

埋め込み境界法を用いた非圧縮性流体解析における移流項離散化手法の検討

Study of Discretization Scheme for Advection Term in Incompressible Flow Simulation Using Immersed Boundary Method

- 坂井玲太郎、JAXA、東京都三鷹市大沢 6-13-1、sakai.ryotaro@jaxa.jp
- 石田崇、JAXA、東京都調布市深大寺東町 7-44-1
- 伊藤靖、JAXA、東京都三鷹市大沢 6-13-1
- 村山光宏、JAXA、東京都三鷹市大沢 6-13-1
- 山本一臣、JAXA、東京都三鷹市大沢 6-13-1
- Ryotaro Sakai, JAXA, 6-13-1 Osawa, Mitaka, Tokyo 181-0015
- Takashi Ishida, JAXA, 7-44-1 Jindaiji-higashi, Chofu, Tokyo 182-8522
- Yasushi Ito, JAXA, 6-13-1 Osawa, Mitaka, Tokyo 181-0015
- Mitsuhiro Murayama, JAXA, 6-13-1 Osawa, Mitaka, Tokyo 181-0015
- Kazuomi Yamamoto, JAXA, 6-13-1 Osawa, Mitaka, Tokyo 181-0015

This paper describes an immersed boundary method which improves solution accuracy in incompressible flow. In the present immersed boundary method, cells containing an object surface are not solved; wall boundary condition is virtually imposed at cell-face inside a fluid domain. In the context of overset grid methodology, discretization scheme for advection term near a wall boundary, and accuracy of wall boundary condition imposed by the immersed boundary method are investigated. Several test cases of flow over an inclined flat plate show that a high-order discretization scheme incorporated with the immersed boundary method, and using multiple reference points to determine wall boundary condition enable good prediction of velocity profile and friction coefficient in a laminar boundary layer.

1. 緒言

直交格子法は格子生成と空間解析精度の両面で利点を持つことから、近年の計算機性能の発達に伴って見直されつつあり、複雑形状に対する実用的な流体解析への適用が期待されている。格子生成については、複雑形状に対しても高速かつ自動で生成可能であり、解析にかかる時間の短縮と、格子生成に費やす労力の削減に大きく貢献できる。また、格子品質の良さから空間高次精度スキームの導入も容易であり、高い精度を要求する解析、例えば流体音響シミュレーションなどへの適用が期待できる。

一方で直交格子法の実用的な流体解析への適用に向けては、物体壁面の取り扱いと壁面乱流の解像に課題が残っている。直交格子法は自動格子生成を可能とする反面、物体壁面は一般に格子線とは一致せず、格子に沿わない物体の表現に特別な取り扱いが必要となる。加えて、等方直交格子の場合にはその格子点数が膨大になりやすく、高レイノルズ流れを直交格子単独で詳細に解像しようとするのは、大規模計算機をもってしても現実的なアプローチとは言い難い。壁面乱流を別途解像もしくはモデリングし、壁近傍の格子を節約する解法が求められる。

本研究ではこれらの課題のうち前者の解決策として、埋め込み境界法における精度の良い計算法を見出すことを目的に、オーバーセット法の枠組みの中でこれを検討した。埋め込み境界法¹⁾は実装が容易で演算量も比較的少ないことから、近年盛んに研究が進められている手法である。なかでも物体壁面や流体領域にプローブとなる点を配置するやり方の埋め込み境界法²⁾について、これらの点を補助的な格子とみなせば、一種のオーバーセット法と解釈することが可能である。本稿ではオーバーセット法で精度良く計算するためのポイントとなる手続きを挙げるとともに、それに相当する埋め込み境界法の操作として、移流項の離散化と境界条件の決定法を取り上げ、それぞれについて高精度化の検討を行った。平板を用いた検証計算を実施し、速度プロファイルと摩擦係数分布の比較を通して、各手法の有効性を確認した。

2. 数値解析手法

2.1. 計算格子

直交格子で解析を実施するにあたり、計算のフレームワークとして Building-Cube Method (BCM)³⁾を用いた。BCM による二次元円柱周りの格子生成例を Fig. 1 に示す。BCM では計算領域を階層的な正方形 (3 次元の場合は立方体) 小領域 (cube) に分割する。そして各々の cube について、計算格子としての等方間隔直交格子 (cell) を生成する。BCM は格子生成や空間高次精度化、並列化などの直交格子法の長所を保ちつつ、その cube/cell 構造から解適合細分化や後処理 (流体解析データ圧縮⁴⁾) での利点を併せ持つ。

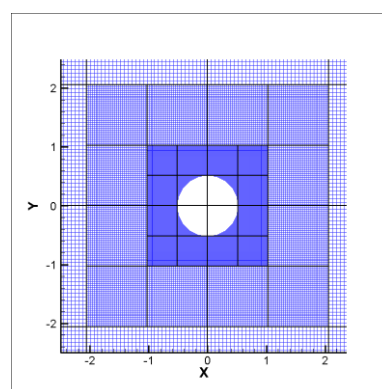


Fig. 1 Two-dimensional computational mesh in BCM

2.2. 支配方程式

本稿では解法の簡素化のために 2 次元非圧縮性流体を取り扱っているが、3.1 節で後述する埋め込み境界法について 3 次元への拡張は容易であること、また圧縮性流体への適用も可能であることを付記しておく。支配方程式として連続の式と 2 次元非圧縮性ナビエ・ストークス方程式を考える。

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2)$$

上式を速度と圧力の定義点が一致したコロケート格子上で離散化する。時間進行にはフラクショナルステップ法⁶⁾を用い、運動量補間法⁶⁾を用いて物理量の振動を抑制する。有限差分法に基づいて離散化を行っているが、移流項および粘性項はそれぞれ流束および速度勾配の発散の形で表し、各量のセル境界での出入りを考えて有限体積法的に評価する。移流項におけるセル境界面での流束は MUSCL 法⁷⁾に準じて評価し、粘性項におけるセル境界面での速度勾配の評価には二次精度中心差分を用いた。

2.3. 移流項の離散化

前節で述べた通り、移流項はセル境界での流束の出入りを考えて有限体積法的に評価する。セル中心からセル境界面への物理量の内挿には、圧縮性流体の計算に用いられる MUSCL 補間と同様にして行った。セル j と $j+1$ が接する境界 $j+1/2$ における物理量の内挿値は、境界の左右での値をそれぞれ u_L 、 u_R と表すと、以下の式で表される。

$$(u_L)_{j+1/2} = u_j + \frac{\varepsilon}{4} [(1-\kappa)(u_j - u_{j-1}) + (1+\kappa)(u_{j+1} - u_j)] \quad (3)$$

$$(u_R)_{j+1/2} = u_{j+1} - \frac{\varepsilon}{4} [(1+\kappa)(u_{j+1} - u_j) + (1-\kappa)(u_{j+2} - u_{j+1})] \quad (4)$$

