第 30 回数値流体力学シンポジウム
講演番号 D08-2

埋め込み境界法による乱流中の固体粒子の数値シミュレーション

Numerical simulation by an immersed boundary method of particulate turbulence

○ 岡 温，阪大 基礎工，大阪府豊中市待兼山町 1-3，E-mail：s_oka@fm.me.es.osaka-u.ac.jp
後藤 晋，阪大 基礎工，大阪府豊中市待兼山町 1-3，E-mail：goto@me.es.osaka-u.ac.jp
Sunao Oka, Osaka University, 1-3 Machikaneyama, Toyonaka, Osaka, 560-8531, Japan
Susumu Goto, Osaka University, 1-3 Machikaneyama, Toyonaka, Osaka, 560-8531, Japan

We have performed direct numerical simulations of the motion of a finite-size solid particle in a quiescent fluid using an immersed boundary method developed by Uhlmann (2005). The spatial derivatives of fluid velocity are evaluated by using the Fourier spectral method and aliasing errors are removed by the phase-shift method. We estimate the accuracy of our numerical scheme to determine the minimum resolution for accurately tracking a solid particle when the particle Reynolds number is sufficiently small.

1. 緒言

流体中を運動する微小な重い固体粒子は，自らの慣性の影響で一般には流体に追従しない．本研究では，統計的に一様な乱流中でも粒子の空間分布が一様にはならず，粒子が空間的に局在する「クラスタリング現象」に着目する．固体粒子が局在する領域では，粒子同士の衝突頻度が高くなる．したがって，乱流中の粒子のクラスタリング現象は物理的に興味深いだけでなく，さまざまな化学反応過程，大気乱流中における雨滴生成過程，あるいは，宇宙における惑星形成過程など，粒子の衝突が重要な要因となるさまざま現象を理解する上で重要である．

固体粒子を大きさの無視できる質点として取り扱い，ストークス抵抗が支配的である場合の粒子クラスタリング現象は，これまで精力的に研究されてきた．しかし，粒子の大きさが乱流のコルモゴロフ長よりも大きい場合の粒子クラスタリングに関する数値シミュレーションは，その取り扱いが（質点系と比べて）極端に難しくなるために，これまでにほとんど行われていない．我々は，流体と固体の混相流を単相流のように扱うことのできる「埋め込み境界法」とよばれる手法のうち，ウールマン [1] により開発された実装法を用いて，乱流中の有限サイズの固体粒子のシミュレーションを行ってきた．本論文では，この数値シミュレーション技法に関して，その精度検証に的を絞り報告する．

2. 数値シミュレーション手法

前節で述べたように，一般に，埋め込み境界法では，流体と固体粒子の混相流を単相流のように扱う．このとき，固体表面での粘着境界条件を満たすように流体の運動方程式に外力項を加えると同時に，その反作用に基づいて粒子の並進および回転運動を求める．本研究で用いる，文献 [1] の方法では，この流体と粒子との相互作用を評価するために，N_p 個の固体粒子の表面（流体との境界面）にそれぞれ N_L 個の「外力点」を一様に設置する．i 番目の粒子に配置された l 番目の外力点の座標を，

$$\boldsymbol{X}_l^{(i)} \ (1 \le i \le N_p,\ 1 \le l \le N_L) \tag{1}$$

と表す．以下では，外力点の配置に文献 [2] で示されている方法を用いた結果を報告する．外力点の配置の方法としては，物体表面上で互いに適当な反発力を受けて運動する粒子を配置し，その運動方程式を長時間積分して近似的に一様分布させる方法も提案されている [1]．我々は，２つの方法を用いた数値シミュレーションを実行し，両者の結果が数値誤差の範囲で一致することを確かめた．

n 時間ステップ目の流速場を $\boldsymbol{u}^n$ と表すと，時間的に離散化されたナビエ・ストークス方程式は，

$$\frac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n}{\Delta t} = \mathbf{rhs} + \boldsymbol{f} \tag{2}$$

と表される．ここで，$\mathbf{rhs}$ は移流項，圧力項，粘性項，流体が受ける体積力をまとめた項であり，$\boldsymbol{f}$ は流体が粒子から受ける力である．固体粒子表面での粘着境界条件により，外力点上での流速は，その点における固体粒子の表面速度と一致し，

$$\boldsymbol{U}^{(d)}\big(\boldsymbol{X}_l^{(i)}\big) = \boldsymbol{u}_c^{(i)} + \boldsymbol{\omega}_c^{(i)} \times \big(\boldsymbol{X}_l^{(i)} - \boldsymbol{x}_c^{(i)}\big) \tag{3}$$

