frac{\pi h}{3N_L} (3d_p^2 + \Delta x^2)$  とし、楕円体の各軸長さと  $d_p$  との比を  $e_a, e_b, e_c$  としている。また、粒子の境界を表すマーカー点は Saff and Kuijlaars<sup>(5)</sup> によって提案された球に対する式を用いて決定する。マーカー一点の 3次元極座標  $(\theta_k, \phi_k, d/2)$  は以下の様に定義される。

$$\theta_k = \arccos(c_k), \quad c_k = -1 + \frac{2(k-1)}{(N_L-1)} \quad 1 \leq k < N_L \quad (15)$$

$$\phi_1 = \phi_k = 0, \quad \phi_k = \phi_{k-1} + \frac{3.6}{\sqrt{N_L}} \frac{1}{\sqrt{1-c_k^2}} \quad 1 < k < N_L \quad (16)$$

#### 4. クエット流中の回転楕円体の運動シミュレーション

##### 4.1 解析対象

ここでは、クエット流中の回転楕円体の運動について考える。回転楕円体粒子は次式で記述される。

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1 \quad (17)$$

$$e_a = 2a/d_p, \quad e_b = 2b/d_p, \quad e_c = 2c/d_p$$

ここで、 $a, b, c$  は楕円体の各主軸の半分の長さを表し、回転楕円体の場合、3つのうち2つが等しい。また、 $(x', y', z')$  は粒子に固定された座標系を意味する。クエット流の主流方向は  $x$  方向であり、速度勾配は  $y$  方向に生じている。

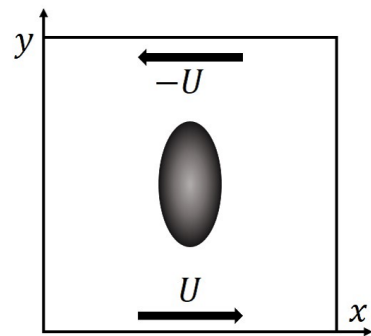


Fig. 2: Spheroidal particle in Couette flow.

$(N_x, N_y, N_z)$  は計算領域の格子点数及び大きさを示し、壁の動く速さは  $U$  である。また、Fig.2 に示す通り、それぞれ反対方向に動いているものとする。  $x, z$  方向は周期境界条件とした。粒子レイノルズ数は、

$$Re = \frac{4Ge^2}{\nu} \quad (18)$$

と定義した。ここで、せん断率は  $G = 2U/h$ ,  $h$  は壁間距離である。

#### 4.2 計算条件

流体との密度比が 1 である回転楕円体の運動については、 $Re = 0$  のときに Jeffery<sup>(4)</sup> の理論解に従う。そこで、Table.1 に示す計算条件の下で扁平な場合 (case A), 扁長な場合 (case B) のそれぞれについてクエット流中の回転楕円体の運動シミュレーションを行った。

Tab. 1: Computational condition.

	$U$	$Re$	$\nu$	$(N_x, N_y, N_z)$	$(a, b, c)$
case A	0.1	0.1	4	128, 128, 128	16, 16, 8
case B	0.1	0.1	16	128, 128, 128	8, 8, 16

#### 4.3 計算結果

case A の結果を Fig.3 に示す。クエット流中の回転楕円体の角速度は、 $\omega = (0, 0, \omega_z)$  であり、 $z$  成分のみとなり、扁平な粒子の場合、粒子は一定の角速度で回転する。Fig.3 に注目すると、粒子の角速度は徐々に大きくなり、 $Gt = 1$  を超えた辺りから Jeffery の理論解に収束していることが見て取れる。

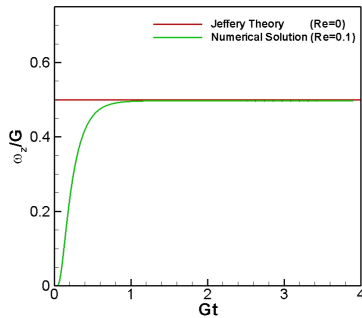


Fig. 3: Time development of angular velocity  $\omega_z/G$  in case A.

次に、収束後の  $\omega_z/G$  の値と理論解の定量的比較を行う。Table.2 より、 $\omega_z/G$  の収束値と理論解との誤差は 3.4 % となった。理論解に比べてレイノルズ数が大きいため、収束値が理論解よりも小さくなることが推測される。したがって、3.4 % の誤差は定量的に良好であると考えられる。

Tab. 2: Comparison with theoretical solution (case A).

	$\omega_z/G$
Present	0.483
Theoretical	0.500
Error	3.4 %

続いて、case B の結果を Fig.4 に示す。扁長な粒子の場合、角速度は時間と共に周期的に変化する。Fig.4 に注目すると、 $Gt = 0$  付近では、角速度が 0 から徐々に大きくなっているため、理論解とのずれが大きい。しかし、時間が経過するにつれ、理論解と同様に角速度が周期的な変化をしていることが分かる。よって、定性的に良好な結果が得られたと考えられる。

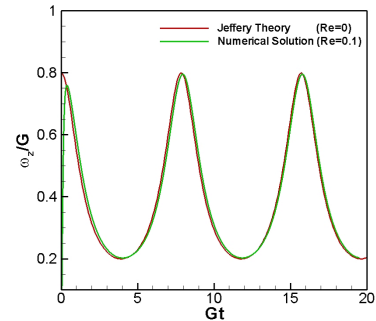


Fig. 4: Time development of angular velocity  $\omega_z/G$  in case B.

次に、 $\omega_z/G$  の極大と極小な点の値を理論解と定量的比較を行う。Table.3 より、極大点では 0.625 %、極小点では 1.50 % の誤差であった。両者ともに 1 % 前後の誤差となり、扁長な粒子の場合においても定量的に良好な結果が得られたと考えられる。

Tab. 3: Comparison with theoretical solution (case B).

	$(\omega_z/G)_{max}$	$(\omega_z/G)_{min}$
Present	0.795	0.203
Theoretical	0.800	0.200
Error	0.625 %	1.50 %

#### 5. 結論

本研究では、非球形な粒子を含む流れ場のシミュレーションを目的として、Uhlmann の IBM を用いたクエット流中の回転楕円体粒子の運動シミュレーションを行い、計算手法の有効性の検証を行った。その結果、扁平な粒子 (case A), 扁長な粒子 (case B) の両方について定性的にも定量的にも良好な結果が得られ、回転楕円体に対する有効性が確認された。

参考文献

- (1) M. Uhlmann, An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows, *Journal of Computational Physics* 209 , (2005), 448-476.
- (2) M. Uhlmann, Interface-resolved direct numerical simulation of vertical particulate channel flow in the turbulent regime, *Phys. Fluids*, 20, (2008), 053305.
- (3) T. Kempe, B. Vominckel and J. Fröhlich, On the relevance of collision modeling for interface-resolving simulations of sediment transport in open channel flow, *International Journal of Multiphase Flow* 58, (2014), 214-235.
- (4) G. B. Jeffery, The Motion of Ellipsoidal Particles Immersed in a Viscous Fluid, *Proc. R. Lond. A* 102, (1922), 161-179.
- (5) E.B. Saff, A.B. Kuijlaars, *The Mathematical Intelligencer*, 19-1, (1997), 5-11.