ここで ε は精度を決定するパラメータであり、 $\varepsilon = 0$ では 1 次精度 (風上差分)、 $\varepsilon = 1$ では高次精度となる。 $\varepsilon = 1$ のもとで κ は内挿の次数を決定するパラメータであり、 $\kappa = 1$ で 2 次精度 (中心差分)、 $\kappa = 1/3$ で 3 次精度 (風上差分) となる。このように ε および κ の値を適当に設定することで、MUSCL 補間の枠組みの中でさまざまな精度の内挿法を表現することが可能である。本研究では物体から離れた空間領域で $\varepsilon = 1$ か $\kappa = 1/3$ 、すなわち 3 次精度とする一方、物体近傍では後述の通り各パラメータの値を変化させた。求めた内挿値を用いて、セル境界面での流束を以下の式で定義する。

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \{ U_{j+1/2} \cdot (u_R)_{j+1/2} + U_{j+1/2} \cdot (u_L)_{j+1/2} - |U_{j+1/2}| [(u_R)_{j+1/2} - (u_L)_{j+1/2}] \} \quad (5)$$

ここで、 $U_{j+1/2}$ はセル境界面で定義され、圧力ポアソン方程式の右辺にあたる連続の式を構成する速度成分である。最終的に移流項の差分式を、 Δ を格子幅として以下のように構成する。

$$adv_j = \frac{1}{\Delta} (\tilde{f}_{j+1/2} - \tilde{f}_{j-1/2}) \quad (6)$$

2.4. 粘性項の離散化

2.2 節で述べた通り、粘性項はセル境界での速度勾配から有限体積法的に評価する。セル境界面での速度勾配は隣り合うセルの値

を用いて、二次精度中心差分で評価する。

$$\tilde{g}_{j+1/2} = \frac{1}{\Delta} (u_{j+1} - u_j) \quad (7)$$

なお埋め込み境界法では後述の通り、物体が存在するセルについては流れを解かず、流体領域のセル境界面で境界条件を課している。こうしたセルについては境界面での物理量 (与え方は後述) を参照して片側差分で評価する。

$$\tilde{g}_{j+1/2} = \frac{1}{0.5\Delta} (u_{j+1/2} - u_j) \quad (8)$$

最終的に粘性項の差分式を以下のように構成する。

$$vis_j = \frac{\nu}{\Delta} (\tilde{g}_{j+1/2} - \tilde{g}_{j-1/2}) \quad (9)$$

3. 壁面境界条件

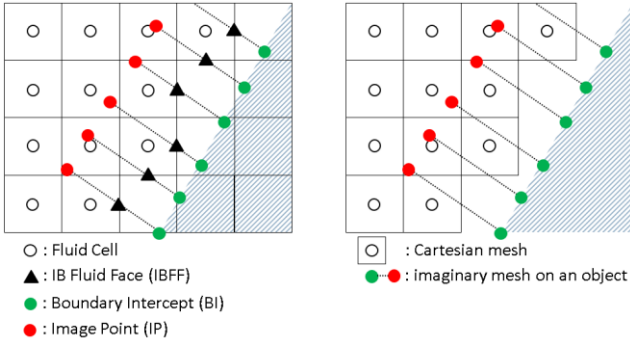
3.1 埋め込み境界法

直交格子上的物体壁面の表現には埋め込み境界法を用いた。物体壁面近傍の直交格子を Fig. 2(a) に示す。直交格子と物体壁面の重なりに対して、流体領域のセル境界面で境界条件を課す手法⁽⁸⁾⁽⁹⁾を採用し、物体が存在するセルについては流れを解いていない⁹⁾。Fig. 2(a) において、境界条件を課すセル境界面の中心を IB Fluid Face (IBFF) と定義し、IBFF から物体壁面と垂直方向に補助点を取る。補助点は物体壁面との交点として Boundary Intercept (BI)、そして流体領域のプローブとして Image Point (IP) の 2 種類を定義する。IP の位置の定義については 3.3 節で後述する。BI での境界条件と IP で取得される流れの物理量、それに IBFF、BI、IP の幾何学的関係を用いて適切な境界条件を課すことで、流れ場に存在する物体壁面を表現する。

ところで、上述の通り定義される BI と IP で構成される領域を簡易な格子とみなせば、埋め込み境界法は一種のオーバーセット法になっていると解釈できる (Fig. 2 (b))。ここで直交格子が計算空間を占める格子 (背景格子)、そして BI-IP 間の領域が物体表面上に生成された別格子 (物体周辺格子) に相当する。オーバーセット法で精度良く計算するためのポイントとなる手続きとして、

- (1) 背景格子から物体周辺格子へ、物理量を適切に与える
- (2) 物体周辺格子内で適切に流れ場を解く
- (3) 物体周辺格子から背景格子へ、物理量を適切に返す

の 3 点が挙げられる。それぞれの手続きを埋め込み境界法で解釈すると、手続き (1) については、直交格子から IP へ物理量を内挿する操作が相当する。これについては、本研究では IP を取り囲む周囲 4 点の格子が持つ物理量からバイリニア補間で求めるものとし、検討の対象からは外している。手続き (2) については、BI-IP 間で実際には流れの方程式を解いていないものの、BI と IP での物理量に基づいて IBFF での物理量を求める操作が相当すると考え、その内挿方法を検討した。手続き (3) については、境界条件を課す位置は Fig. 2(a) 中の IBFF で固定しているが、関連して IBFF 近傍での離散化の仕方が相当するものと考え、移流項の離散化手法を検討した。以降の各節ではまず手続き (3) と、続いて手続き (2) に相当する操作について、適切な手法を検討する。



(a) Cartesian mesh over an object (b) imaginary overset mesh method
Fig. 2 Immersed Boundary Method

3.2 IB Fluid Face 近傍での移流項の離散化手法の検討

埋め込み境界法による境界条件は前節で述べた通り、流体領域に存在するセル境界面 IBFF において課される。IBFF での流束は埋め込み境界法で与える一方、IBFF から 1 点流体側のセル境界面においては、MUSCL 補間で参照するセルが不足する (Fig. 3)。式 (3)、(4) で示した通り、MUSCL 補間では境界に対して両隣 2 つのセルを参照するが、Fig. 3 中の白抜き三角で示したセル境界面では、物体壁側で参照できるセルが 1 つしか存在しない。

