

翼列の LES 解析におけるブロック境界条件の影響

Effect of Block Interface Conditions on Cascade LES Simulation

- 李 允台, 東京大学大学院, 東京都文京区本郷 7-3-1, E-mail: ytrhee@thermo.t.u-tokyo.ac.jp
- 寺本 進, 東京大学, 東京都文京区本郷 7-3-1, E-mail: teramoto@thermo.t.u-tokyo.ac.jp
- 岡本 光司, 東京大学, 千葉県柏市柏の葉 5-1-5, E-mail: k-okamoto@edu.k.u-tokyo.ac.jp
- Yuntae Lee, University of Tokyo, 113-8656, Tokyo, Japan
- Susumu Teramoto, University of Tokyo, 113-8686, Tokyo, Japan
- Koji Okamoto, University of Tokyo, 227-8561, Chiba, Japan

For high-order LES calculation of a cascade using finite difference method, calculation domain should be divided for parallel computation because of high computational cost. In this case, for simple geometry, overlapping computational grid is used for maintain order of accuracy at calculation block interface. However, for complex geometry such as a gas turbine engine cascade, it is impossible to overlap computational grids at calculation block interface. To use point matching grid in high-order LES calculation without degrading of order of accuracy at calculation block interfaces, Generalized Characteristic Interface Condition (GCIC) is applied and verified for complex geometry grids.

1. 研究背景

近年、計算機性能の向上により LES(Large Eddy Simulation)が複雑な乱流挙動を含む非定常流れ場に対して適用され始めている。LES 解析はガスタービンエンジン内部の翼列に関する研究においても、すでに広い範囲で使用されている⁽¹⁾。しかし、翼列の LES 解析を実用化するためにはいくつかの課題が存在する。一つ目は計算コストに関する問題である。この問題については計算機性能の向上が期待される未来において解決できると思われる。二つ目は解析結果の一貫性に関する問題である。LES 解析は格子や解析スキームによる影響を受けやすいことが知られている。例えば、単独翼の LES 解析の場合、格子の解像度^(2,3)や解析スキームの空間精度^(4,5)が解析結果に影響する。また、2 次元翼の計算の場合、スパン方向長さ^(6,7)も解析結果に影響する。翼列の LES 解析においても上記の解析条件の影響が現れるため、これらの解析条件が翼列解析の解析結果に及ぼす影響を明らかにする必要がある。

LES 解析では高解像度の結果を低い計算コストで得るために構造格子を用いた高次精度有限差分法が多く用いられている⁽⁸⁾。高次精度スキームが使用される時、翼列格子の場合は格子形状が複雑になるため、ブロック境界における精度低下が問題として現れる。例えば Fig.1 に示すようなマルチブロック法を用いる翼列格子の場合、翼のピッチ方向において周期境界が使用されるため、Fig.2 に示すようにブロック境界においてトポロジーが異なる格子が隣接することになる。ブロック境界においてそれぞれの計算格子が滑らかに繋がっていないため、従来の LES 解析においてブロック境界条件として使われていた格子を重ねる手法(Overlap)の使用が困難である。このように翼列の LES 解析では、ブロック境界条件は解析結果に影響を与えるため、ブロック境界条件が解析結果に与える影響の理解が重要となる。

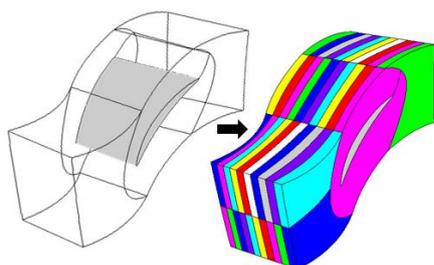


Fig. 1 Schematic of Multi-Blocked Calculation Domain

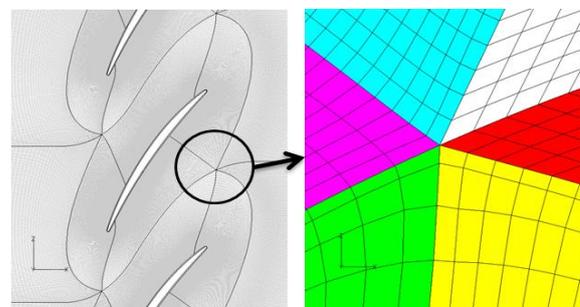


Fig. 2 Example of Block Interfaces in Cascade Grid

高次精度空間スキームを使用する際にブロック境界において高精度を保つための手法はすでに考案されている。例えば、重合格子に高精度内挿法を用いる高精度重合格子法⁽⁹⁾や Point-Matching Grid において適切な数学的処理を加えることで境界面でも高精度スキーム使って Navier-Stokes 方程式を解く特性インタフェース条件(Characteristic Interface Condition, CIC)⁽⁸⁾、CIC の欠点を補完した一般特性インタフェース条件(Generalized Characteristic Interface Condition, GCIC)⁽⁹⁾等が挙げられる。

