低容量ルンゲ・クッタ陰解法の非圧縮流れへの適用

A class of low-storage implicit Runge-Kutta methods for incompressible flows

○ 岩津 玲磨 * 電機大, 〒 120-8551 東京都足立区千住旭町 5, E-mail：iwatsu@cck.dendai.ac.jp
高橋 直也 * 電機大, 〒 120-8551 東京都足立区千住旭町 5, E-mail：n.takahashi@mail.dendai.ac.jp
宮嵜 武 ** 電通大, 〒 182-8585 東京都調布調布ヶ丘 1-5-1, E-mail：miyazaki@uec.ac.jp
Reima IWATSU, Tokyo Denki University, 5 Asahi-cho, Senju, Adachi-ku, Tokyo 120-8551
Naoya TAKAHASHI, Tokyo Denki University, 5 Asahi-cho, Senju, Adachi-ku, Tokyo 120-8551
Takeshi MIYAZAKI. The University of Erectro-Communications, 1-5-1 Chofu-gaoka, Chofu, Tokyo 182-8585

A class of low-storage diagonally implicit Runge-Kutta (DIRK) scheme is proposed for the soution of incompressible flows. The low-storage coefficients found for the one- or two-stage DIRK schemes are second-order in time. They can be used with the Chorin's projection method without difficulty in contrast to the backward finite difference schemes or IMEX schemes used with the projection method. Stability and efficiency of the proposed scheme are confirmed for the benchmark computation of the 3D flow around a slender body (a bullet-type point attached to a bare shaft of an archery arrow).

1. はじめに

非圧縮性流れの数値計算によく用いられている陰解法としては，キムとモインによる方法 [1]，後退差分 (BDF) 法 [2] などを挙げることができる．前者では，スプリッティング・エラーが時間精度を下げないように射影するこが可能である．また，後者の場合にはより安定に計算することができ，さらに，3 次精度 BDF 法の適用例も報告されている [2]．

キム・モインの方法のように，移流拡散方程式の移流項を陽解法，粘性項を陰解法によって解く一般的な解法は，IMEX 法 [3] の名で知られており，非圧縮性流れで広く用いられている陰解法の大部分はこれに含まれる．

しかし，上述の 2 計算法，また IMEX 法は，自己出発できないという線形多段階法の欠点から逃れることができない．さらに，キム・モインの方法は，直交座標，一般座標ともに，時間刻みの値を期待ほどには大きく取れない恨みがある．その一方で，BDF 法の高い安定性はかなり魅力的ではあるものの，射影ステップで速度の外挿が必要であるという大きな欠点をもっている．

これらの方法に替わる可能性のある方法には，例えば陰的ルンゲ・クッタ (IRK) 法 [4, 5, 6]，対角陰的ルンゲ・クッタ (DIRK) 法などがある [7, 8, 9]．IRK 法は 2 段で最高 4 次精度となり，この 2 段 4 位の係数のなかにはシンプレクティックとなるものがあり [10]，乱流の DNS への応用に期待が寄せられている [11]．

一方の DIRK 法は，文献によっては単一対角陰的ルンゲ・クッタ (SDIRK) 法とも呼ばれ [9]，陰的ルンゲ・クッタ (IRK) 法のなかでも，係数が左下 3 角行列をなし，対角成分の係数がすべての段で同じ値をもつものを指す．(S)DIRK 法の非圧縮性流体への適用例 [12] では，かなり高い安定性を示す方法があり，安定性が求められる問題での利用に期待が持てる．

ところで，陰的ルンゲ・クッタ (IRK) 法は硬い (stiff な) 常微分方程式を解くために考案されてきたので [4, 5]，計算したヤコビアンを保存しておいて各段で利用する場合には，対角成分がすべて同じ値をもつことに意義がある [6]．しかし，流体計算への適用を考える場合には，対角成分の値が等しいことにはあまり意味がないと思われる．

しかも，DIRK 法には対角成分の値がすべて同じであるという条件があるために，条件をみたす係数が限られ，4 段以上の段数では不可能，3 段以下では 2,3,4 次精度の全部で 5 種類しかないことがわかっている [7]．この Singly Diagonal(SD) の条件を外せば，より多くの係数が可能となる．