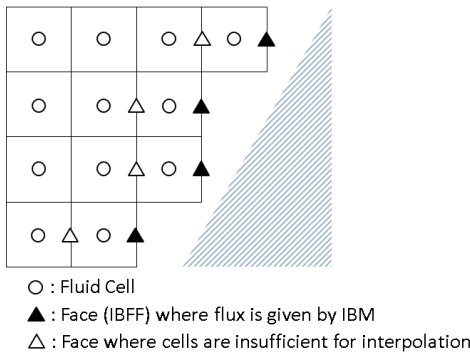


Fig. 3 Cell-faces near an object boundary

このようなセル境界面に対して、4 通りの離散化手法を検討する。以下では対象となるセル境界面の添字を $j+1/2$ とし、添字の増える方向に物体壁があり、セル $j+2$ が存在しないものとして説明する。まずは単純な対処法として、参照されるセルを減らして両隣 1 つずつに変更するアプローチ 2 通りを検討する。

Approach 1-1 : 1 次精度 (風上差分)

MUSCL 補間の式 (3)、(4) において、 $\varepsilon=0$ とする。このとき、内挿値は両隣のセルから向きに応じて左右異なる値を参照し、1 次精度となる。

$$(u_L)_{j+1/2} = u_j \quad (10)$$

$$(u_R)_{j+1/2} = u_{j+1} \quad (11)$$

Approach 1-2 : 2 次精度 (中心差分)

MUSCL 補間の式 (3)、(4) において、 $\varepsilon=1$ かつ $\kappa=1$ とする。このとき、内挿値は左右で等しくなり、境界面に隣合うセル 2 つの値の算術平均で 2 次精度となる。

$$(u_L)_{j+1/2} = (u_R)_{j+1/2} = \frac{1}{2}(u_{j-1} + u_j) \quad (12)$$

続いて、不足するセルの代わりに埋め込み境界法で与えられる境界条件を参照することで、セルの不足を補うアプローチ 2 通りを検討する。ここでは存在しないセル $j+2$ の代わりに、IBFF の位置に相当する添字 $j+3/2$ での値を参照する。通常はセル中心位置で物理量が定義されるのに対し、埋め込み境界法ではセル境界位置に物理量が定義され、両者の物理量を参照することから、IBFF 近傍を不等間隔格子とみなして内挿を実施する。

Approach 1-3 : 3 次精度 (風上差分)

3 点を用いた多項式近似で物理量を内挿する。このとき、内挿は向きに応じて左右異なるものとなり、3 次精度となる。

$$(u_L)_{j+1/2} = \frac{1}{8}(-u_{j-1} + 6u_j + 3u_{j+1}) \quad (13)$$

$$(u_R)_{j+1/2} = \frac{1}{3}(u_j + 3u_{j+1} - u_{j+3/2}) \quad (14)$$

Approach 1-4 : 4 次精度 (中心差分)

4 点を用いた多項式近似で物理量を内挿する。このとき、内挿値は左右で等しいものとして、4 次精度となる。

$$(u_L)_{j+1/2} = (u_R)_{j+1/2} = \frac{1}{20}(-u_{j-1} + 20u_j + 15u_{j+1} - 4u_{j+3/2}) \quad (15)$$

Approach 1-1、1-3 では u_L 、 u_R が異なる値となり、(5) 式での流束の評価において、移流の向きに応じた風上化の効果が含まれる。したがって最終的な差分式 (6) は風上差分となる。一方、Approach 1-2、1-4 では u_L 、 u_R は両者等しくなり、(5) 式での流束の評価には風上化の効果が含まれない。したがって最終的な差分式 (6) は中心差分となる。

3.3 IB Fluid Face での速度と圧力の決定手法の検討

BI と IP での物理量に基づいて IBFF での物理量を求める際、IP を 1 点だけでなく複数用意することで、高次での内挿が可能となり、計算の高精度化が見込まれる。ここでは IP を 1 点使う場合と、2 点使う場合について検討する。以下では壁面近傍での直交格子の格子幅を Δ 、また壁面から IBFF までの距離を d_F と定義して説明する。

Approach 2-1 : IP を 1 点用いる (Fig. 4(a))

壁面上の BI と、流体中の IP の計 2 点を使って内挿する。壁面から IP までの距離 d は $d=2\Delta$ とした。速度については壁面上での滑りなし条件に基づき、2 点から線形分布を仮定して求める。

$$u_{IBFF} = \frac{d_F}{d} u_{IP} \quad (16)$$

$$v_{IBFF} = \frac{d_F}{d} v_{IP} \quad (17)$$

圧力については、壁面上でのノイマン条件に基づき、IP での物理量から 0 次の分布を仮定して求める。

$$p_{IBFF} = p_{IP} \quad (18)$$

Approach 2-2 : IP を 2 点用いる (Fig. 4(b))

壁面上の BI と、流体中の IP1、IP2 の計 3 点を使って内挿する。壁面から IP1、IP2 までの距離 d_1 、 d_2 はそれぞれ $d_1 = 2\Delta$ 、 $d_2 = 4\Delta$ とした。速度については壁面上での滑りなし条件に基づき、3 点から二次関数分布を仮定して求める⁽¹⁰⁾。

$$u_{IBFF} = d_F A_u + d_F (d_F - d_1) B_u \quad (19)$$

ただし、

$$A_u = \frac{u_{IP1}}{d_1} \quad (20)$$

$$B_u = \frac{u_{IP2} - u_{IP1} - A}{d_2 - d_1} \quad (21)$$

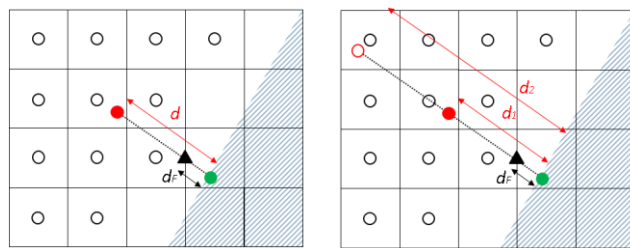
ここでは壁面水平・垂直方向の速度成分それぞれに対して内挿を実行し、対応する速度成分 $u_{IBFF,normal}$ 、 $u_{IBFF,tangential}$ を得たのち、これらを直交方向の速度成分に変換する。圧力については壁面上でのノイマン条件に基づき、IP1、IP2 での物理量から、二次関数分布を仮定して求める。

$$p_{IBFF} = A_p d_F^2 + B_p \quad (22)$$

ただし、

$$A_p = \frac{p_{IP2} - p_{IP1}}{d_2^2 - d_1^2} \quad (23)$$

$$B_p = \frac{-d_1^2 p_{IP2} + d_2^2 p_{IP1}}{d_2^2 - d_1^2} \quad (24)$$



○ : Fluid Cell
▲ : IB Fluid Face (IBFF)
● : Boundary Intercept (BI)
● : Image Point (IP)