本研究では、高次精度空間スキームを用いる翼列の LES 解析においてブロック境界条件が解析結果に与える影響を調べることを目的とする。そこで本稿では翼列を想定し、トポロジーの異なる格子が隣接するブロック境界が存在する格子において高次精度ブロック境界条件の一種である一般特性インタフェース条件(GCIC)を適用し、ブロック境界条件による解析結果の誤差評価を行うことで、ブロック境界条件が解析結果に与える影響を定量的に評価する。

2. 数値計算手法

2.1 数値計算手法の概要

本研究では、式(1)で示すような一般座標系に変換した 3 次元圧縮性ナビエストークス方程式を用い、有限差分的に離散化を行う。対流項と粘性項および格子メトリクスの空間差分には Kim らによる 6 次精度三重対角型 Compact スキームである Optimized Sixth Order Tri-diagonal Compact Scheme^(10,11) (ただし、境界点 2 次精度、次点 4 次精度)を用いる。このスキームは三重対角の Pade 形式を保ち、dissipation error と dispersion error を同時に抑えつつ解像度を

最適化したものである。時間積分には3段階 TVD Runge-Kutta スキームを用いる。さらに、数値不安定の原因となる高周波成分の除去に6次精度 Pade-Type Compact Filter⁽¹²⁾を用い、Filter 係数は0.49 とする。

2.2 一般特性インタフェース条件(GCIC)について

一般特性インタフェース条件(GCIC)については参考文献(9)に詳細が記述されている。ここではその概要を簡単に説明する。

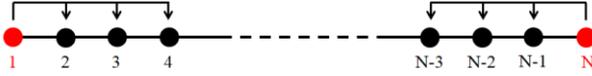


Fig. 3 Stencils for 1D Discretization at Boundaries

計算ブロックの境界における Compact 型有限差分スキームの離散化では Fig.3 に示すように内部の格子点の情報を用いて評価する片側差分が用いられる。GCIC は境界を共有するブロック間において、片側差分から計算された両ブロックの情報を交換することで、境界点においても高次精度空間スキームによってナビエーストクス方程式を解くことができる手法である。以下で説明する式展開により、ナビエーストクス方程式は5つの特性波に関する5つの1次元波動方程式に変換される。この5つの波動方程式を Fig.4 に示すようなブロック境界において解くことを考える。

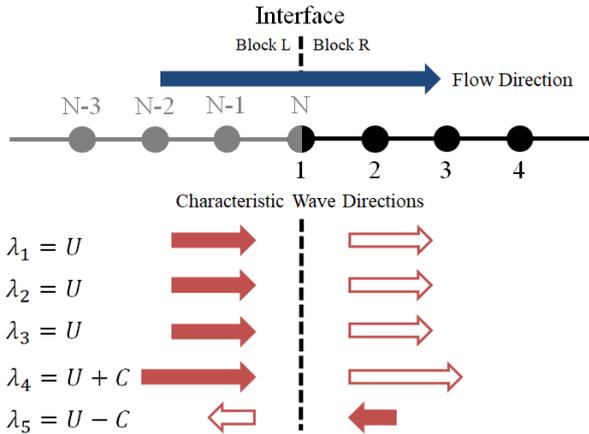


Fig. 4 Schematic of Characteristic Wave Propagation

ここで λ はそれぞれの波の移流速度、 U は流速、 C は音速である。Fig.4 に示すように、5つの波はそれぞれ移流速度を持ち、境界を横切って進行する。波の1次元移流方程式を数値的に解く場合、風上側の情報のみを用いることで安定な解を得ることができる。したがって Fig.4 に示すような5つの移流方程式の場合、左ブロックから右ブロックへ移流する $\lambda_1 \sim \lambda_4$ の移流速度を持つ波については左ブロックの情報のみを用いた片側差分から境界における数値流束を求めることができる。 λ_5 についても同様に右ブロックの情報のみを用いた片側差分から境界における数値流束が計算される。このように5つの波動方程式に関する5つの数値流束が求まり、これらを式変換することでナビエーストクス方程式に戻す。最後に時間積分を行うことで、境界においてもナビエーストクス方程式を高次精度空間スキームによって解くことができる。