さらに，IRK 法の利用を困難にしている 2 つの点がある．その 1 点目は，一般の IRK 法を効率的に解く方法が知られていないことである [6]．文献 [6] でもちいられている修正ニュートン法などを流体計算にもちいることは，現実的とは考えにくい．2 点目は，すべてのルンゲ・クッタ法に共通する欠点である，メモリーを大量に使用して計算することである．この欠点を補うために，低用量ルンゲ・クッタ (LS-RK) 法がウィリアムソン [13]，ジェームソン・ベイカー [14, 15] カーペンターとケネディ [16]，らによって提案されている．ウィリアムソンによる方法は 3 段 3 位で使いやすく，ジェームソンの方法は圧縮性流体用に開発され，非圧縮性流体でも用いられており，カーペンターとケネディの方法は CAA 計算において適用されている．

しかし，上述の LS-RK 法はいずれも陽的 RK 法であり，調査した範囲では陰的 RK 法に対して低用量の解法を提案する文献はみつからなかった．そこで，ここでは対角成分の係数が互いに異なる DIRK 法で，しかも低容量の形式に書けるものを探して，それを非圧縮性流体の計算に応用することを目的とした．

2. 計算方法

2.1 基礎方程式

非圧縮性流れの連続の式と NS 方程式である．簡単のために，境界条件として，時間に依存するディリクレ条件が指定されている場合を考える．また，適切な初期条件があらかじめ与えられているものとする．

$$\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{u} = -\mathrm{grad}\,p + \frac{1}{Re}\Delta\boldsymbol{u} \quad (\mathrm{in}\ \ \Omega) \qquad (1)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 \quad (\mathrm{in}\ \ \Omega) \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{b}(t) \qquad (3)$$

上記の方程式を空間方向に離散化した式を以下のように表記することにする．

$$(\boldsymbol{u}_h)_t = -\boldsymbol{N}_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{b}_h) + \boldsymbol{L}_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{b}_h) - G_h\,p_h \qquad (4)$$

$$D_h\boldsymbol{u}_h = 0 \qquad (5)$$

ただし，$\boldsymbol{u}$ は領域内部点における速度成分の値，G_h は離散勾配演算子，$D_h = D_h(\boldsymbol{b}_h)$ は 離散発散演算子，$\boldsymbol{N}_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{b}_h)$ は 移流項，$\boldsymbol{L}_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{b}_h)$ は 粘性項，$\boldsymbol{b}_h = \boldsymbol{b}_h(t)$ は 速度の境界条件を表す．離散演算子などには，境界における速度の値が含まれる．また，以下においては添え字 h を省略することにする．

2.2 IRK 法と射影法

本論文では，非圧縮性流れへの陰的ルンゲ･クッタ (IRK) 法の適用を検討する．IRK 法の段数を s, 位数を p とする．IRK 法では，時刻 t^n から $t^{n+1}=t^n+\Delta t$ までの時間積分を以下のようにおこなう．ただし，以下の式において $\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{u}^n\simeq\boldsymbol{u}(t^n)$, $\boldsymbol{u}_i\simeq\boldsymbol{u}(t^n+c_i\Delta t)$, $i=1\ 2,\cdots,s$, a_{ij}, b_i, c_i は IRK 法の係数とする．

$$\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{u}_0+\Delta t\sum_{j=1}^{i}a_{ij}(-\boldsymbol{N}_j+\boldsymbol{L}_j-G\,p_j), \tag{6}$$

$$D\boldsymbol{u}_i=0,\quad i=1,\cdots,s, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{u}^{n+1}=\boldsymbol{u}_0+\Delta t\sum_{i=1}^{s}b_i(-\boldsymbol{N}_i+\boldsymbol{L}_i-G\,p_i), \tag{8}$$

$$D\boldsymbol{u}^{n+1}=0. \tag{9}$$

上記の方程式を圧力ポアソン方程式 (PPE) 法によって解く場合には，PPE の形に特別な配慮が必要である (18, 19)．そのことを考慮して，本論文では圧力方程式をもちいずに，IRK 法の方程式系を射影法によって解くことにする．速度場の射影にもちいるスカラー関数は射影，ゲージなどの機能を持っていればよいので，ここではその境界条件に圧力の境界条件そのものを与えることにする (20)．低容量形式に書かれていない通常の IRK-射影法では，非圧縮性ナビエ・ストークス方程式を下記のように時間積分する．また，低容量形式に書かれた IRK-射影法もこれに順じて，ルンゲ・クッタ法の各段で速度場を射影しながら時間積分する．