○ : Fluid Cell
▲ : IB Fluid Face (IBFF)
● : Boundary Intercept (BI)
● : Image Point 1 (IP1)
○ : Image Point 2 (IP2)

(a) 2-1: using single image point (b) 2-2: using two image points
Fig. 4 Definitions of IP location

4. 検証計算結果

本章では、前章で検討したそれぞれのアプローチについて、平板層流境界層を対象とした計算を通じて有効性を検証する。はじめに 3.2 節で述べた IBFF 近傍での移流項の離散化手法について、Approach 1-1 から 1-4 の比較結果を示す。続いて、3.3 節で述べた

IBFF での速度と圧力の決定方法について、Approach 2-1 と 2-2 の比較結果を示す。最後に、比較から得られた有効なアプローチを採用して、さまざまな傾きの平板を計算した結果を示す。

平板が格子に沿わない状態を再現するため、格子線から角度 θ だけ傾けて平板を配置する。 $\theta = 15$ [deg.] の場合の BCM 計算格子 (cube) を Fig. 5 に示す。計算に用いた格子サイズ Δ は、平板上で角度によらず一定のサイズとした。 $\theta = 0$ [deg.] のとき平板は直交格子境界と一致するが、この場合にも埋め込み境界法の有効性確認のため、平板を格子線から $\Delta/8$ だけずれた位置に配置した。平板の境界条件は既存の論文の手法⁽¹⁰⁾を参考とし、平板の途中で滑り条件から滑りなし条件へと切り替えている。この平板上での切り替えの位置を原点とし、平板に沿う方向に X 軸、平板と垂直方向に Y 軸を取り、X 軸方向の長さ x を用いてレイノルズ数を定義する。

$$Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \quad (25)$$

このレイノルズ数が $Re_x = 156, 625, 2500, 10000$ となる 4 点での X 軸方向速度成分のプロファイルを取得した。プロファイルは、その位置での格子サイズを境界層厚さ δ_{BL} で無次元化した値に基づいて整理している。境界層厚さは x に依存して変化するが、これを境界層内の速度が主流速度の 99% となるときの壁からの位置と定義すると、以下の式で表される⁽¹¹⁾。

$$\delta_{BL} \approx 5.0 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} = \frac{5.0x}{\sqrt{Re_x}} \quad (26)$$

この式より得られる境界層厚さで無次元化した格子幅は、それぞれ $\Delta/\delta_{BL} = 3.13 \times 10^{-1}, 1.56 \times 10^{-1}, 7.81 \times 10^{-2}, 3.91 \times 10^{-2}$ である。無次元化した格子幅の逆数をとることでその位置での境界層内の格子点数が得られ、それぞれ 3, 6, 13, 26 点程度となる。

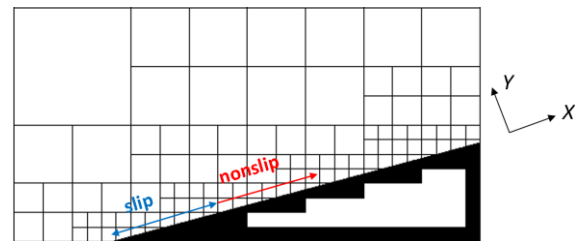


Fig. 5 Inclined flat plate in computational domain

4.1. 物体近傍での移流項の離散化手法の検証

本節では IBFF での速度と圧力の決定手法を Approach 2-1 で固定し、IBFF 近傍での移流項の離散化手法を Approach 1-1 から 1-4 と変更し比較した。本節では $\theta = 0$ [deg.] とともに、後述する $\theta = 15, 30, 45$ [deg.] のうち、最も誤差の大きい $\theta = 15$ [deg.] について、改善の度合いを示した。

Fig. 6、Fig. 7 に $\theta = 0, 15$ [deg.] の場合の速度プロファイルをそれぞれ示す。(a) から (d) は速度プロファイルを取得した 4 点に対応している。格子が細くなるにつれてプロットはブラジウス解へと収束し、その振る舞いは $\theta = 0, 15$ [deg.] で似たものとなっている。そしていずれの角度、いずれのアプローチであっても、 $\Delta/\delta_{BL} = 3.91 \times 10^{-2}$ の場合には、プロットがブラジウス解と重なる。傾きによる顕著な違いが見られるのは Approach 1-1 で、 $\theta = 15$ [deg.] で $\Delta/\delta_{BL} = 1.56 \times 10^{-1}$ および 7.81×10^{-2} の場合に、他のアプローチと比べてブラジウス解からの誤差が大きい。

それぞれのアプローチの定量的な比較として、壁面第一点目でのブラジウス解との誤差をプロットしたグラフを Fig. 8 に示す。 $\theta = 0$ [deg.] の場合には、明らかに解像度の低い $\Delta/\delta_{BL} = 3.13 \times 10^1$ を除けば、誤差は Approach 1-1 が最も大きく、次いで 1-2、最も小さいのが 1-3、1-4 で、この 2 つは同程度の誤差になっている。また、どのアプローチもおおむね 2 次精度の傾きで誤差が減少している。一方 $\theta = 15$ [deg.] の場合には、誤差の大きい順は $\theta = 0$ [deg.] と変わらないものの、Approach 1-1 の誤差が他のアプローチに比べて相対的に大きい。誤差の傾きとしてはおおむね 2 次精度となっており、格子を細かくした場合には $\theta = 0$ [deg.] の場合と同様の解の誤差の減少が見込まれる。

Fig. 9 にレイノルズ数に応じた流れ方向の壁面摩擦係数の変化を示す。グラフには無次元格子幅の変化も併記しており、無次元格子幅を示す実線中 4 つのプロットが速度プロファイルを取得した 4 点に対応する。速度プロファイルでは前述のとおり $\theta = 0$ [deg.] と 15 [deg.] で似たような収束の振る舞いを示していたが、壁面摩擦係数では $\theta = 15$ [deg.] で収束が遅くなる様子が見られ、とりわけ Approach 1-1 では収束が遅くなっている。Fig. 9(b) では $Re_x = 10000$ 、無次元格子幅にして $\Delta/\delta_{BL} = 3.91 \times 10^2$ でブラジウス解と重なることから、格子に沿わない平板での壁面摩擦係数の予測には、この程度の格子解像度が必要になると考えられる。