GCIC の式展開は以下のように行われる。一般座標系における3次元圧縮性ナビエーストクス方程式は以下のように書ける。

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} = \hat{S}_v \quad (1)$$

ここで、 \hat{S}_v は粘性項を表し、保存変数と非粘性項流束は次の通り

である。

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \mathbf{Q}/J \\ \hat{E} &= (\xi_x \mathbf{E} + \xi_y \mathbf{F} + \xi_z \mathbf{G})/J \\ \hat{F} &= (\eta_x \mathbf{E} + \eta_y \mathbf{F} + \eta_z \mathbf{G})/J \\ \hat{G} &= (\zeta_x \mathbf{E} + \zeta_y \mathbf{F} + \zeta_z \mathbf{G})/J \end{aligned} \quad (2)$$

J はヤコビアン行列である。また、

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e]^T \\ \mathbf{V} &= [\rho, u, v, w, e]^T \\ \mathbf{E} &= [\rho u, \rho u^2 + p, \rho v u, \rho w u, (e+p)u]^T \\ \mathbf{F} &= [\rho v, \rho u v, \rho v^2 + p, \rho w v, (e+p)v]^T \\ \mathbf{G} &= [\rho w, \rho u w, \rho v w, \rho w^2 + p, (e+p)w]^T \end{aligned} \quad (3)$$

である。 ξ, η, ζ は一般座標系の3方向を意味し、 $\xi_x, \eta_x, \zeta_x \dots$ などは格子メトリクスを意味する。次に保存変数 \mathbf{Q} 、原始変数 \mathbf{V} 、特性変数 \mathbf{W} より次の2種類のヤコビアン行列を定義する。

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{V}}, \quad \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{W}} \quad (4)$$

ヤコビアン行列 \mathbf{P}, \mathbf{S} に関しては参考文献(9)に記載されている。これらを使って式(1)は以下のように書ける。

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{P} \mathbf{S} \mathbf{L} + \mathbf{D} = 0 \quad (5)$$

但し、

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{J} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P}^{-1} \left\{ \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} - \left[\mathbf{E} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} \right) + \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_y}{J} \right) + \mathbf{G} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_z}{J} \right) \right] \right\} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{J} \left\{ \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} + \left[\mathbf{E} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x}{J} \right) + \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_y}{J} \right) + \mathbf{G} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_z}{J} \right) \right] - \hat{S}_v \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

である。ここでは ξ 方向のみについて議論している。ここで、式(5)にヤコビアン行列 \mathbf{P}, \mathbf{S} の逆行列をかけることにより ξ 方向(1次元)に関する5つの特性変数 \mathbf{W} に関する移流方程式が導かれる。

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{L} (= \boldsymbol{\lambda} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \xi}) + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D} = 0 \quad (7)$$

但し、 $\boldsymbol{\lambda}$ は特性変数 \mathbf{W} の移流速度である。

3. 解析結果

本研究では、翼列を想定した解析格子においてブロック境界条件が解析結果に与える影響を定量的に評価することを目的としている。そのためブロック境界が存在する直交格子および翼列を模した格子において渦を移流させ、渦の厳密解との誤差評価を行う。ブロック境界条件としては LES 解析において多く使用されている Overlap 法および高次精度ブロック境界条件の一種である一般特性インタフェース条件(GCIC)を適用し、両方の解析結果の比較を行う。渦の初期状態における圧力と速度分布は式(8)のように表せる⁽¹³⁾。 R は圧力、 u, v は渦内部の流速、 C は渦の強さ、 R は渦の特性半径である。今回の解析で使われる渦のパラメータは渦の特性半径 $R = 1.0$ 、渦の強さ $C = 0.1/2\pi$ であり、一様流の流速 u_∞, v_∞ はそれぞれ 0.5 として指定している。また、渦が移流される一様流のマッハ数は0.1に設定している。

$$\begin{aligned}
 p_{\infty} - p &= \frac{\rho C^2}{2R^2} \exp(-r^2) \\
 u_{\infty} - u &= \frac{C(y - y_c)}{R^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) \\
 v_{\infty} - v &= \frac{C(x - x_c)}{R^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) \\
 r^2 &= \frac{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}{R^2}
 \end{aligned} \tag{8}$$

3.1 直交格子における渦移流解析

解析格子および解析概要を Fig.5,6 に示す。解析領域は4つの計算ブロックに分割されており、Fig.5 は GCIC 法を、Fig.6 は Overlap 法をブロック境界条件として使用する格子を示している。Overlap 法を用いた解析は、ブロック境界において7点を重ねている。Fig.5,6 に示されるように渦を矢印方向に移流させ、ブロック境界を通過する時点における解析結果の評価を行う。解析は格子解像度を変化させながらそれぞれ3種類の格子を用いる。格子の解像度 Δ については Table 1 に示すように渦の半径 $R = 1.0$ の中に 10,20,40 点の格子点が入るように指定している。