とならなければならない．ここで，$\boldsymbol{u}_c^{(i)}, \boldsymbol{\omega}_c^{(i)}, \boldsymbol{x}_c^{(i)}$ は，それぞれ，i 番目の粒子の並進速度，回転速度，中心座標を表す．埋め込み境界法では，$(n+1)$ 時間ステップで流速が (3) と一致するように，流体に外力（すなわち，粒子から作用する力）を与える．つまり，(2) より，各外力点において，

$$\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{X}_l^{(i)}\big) = \frac{\boldsymbol{U}^{(d)}\big(\boldsymbol{X}_l^{(i)}\big) - \boldsymbol{U}^n\big(\boldsymbol{X}_l^{(i)}\big)}{\Delta t} - \mathbf{RHS}\big(\boldsymbol{X}_l^{(i)}\big) \tag{4}$$

という外力を与えればよいことになる．ただし，外力点 $\boldsymbol{X}_l^{(i)}$ 上で評価される量に対しては大文字表記，流れ場の格子点上で評価される量に対しては小文字表記を用いる．ところで，粒子との相互作用項を無視した場合の $(n+1)$ 時間ステップにおける流速を

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}\big(\boldsymbol{X}_l^{(i)}\big) = \boldsymbol{U}^n\big(\boldsymbol{X}_l^{(i)}\big) + \mathbf{RHS}\big(\boldsymbol{X}_l^{(i)}\big)\Delta t \tag{5}$$

と表すと，(4) の右辺の第２，３項はまとめられ，(4) は，

$$\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{X}_l^{(i)}\big) = \frac{\boldsymbol{U}^{(d)}\big(\boldsymbol{X}_l^{(i)}\big) - \widetilde{\boldsymbol{U}}\big(\boldsymbol{X}_l^{(i)}\big)}{\Delta t} \tag{6}$$

と書き換えられる．

以上の方法で，流体と固体粒子の相互作用を扱うことができるが，外力点の位置と流体の計算格子とは一致しないので，これらの上で評価される値を互いに補間する必要がある．このとき，計算の具体的な手順は以下の通りとなる．まず，格子点上で，粒子からの力を無視した流速

$$\widetilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}^n + \mathbf{rhs}\Delta t \tag{7}$$

を求め，これを重み付き積分して，外力点上での補間値 $\widetilde{\boldsymbol{U}}$ を求める．補間に用いる重み関数としてはいくつかの関数 [4–6] が提案されており，本研究でもいくつかの関数を試したが，以下では，文献 [4] の関数を用いた結果を報告する．$\widetilde{\boldsymbol{U}}$ が求まったので，(6) により，外力点における相互作用力 $\boldsymbol{F}$ が評価される．これにより，固体粒子に作用する力とトルクが評価され，したがって，その並進と回転の運動方程式が求まる．これらの方程式を，４次精度のルンゲ・クッタ・ジル法で時間積分し，時間発展させる．一方で，流体に粒子から作用する力 $\boldsymbol{f}$ は，外力

Tab. 1: Numeical parameters.

周期境界条件の周期	$L = 2\pi$
粒子直径	$d = L/50$
粒子の速さ	$v_p = 0.01$
流体の動粘性係数	$\nu = 1$
流体の密度	$\rho_f = 1$
固体粒子と流体の密度比	$\rho_p/\rho_f = 1.5$
粒子レイノルズ数 Re_p	1.26×10^{-3}
ストークス抵抗 F_S	0.0118

点上の $\boldsymbol{F}$ を重み付き積分して評価する．流れ場には三方向周期境界条件を課し，その空間微分の評価にはフーリエスペクトル法を用いる．流れ場の時間発展も 4 次精度のルンゲ・クッタ・ジル法による．

我々は統計的に一様な乱流中における固体粒子のクラスタリング現象に興味があるので，流れ場の数値シミュレーションにはフーリエスペクトル法を用いる．このとき，ナビエ・ストークス方程式の非線形項に起因するエイリアス誤差の除去については留意が必要である．つまり，粒子あたりの格子点数が十分でない場合には，たとえば，いわゆる「2/3 ルール」を用いて高波数成分を切断すると，上述の方法で評価した $\boldsymbol{f}$ が影響を受けて流体と粒子の間の作用反作用の法則が破綻する．我々の計算では「位相シフト法」（たとえば，文献 [3] を参照）を用いて，エイリアス誤差を除去するが，このとき，$\boldsymbol{f}$ への影響は無視できることを確認した．

3. 結果

本研究で用いる埋め込み境界法は安定な方法であり，誤差が大きくても数値シミュレーションは可能である．したがって，乱流中の固体粒子のクラスタリング現象に関する数値シミュレーションを系統的に実行する前に，その誤差評価を慎重に行うことにした．