4.2. 速度と圧力の補間値の算出方法の検証

本節では移流項の離散化手法を Approach 1-2 で固定し、IBFF での速度と圧力の決定手法を、速度と圧力それぞれで Approach 2-1 と Approach 2-2 に変更し、計 4 通りで比較した。計算は $\theta = 15$ [deg.] の平板について実施した結果を示す。

Fig. 10 に流れ方向 4 点での速度プロファイルを示す。格子解像度の向上に伴うブラジウス解への収束の振る舞いは前節での結果と似たものとなっているが、Approach 2-2 としたほうが、Approach 2-1 よりもブラジウス解により近づく傾向にある。定量的な比較として、壁面第一点目でのブラジウス解との誤差をプロットしたグラフを Fig. 11 に示す。速度と圧力の双方を Approach 2-2 とした場合に誤差が最も小さくなり、次いで速度のみ Approach 2-2 とした場合、圧力のみ Approach 2-2 とした場合が続き、前節でも示した速度と圧力の双方を Approach 2-1 とした場合に誤差が最も大きい。誤差の傾きとしては、4 つのアプローチでいずれも前節と同様におおむね 2 次精度となった。

Fig. 12 にレイノルズ数に応じた流れ方向の壁面摩擦係数の変化を示す。Approach 2-2 とすることで、壁面摩擦係数にも改善が見られる。しかしながら、 Re_x が大きくなるにつれて改善の度合いは小さくなり、最終的にブラジウス解と重なり始める位置としては $Re_x = 10000$ 、無次元格子幅にして $\Delta/\delta_{BL} = 3.91 \times 10^2$ 程度と、前節の場合と差は見られなかった。

4.3. 傾いた平板の計算

前節までの結果より有効なアプローチとして、移流項の離散化に Approach 1-4 と、速度と圧力の双方で Approach 2-2 とすることが示された。本節ではこれらのアプローチを採用し、平板の傾きを $\theta = 0, 15, 30, 45$ [deg.] と 4 通りに変化させて計算した結果を示す。

Fig. 13 に流れ方向 4 点での速度プロファイルを示す。いずれの角度においても、ブラジウス解への収束の振る舞いは似たものとなっており、 $Re_x = 2500$ 、無次元格子幅にして $\Delta/\delta_{BL} = 7.81 \times 10^2$ の場合にブラジウス解と重なる。この結果から、Approach 1 と Approach 2 の適切な組み合わせにより、 $\Delta/\delta_{BL} = 7.81 \times 10^2$ 程度の格子解像度を取ることで、格子に沿わない平板の速度プロファイルを正確に予測できるといえる。

Fig. 14 にレイノルズ数に応じた流れ方向の壁面摩擦係数の変化を示す。速度プロファイルと異なり、角度によって収束の振る舞いに違いが見られ、格子に沿わない平板上で壁面摩擦係数を算出する難しさを示唆している。しかしながら、壁面摩擦係数の算出で前節までの議論の対象としてきた格子解像度 $\Delta/\delta_{BL} = 3.91 \times 10^2$ 程度であれば、いずれの角度であってもブラジウス解とほぼ重なる様子が見取れる。

5. 結言

埋め込み境界法における精度の良い計算法を見出すことを目指して、オーバーセット法でポイントとなる手続きに基づき、高精度化の可能性を検討した。検討の対象としたのは物体境界近傍での移流項の離散化手法、それに埋め込み境界の境界条件としての速度と圧力の決定法である。それぞれの手法について、平板層流境界層の発達問題で検証を行った。

移流項の離散化手法の検証では、物体壁が格子に沿わない場合に、物体近傍で 1 次精度の内挿（風上差分）を使うとブラジウス解との誤差が大きくなることを示した。一方で、埋め込み境界法の境界条件と組み合わせて高次精度の内挿とすることで、誤差を小さくできることを示した。

境界条件の決定法の検証では、速度と圧力のいずれにおいても、IP を 1 点から 2 点に増やして高次で内挿を行うことで、ブラジウス解との誤差を小さくできることを示した。とくに速度の IP を 2 点に増やすことの効果が大きく、また Re_x の小さい領域で誤差がより小さくなった。

最後に検証した手法を用いて、さまざまな角度の平板を計算した。格子に沿わない平板上に発達する層流境界層に対して、本稿で提案する埋め込み境界法を用いた場合、速度プロファイルに対しては格子幅を境界層厚さの 8% 程度、格子点数を境界層内部に 13 点程度とすることで、ブラジウス解に一致した。また壁面摩擦係数についても、格子幅を境界層厚さの 4% 程度、格子点数を境界層内部に 26 点程度とすることで、正確に捉えられることを示した。

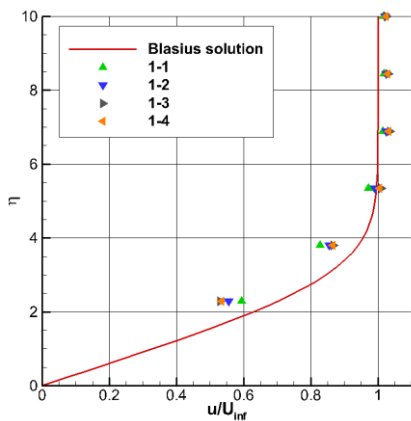
今回の移流項離散化手法の検討においては、単純な平板境界層を対象としたこともあり、高次精度の内挿として検討した 3 次精度（風上差分）と 4 次精度（中心差分）でほとんど違いが見られなかった。今後はさらに複雑な流れで検証を進めることで、人工粘性の影響やその必要性を詳細に議論できると考える。加えて、粘性項の精度の良い離散化手法、そして埋め込み境界法に特有の保存性の課題についても、確認と検証を進めていきたい。

参考文献

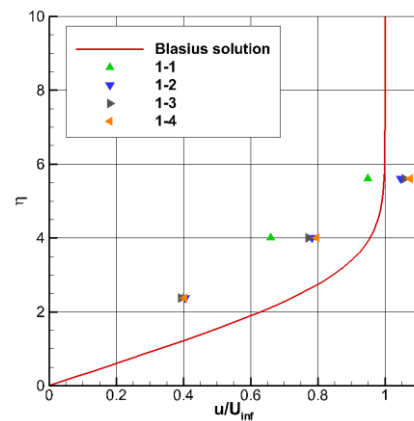
- (1) Mittal, R. and Iaccarino, G., "Immersed boundary methods," *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 37, pp. 239-261 (2005).
- (2) Mittal, R. et al., "A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries," *Journal of Computational Physics*, 227, pp. 4825-4852 (2008).
- (3) Nakahashi, K., "High-Density Mesh Flow Computations with Pre-/Post-Data Compressions," AIAA Paper 2005-4876 (2005).
- (4) Sakai, R., Sasaki, D., Obayashi, S., and Nakahashi, K., "Wavelet - based data compression for flow simulation on block - structured Cartesian mesh," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 73(5), pp. 462-476 (2013).
- (5) Kim, J. and Moin, P., "Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations," *Journal of Computational Physics*, 59, pp. 308-323 (1985).
- (6) Rhie, C. M. and Chow, W. L., "Numerical Study of the Turbulent

- Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation,” *AIAA Journal*, 21, pp. 1525-1532 (1983).
- (7) 藤井孝蔵, 流体力学の数値計算法, 東京大学出版会.
 - (8) Capizzano, F., “Turbulent wall model for immersed boundary methods,” *AIAA journal*, 49(11), pp. 2367-2381 (2011).
 - (9) 高橋悠一、今村太郎、埋め込み境界法と SA 乱流モデルに基づく壁関数を用いた定常流解析、第 27 回数値流体力学シンポジウム (2013).
 - (10) Berger, M., Aftosmis, M. J., and Allmaras, S., “Progress towards a Cartesian cut-cell method for viscous compressible flow,” *AIAA Paper 2012-1301* (2012).
 - (11) Schlichting, H., Gersten, K., “Boundary Layer Theory (8th edition),” Springer (1999).

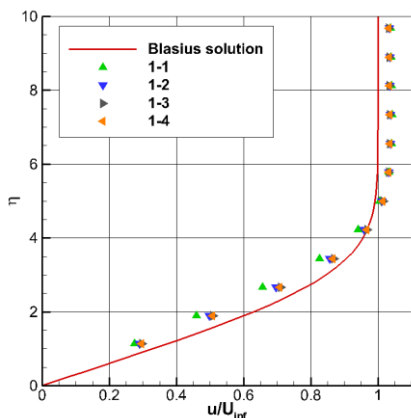
(a) $\Delta/\delta_{BL}=3.13\times 10^{-1}$
($Re_x = 156$)



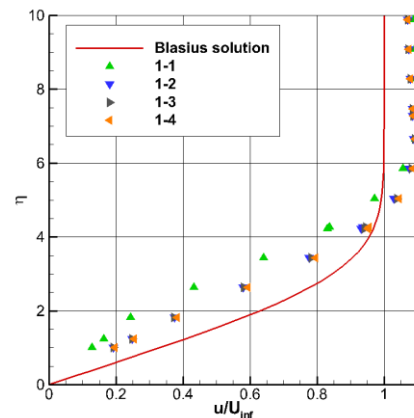
(a) $\Delta/\delta_{BL}=3.13\times 10^{-1}$
($Re_x = 156$)



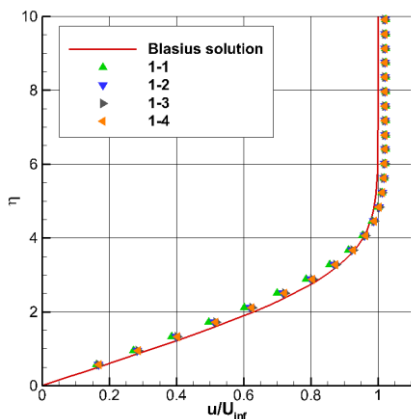
(b) $\Delta/\delta_{BL}=1.56\times 10^{-1}$
($Re_x = 625$)



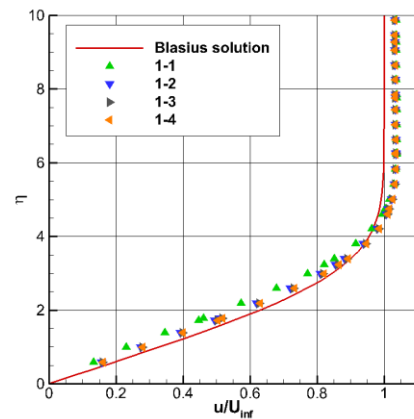
(b) $\Delta/\delta_{BL}=1.56\times 10^{-1}$
($Re_x = 625$)



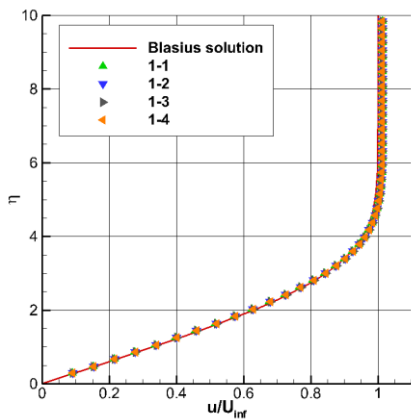
(c) $\Delta/\delta_{BL}=7.81\times 10^{-2}$
($Re_x = 2500$)



(c) $\Delta/\delta_{BL}=7.81\times 10^{-2}$
($Re_x = 2500$)



(d) $\Delta/\delta_{BL}=3.91\times 10^{-2}$
($Re_x = 10000$)



(d) $\Delta/\delta_{BL}=3.91\times 10^{-2}$
($Re_x = 10000$)

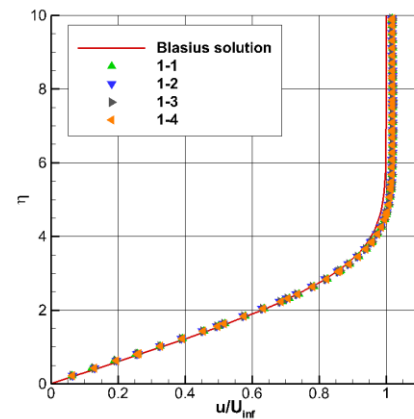
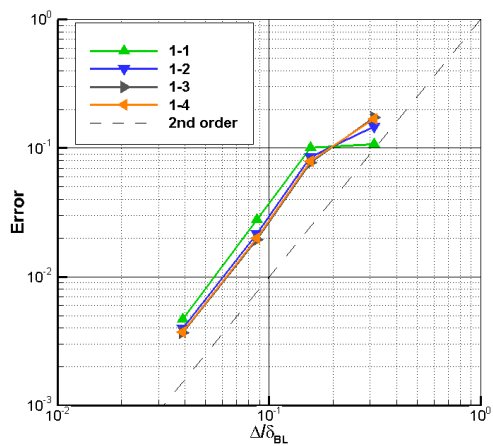
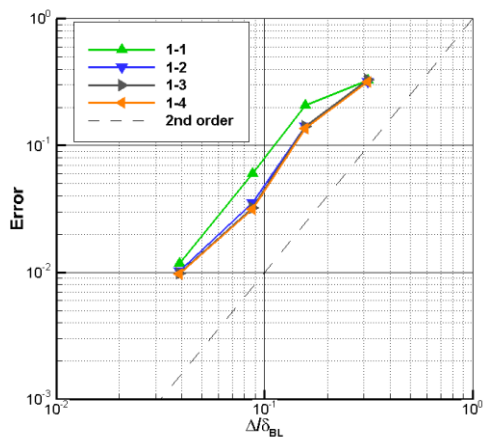