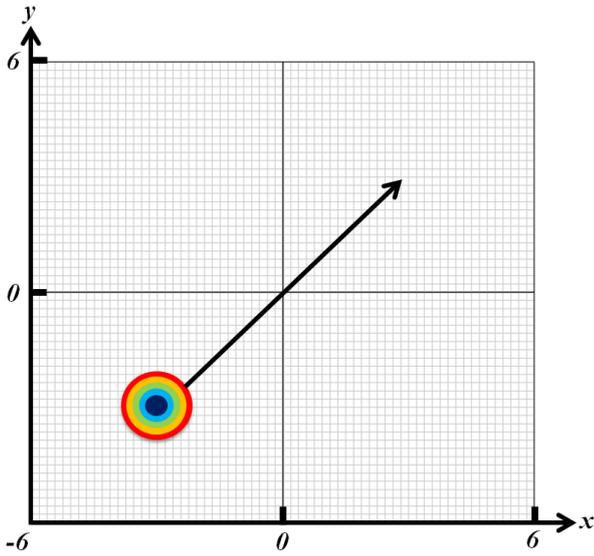


Fig. 5 Calculation Domain and Grids for GCIC Method ($\Delta = 0.1$)

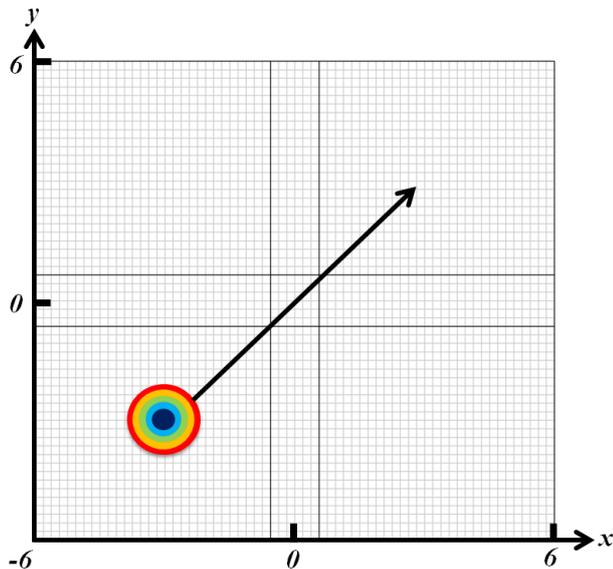


Fig. 6 Calculation Domain and Grids for Overlap Method ($\Delta = 0.1$)

	格子幅 ($\Delta = R/\text{point}$)
Grid 1	0.1
Grid 2	0.05
Grid 3	0.025

渦の中心がブロック境界を通過する時点でのそれぞれの格子幅における圧力分布の結果を Fig.7 に示す。GCIC 法および Overlap 法の両方、渦がブロック境界を滑らかに通過することが確認されている。同時点における $\Delta = 0.1$ 格子での $y = 0$ 線上の y 方向流速 V の分布のグラフを Fig.8 に示す。Fig.8 にはブロック境界条件を用いた2種類の解析結果(GCIC, Overlap)に加え、ブロック境界のない滑らかな格子における解析結果(Direct)および渦の厳密解(Exact)を同時にプロットしている。Fig.8 の (a)には渦の両端範囲の分布を、(b)には流速 V が最小となる位置の拡大図を示している。ブロック境界を通過する解析結果はブロック境界のない解析結果や厳密解との良い一致を示している。一方、Fig.8 (b)においては渦の厳密解と比べ GCIC, Overlap, Direct 順に誤差が大きいが確認されている。Fig.9 には $y = 0$ 線上における y 方向流速 V の解析結果と厳密解との誤差の Log 値を縦軸に、Log スケールの格子幅を横軸にプロットしている。誤差評価は解析結果の厳密解との最大誤差の定義である L_{∞} -norm を用いており、それぞれの解析結果における勾配をグラフに記載している。ブロック境界を通過しない Direct の結果から、本解析において用いられている6次精度に近い誤差の勾配が現れている。ブロック境界を通過する Overlap, GCIC の場合、Overlap の解析結果の方が GCIC より高い精度を示している。GCIC の結果は、Overlap より低精度の結果が得られたが、3次精度以上の高次精度が保たれていることが確認されている。