以下では，粒子あたりに必要な格子点数を見積るために，静止流体中で単一の球形の固体粒子を一定速度で移動させた場合に粒子に作用する力を数値シミュレーションにより評価した結果を報告する．粒子の直径 d と流体の相対速さ v_p，流体の動粘性係数 ν で定義される粒子レイノルズ数を，

$$Re_p = \frac{v_p d}{\nu} \tag{8}$$

で表す．$Re_p \ll 1$ のとき，粒子に働く力の大きさはストークス抵抗，

$$F_S = 3\pi\mu d v_p \tag{9}$$

でよく近似される．μ は，流体の粘性係数である．前節で述べた埋め込み境界法を用いて粒子に働く抵抗力を計算し，(9) との比較をする．具体的には，Tab. 1 に示す条件に対して，格子点数を $N_f^3 = 128^3$ から 1024^3 まで変化させた場合に求められた抵抗力の大きさを F_D とし，粒子の速度で定義されるストークス抵抗との相対誤差を，

$$\epsilon(F_D) = \frac{|F_D - F_S|}{|F_S|} \tag{10}$$

と定義する．結果を Tab. 2 に示す．なお，この表に示した値は十分に時間経過した後，F_D が一定値をとった時間帯におけるものである．本研究では，粒子の直径 d を固定したまま，解像度 N_f を大きくしたので，粒子あたりの格子点数 M（$= d/(L/N_f)$）が変化する．Tab. 2 に示すように，解像度の増加とともに誤差は単調に減少するが，M を 20 点以上としても粒子に作用する力の大きさの誤差は，5% 程度もある．この結果は，文献 [7] で報告されているベンチマークテストとも整合的である．なお，解像度に応じて粒子表面に配置する外力点数 N_L は文献 [1] の (A.5) にしたがって変化させた．

Tab. 2: Drag force F_D and the relative error $\epsilon(F_D)$ for different spatial resolutions (N_f).

		F_D	$\epsilon(F_D)$	M
$N_f = 128$	$(N_L = 22)$	0.0206	0.7458	2.56
$N_f = 256$	$(N_L = 83)$	0.0156	0.3220	5.12
$N_f = 512$	$(N_L = 330)$	0.0127	0.0763	10.2
$N_f = 1024$	$(N_L = 1318)$	0.0124	0.0508	20.5

4. 結言

埋め込み境界法はかなり簡便な方法である．我々は上で述べた実装方法を用いて，乱流中の有限の大きさの粒子のクラスタリング現象を調べてきた．得られる結果は，定性的にはその性質をよく表しているように見える．しかし，定量的な議論には，注意が必要である．本論文で示したように，静止流体中で粒子を一定速度で動かした場合に粒子に作用する流体力を評価すると，たとえ粒子レイノルズ数 Re_p が十分に小さい場合でも，粒子あたりの格子点数 M を 20 点以上はとらないと誤差が無視できないことが分かった．この基準は粒子レイノルズ数が十分に小さければ，乱流中での粒子の運動にも適用可能な基準であると考えられる．今後，粒子の自由落下運動などのベンチマークテストを続けるとともに，乱流中でのクラスタリング現象の解明に向けた数値シミュレーションを続ける計画である．

本研究は科学研究費補助金（26630054）の助成を受けた．また，計算手法について助言を頂いたウールマン博士に感謝する．

参考文献

(1) Uhlmann, M., “An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows,” J. Comp. Phys., Vol. 209 (2005) pp. 448–476.

(2) Lucci, F., Ferrante, A. & Elgobashi, S.,“Modulation of isotropic turbulence by particles of Taylor length-scale size,” J. Fluid Mech. Vol. 650 (2010) pp. 5–55.

(3) 木田重雄，柳瀬眞一郎, “乱流力学,” 朝倉書店，(1999).

(4) Peskin, C. S., “The immersed boundary method,” Acta Numerica, Vol. 11 (2002) pp. 479–517.

(5) Bao, Y. X., Kaye, J. & Peskin, C. S., “A Gaussian-like immersed boundary kernel with improved translational invariance and smoothness,” arXiv:1505.07529 (2015) pp. 1–8.

(6) Roma, A., Peskin, C. & Berger, M., “An adaptive version of the immersed boundary method,” J. Comput. Phys., Vol. 153 (1999) pp. 509–534.

(7) Uhlmann, M. & Dušek, J., “The motion of a single heavy sphere in ambient fluid: A benchmark for interface-resolved particulate flow simulations with significant relative velocities”, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 59 (2014) pp. 221–243.