Fig. 6 Comparison of velocity profile
among Approach 1-1, 1-2, 1-3, and 1-4
($\theta=0$ [deg.], with Approach 2-1 fixed)

Fig. 7 Comparison of velocity profile
among Approach 1-1, 1-2, 1-3, and 1-4
($\theta=15$ [deg.], with Approach 2-1 fixed)

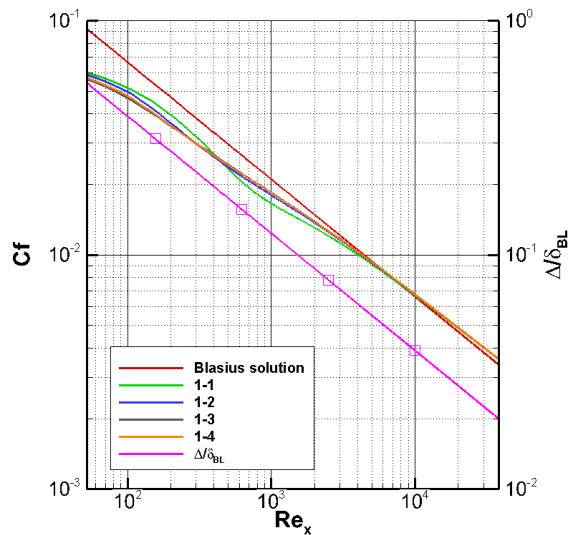


(a) $\theta = 0$ [deg.]

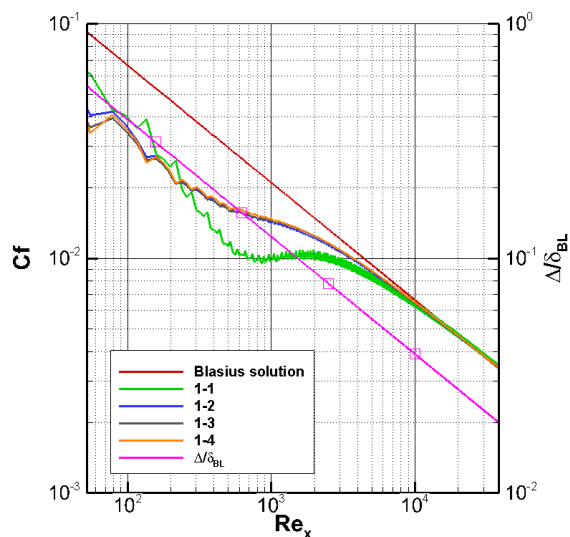


(b) $\theta = 15$ [deg.]

Fig. 8 Comparison of error for the streamwise velocity in the 1st grid point among Approach 1-1, 1-2, 1-3, and 1-4 (with Approach 2-1 fixed)



(a) $\theta = 0$ [deg.]



(b) $\theta = 15$ [deg.]

Fig. 9 Comparison of skin friction coefficient among Approach 1-1, 1-2, 1-3, and 1-4 (with Approach 2-1 fixed)

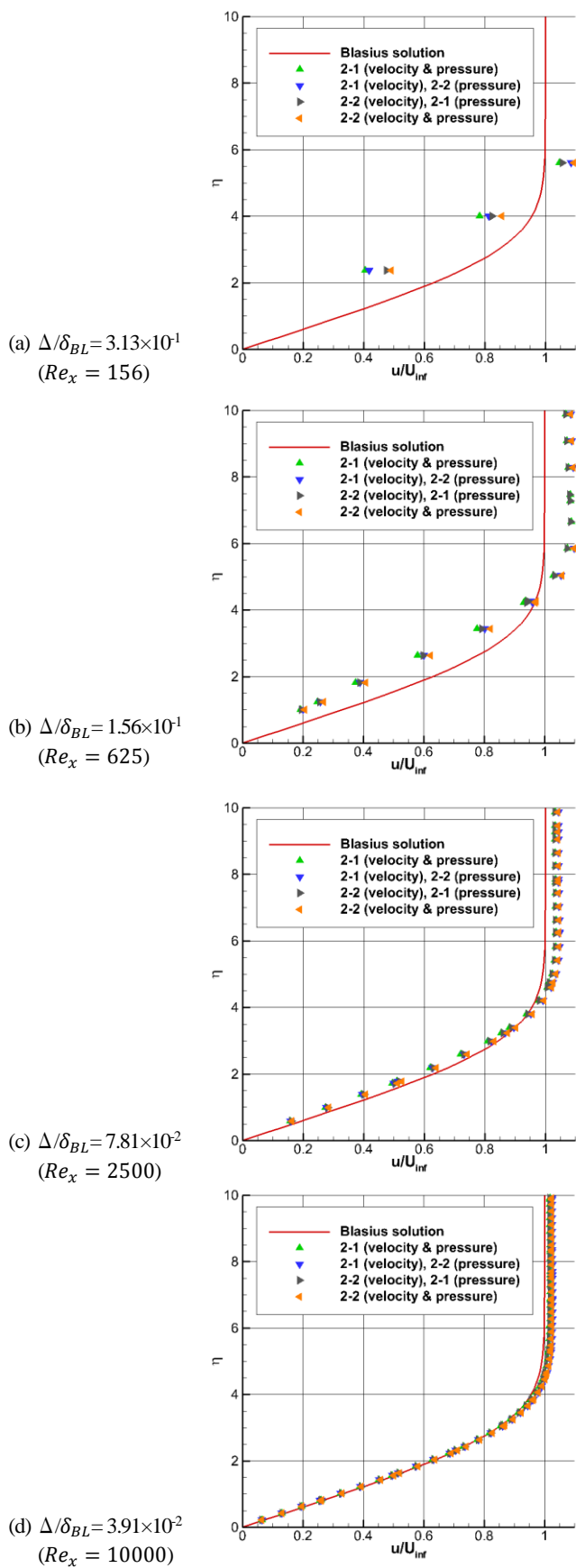


Fig. 10 Comparison of velocity profile
between Approach 2-1 and 2-2
($\theta = 15$ [deg.], with Approach 1-2 fixed)