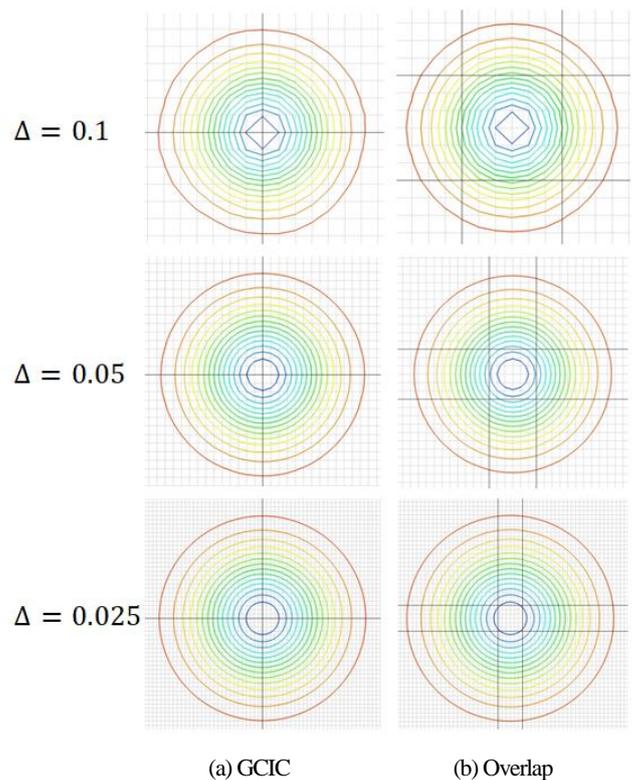
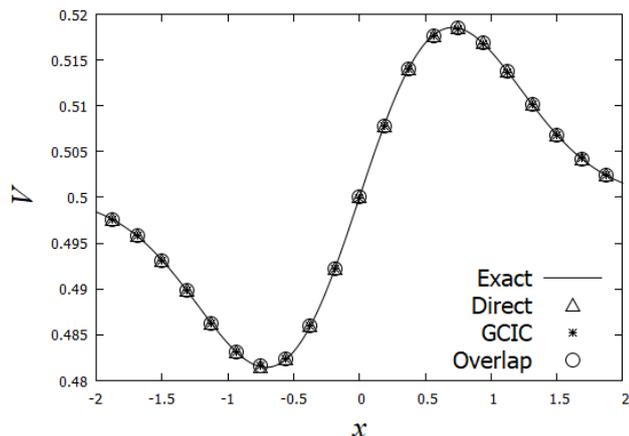
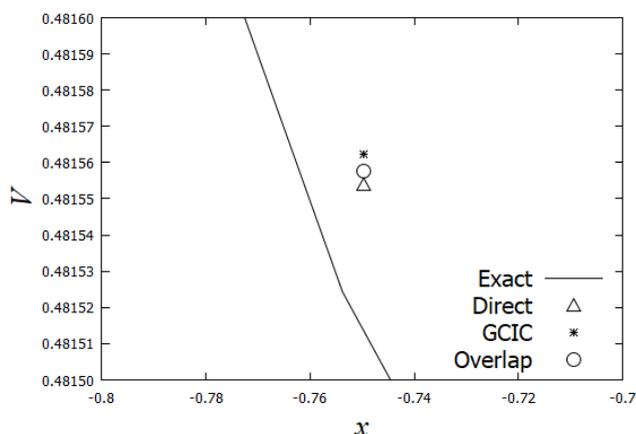


Fig. 7 Pressure Contours for Orthogonal Grids



(a) Overall Swirl Velocity



(b) Peak Region Swirl Velocity

Fig. 8 Swirl Velocity Profiles for Orthogonal Grids

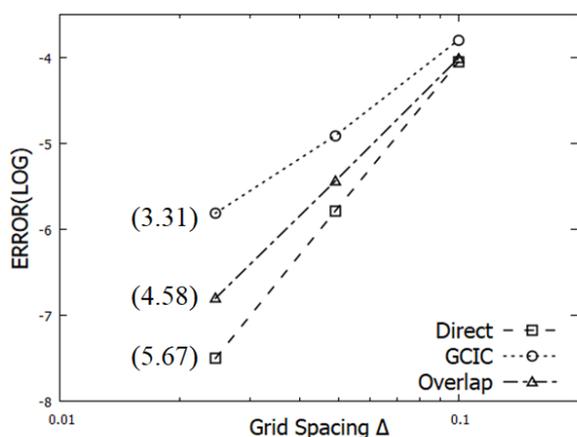


Fig. 9 L_{∞} - Errors of Swirl Velocity with Various Conditions

3. 2 翼列を模した格子における渦移流解析

解析格子および解析概要を Fig.10,11 に示す。解析領域は4つの計算ブロックに分割されており、Fig.10はGCIC法を、Fig.11はOverlap法をブロック境界条件として使用する格子を示している。Overlap法を用いた解析は、ブロック境界において7点を重ねている。解析は直交格子における解析と同様に、Fig.10,11に示される矢印方向に渦を移流させ、ブロック境界を通過する時点における解析結果の評価を行う。解析には格子解像度を変化させながらそ