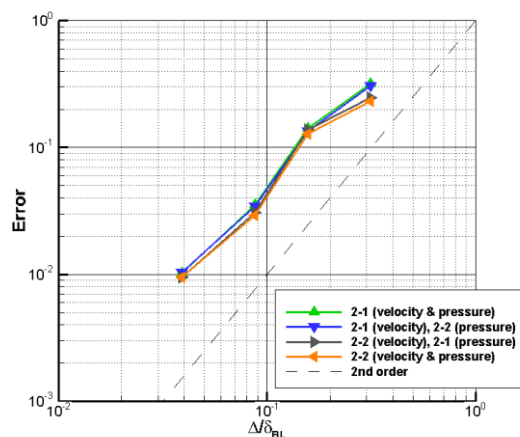


Fig. 11 Comparison of error for the streamwise velocity
in the 1st grid point between Approach 2-1 and 2-2
($\theta = 15$ [deg.], with Approach 1-2 fixed)

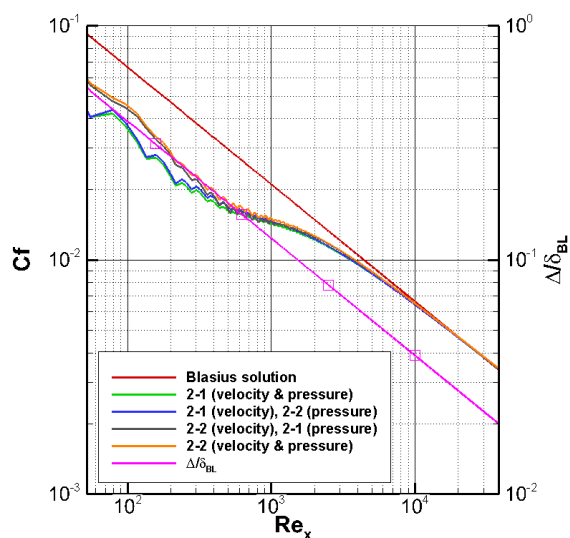
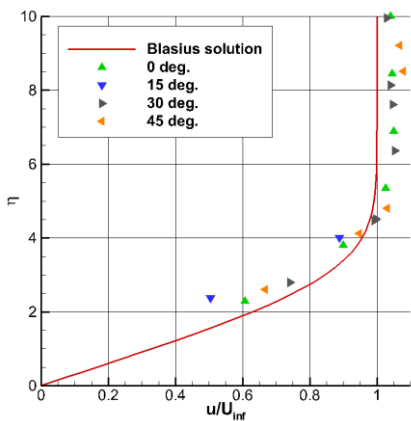
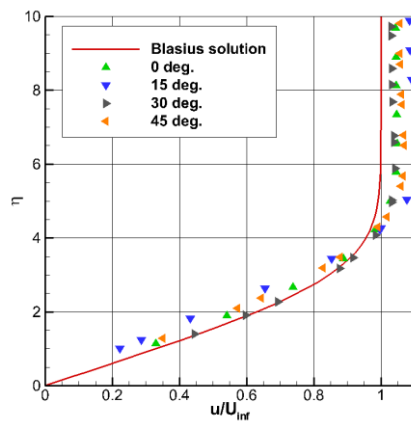


Fig. 12 Comparison of skin friction coefficient
between Approach 2-1 and 2-2
($\theta = 15$ [deg.], with Approach 1-2 fixed)

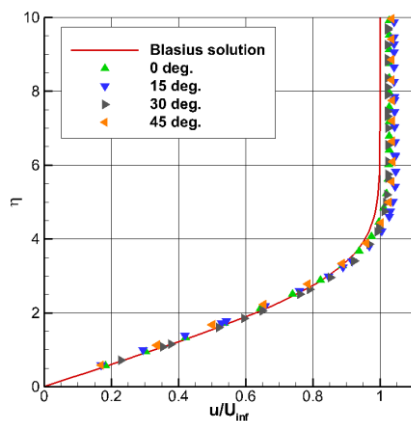
(a) $\Delta/\delta_{BL} = 3.13 \times 10^{-1}$
($Re_x = 156$)



(b) $\Delta/\delta_{BL} = 1.56 \times 10^{-1}$
($Re_x = 625$)



(c) $\Delta/\delta_{BL} = 7.81 \times 10^{-2}$
($Re_x = 2500$)



(d) $\Delta/\delta_{BL} = 3.91 \times 10^{-2}$
($Re_x = 10000$)

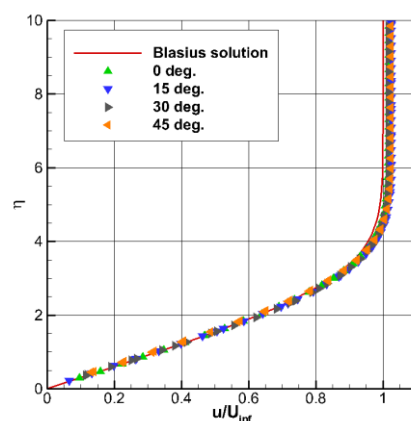


Fig. 13 Comparison of velocity profile among $\theta = 0, 15, 30,$ and 45 [deg.] (with Approach 1-4 and 2-2 used)

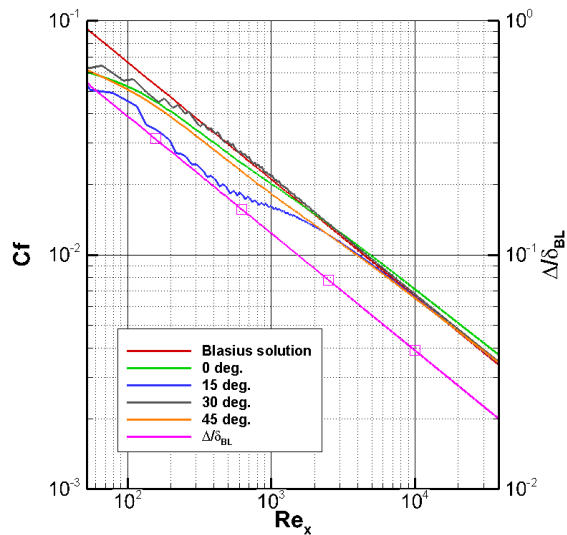


Fig. 14 Comparison of skin friction coefficient among $\theta = 0, 15, 30,$ and 45 [deg.] (with Approach 1-4 and 2-2 used)