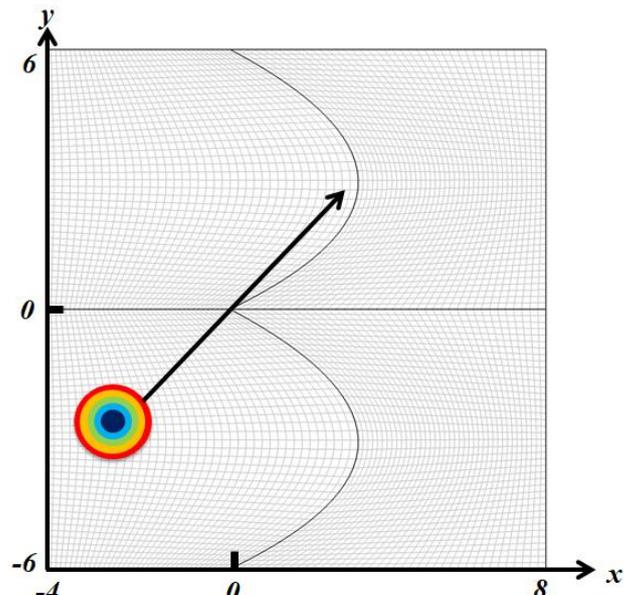


Fig. 10 Calculation Domain and Grids for GCIC Method ($\Delta = 0.1$)

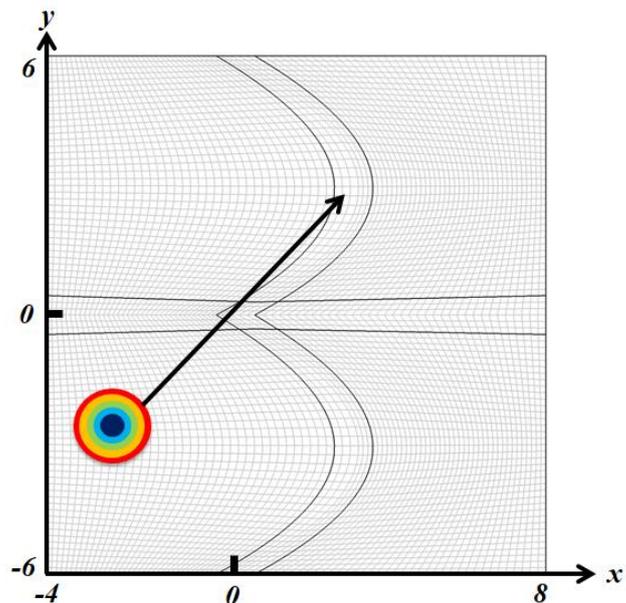


Fig. 11 Calculation Domain and Grids for Overlap Method ($\Delta = 0.1$)

Table 2 Grid Resolutions

	格子幅($\Delta = D/\text{point}$)
Grid 1	0.1
Grid 2	0.067
Grid 3	0.05

れぞれ 3 種類の格子を用いる。格子の解像度 Δ については格子の歪みにより均等な配分ができないため、渦がブロック境界の中心を通過する際に渦の直径 $D = 2.0$ の中に 20,30,40 点の格子点が入るように指定している。Table 2 にそれぞれの格子における平均格子幅を示す。

渦の中心がブロック境界の中心を通過する時点でのそれぞれの格子幅における圧力分布の結果を Fig.12 に示す。一番粗い格子である $\Delta = 0.1$ の場合は GCIC、Overlap 両方渦の形が変形されており、Overlap 側の変形が激しい。格子点数が増加した $\Delta = 0.067$,

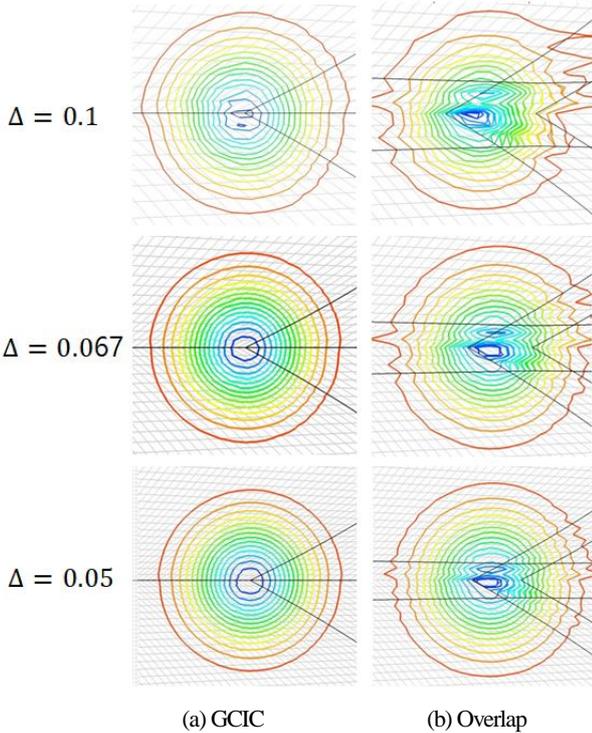


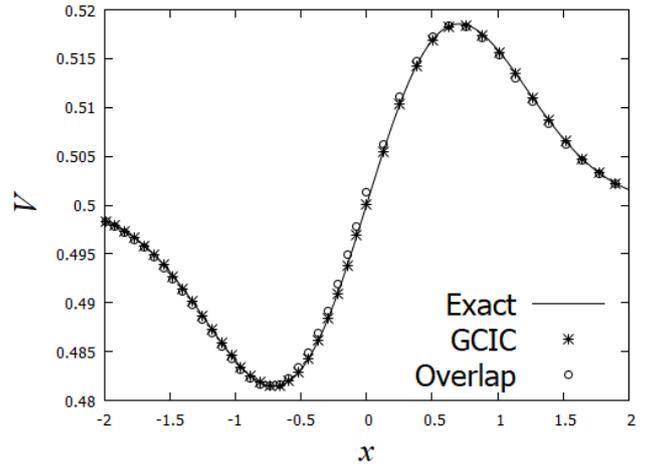
Fig. 12 Pressure Contours for Skewed Grids

$\Delta = 0.05$ の場合、GCIC を用いた解析結果は渦が滑らかに移流する。一方 Overlap の場合は境界付近において渦の振動現れており、特に格子メトリクスが急変化する位置において更に激しい振動が現れている。同時点における $\Delta = 0.05$ 格子での $y = 0$ 線上の y 方向流速 V の分布のグラフを Fig.13 に示す。Fig.13 にはブロック境界条件を用いた 2 種類の解析結果(GCIC, Overlap)を渦の厳密解(Exact)と同時にプロットしている。Fig.13 (a)には渦の両端範囲の分布を、(b)には流速 V が最小となる位置の拡大図を示している。Overlap 側の誤差が Fig.13(a),(b)両方から確認することが出来る。一方 GCIC の結果は厳密解とほぼ一致しているように見える。

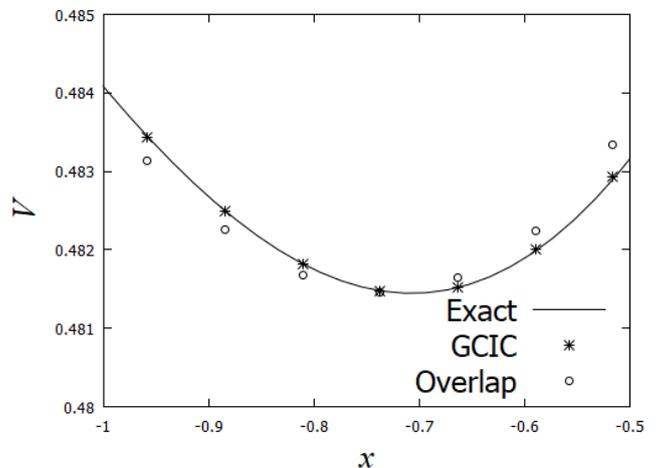
Fig.14 には Fig.9 と同様に $y = 0$ 線上における y 方向流速 V の解析結果と厳密解との誤差の Log 値を縦軸に、Log スケールの格子幅を横軸にプロットしている。Fig.14 では翼列を模した格子のエラーおよび 3.1 節における直交格子のエラーを同時にプロットしている。Overlap を用いた場合、直交格子においては高精度が保たれる(勾配 4.58)が、格子に歪みが発生することにより計算精度が急激に下がる(勾配 1.33)ことが確認されている。一方 GCIC の場合、歪みの影響によりエラーの絶対値は上がるものの、計算精度を表すグラフの勾配は直交格子における GCIC の結果とほぼ変わらず、歪みのある格子においても高精度が保たれていることが確認されている。

4. 結論

本研究では、ブロック境界条件が翼列の LES 解析に与える影響を調べるために、翼列を想定した格子においてブロック境界条件が解析結果に与える影響について定量的な評価を行った。解析には高精度ブロック境界条件の一種である一般特性インタフェース条件(GCIC)および LES 解析にブロック境界条件として多く使用されている Overlap 法を用いた。直交格子における渦移流解析結果により、Overlap 法は直交格子において解析に用いる差分スキーム内部点における空間精度と近い精度の結果が得られることが確認された。GCIC は直交格子において Overlap 法よりは低精度の結果を示すものの、3 次精度以上の高精度の結果が得られることが確認された。翼列を模した格子における渦移流解析により、Overlap 法はブロック境界における歪みの影響により精度が急激



(a) Overall Swirl Velocity



(b) Peak Region Swirl Velocity

Fig. 13 Swirl Velocity Profiles for Skewed Grids

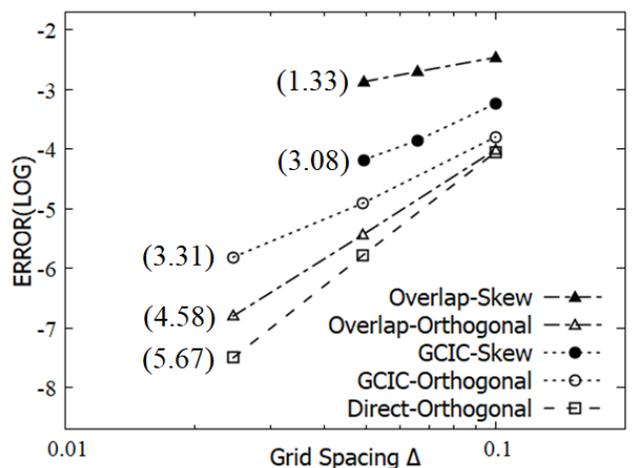


Fig. 14 Errors of Swirl Velocity with Various Conditions

に低下する一方、GCIC は翼列のような歪みの強いブロック境界において高精度が保たれることが確認された。

5. 謝辞

本研究は、JSPS 科研費 JP18H01621 の助成を受けたものです。また、本研究では宇宙航空研究開発機構(JAXA)のスーパーコンピュータシステム JSS2 を利用して計算を行いました。ここに謝意を示します。

参考文献

- (1) N. Gourdain, F. Sicot, F. Duchaine, L. Gicquel, Large Eddy Simulation of Flows in Industrial Compressors : A Path from 2015 to 2035, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 372 (2015).
- (2) I. Mary, P. Sagaut, Large Eddy Simulation of Flow Around an Airfoil Near Stall, *AIAA Journal*, 40 (2002) pp.1139–1145.
- (3) W.A. McMullan, G.J. Page, Towards Large Eddy Simulation of Gas Turbine Compressors, *Progress in Aerospace Sciences*, 52 (2012) pp.30–47.
- (4) P. Fernandez, N.C. Nguyen, J. Peraire, The hybridized Discontinuous Galerkin method for Implicit Large-Eddy Simulation of transitional turbulent flows, *Journal of Computational Physics*, 336 (2017) pp.308–329.
- (5) J.S. Park, F.D. Witherden, P.E. Vincent, High-Order Implicit Large-Eddy Simulations of Flow over a NACA0021 Aerofoil, *AIAA Journal*, 55 (2017) pp.2186–2197.
- (6) J.A. Ekaterinaris, High-Order Accurate, Low Numerical Diffusion Methods for Aerodynamics, *Progress in Aerospace Sciences*, 41 (2005) pp.192–300.
- (7) S. E. Sherer, J. N. Scott, Development and Validation of a High-Order Overset Grid Flow Solver, *AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, 32nd (2002).
- (8) J.W. Kim, D.J. Lee, Characteristic Interface Conditions for Multiblock High-Order Computation on Singular Structured Grid, *AIAA Journal*, 41 (2003) pp.2341–2348.
- (9) T. Sumi, T. Kurotaki, J. Hiyama, Generalized Characteristic Interface Conditions for High-Order Multi-Block Computation, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 21 (2007) pp.335–350.
- (10) J.W. Kim, D.J. Lee, Optimized Compact Finite Difference Schemes with Maximum Resolution, *AIAA Journal*, 34 (1996) pp.887–893.
- (11) J.W. Kim, D.J. Lee, Implementation of boundary conditions for optimized high-order compact schemes, *Journal of Computational Acoustics*, 5 (1997) pp.177–191.
- (12) D. V. Gaitonde, M.R. Visbal, Pade-Type Higher-Order Boundary Filters for the Navier-Stokes Equations, *AIAA Journal*, 38 (2000) pp.2103–2112.
- (13) M.R. Visbal, D. V. Gaitonde, On the Use of Higher-Order Finite-Difference Schemes on Curvilinear and Deforming Meshes, *Journal of Computational Physics*, 181 (2002) pp.155–185.