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{u}}_i=\boldsymbol{u}_0&+\Delta t a_{ii}(-\tilde{\boldsymbol{N}}_i+\tilde{\boldsymbol{L}}_i)\\&+\Delta t\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}(-\boldsymbol{N}_j+\boldsymbol{L}_j),\end{aligned} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{u}_i=\tilde{\boldsymbol{u}}_i-G\,\phi_i,\quad DG\,\phi_i=\frac{D\tilde{\boldsymbol{u}}_i}{\Delta t},\quad i=1,\cdots,s, \tag{11}$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1}=\boldsymbol{u}_0+\Delta t\sum_{i=1}^{s}b_i(-\boldsymbol{N}_i+\boldsymbol{L}_i), \tag{12}$$

$$\boldsymbol{u}^{n+1}=\tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1}-G\,\phi^{n+1},\quad DG\,\phi^{n+1}=\frac{D\tilde{\boldsymbol{u}}^{n+1}}{\Delta t}. \tag{13}$$

2.3 IRK 法の低容量形式

ルンゲ･クッタの s 段法を通常の形式でもちいて時間積分をおこなおうとすれば，少なくとも関数 s 倍分の記憶容量が必要なので，低容量の形式には大きなメリットがある．通常の形式を LS0，ジェームソン・ベイカーの RK 法 (14) と同様に，各段でいつも 0 段目からの積分をおこなう形式を LS1，各段で前段からの時間進行をおこなう形式を LS2 とおくことにする．LS1, LS2 は 3N-storage にできる．LS2 はさらに 2N-storage に縮小できる場合がある．なお，低容量の形式には，上記 2 つのほかに，ウィリアムソンの RK 法 (13) の形がある．ウィリアムソンの RK 法では各段を前段からスタートさせ，それと同時にフラックスもオイラー法に似た形で書き換えながら時間積分をしていく．しかしながら，ウィリアムソンの低容量 RK 法は $\psi-\omega$ 法には適用できるものの，非圧縮性流体の射影法には不適である．

3. IRK 法

ここでは，バッチャー表示で以下に表されるような 2 段法を取り上げる．

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & a_{12}\\ c_2 & a_{21} & a_{22}\\ \hline & b_1 & b_2\end{array} \tag{14}$$

このクラスの IRK 法は最高 4 次精度となる．4 次精度の方法はガウス法の名称で知られている．最高次までの位数条件をすべて満足するような係数を求めずに，より低次の位数条件をみたすような係数を求めると，係数が未定変数をふくむパラメータ族として表される．すると，その中から，パラメータに残された自由度を利用して低容量形式に表せる係数を探すことができる．2 段 IRK 法の係数の個数は 8 個で，4 位条件は 8 式，3 位条件は 4 式からなる．そこで，まず 2/3 位の位数条件をみたす係数を求めることにする．

3 位の位数条件は以下の 4 式である．右辺の上付き括弧内の数字は，その式がみたす位数を表している．

$$b_1+b_2=1^{(1)}, \tag{15}$$

$$b_1c_1+b_2c_2=\frac{1}{2}^{(2)}, \tag{16}$$

$$b_1c_1^2+b_2c_2^2=\frac{1}{3}^{(3)}, \tag{17}$$

$$b_1a_{11}c_1+b_1a_{12}c_2+b_2a_{21}c_1+b_2a_{22}c_2=\frac{1}{6}^{(3)}. \tag{18}$$

2 位の位数条件 (15,16) を b_1, b_2 について解けば

$$(c_2-c_1)b_1=c_2-\frac{1}{2}, \tag{19}$$

$$(c_1-c_2)b_2=c_1-\frac{1}{2} \tag{20}$$

を得る．

3.1 IRK-LS2 法 (s=1,p=2)

2 位の条件 (19,20) において $c_1=c_2$ とすれば，$c_1=c_2=1/2$ が得られる．この場合 IRK 法の 1 段目と 2 段目は同一の式となるため，重複する式を省略すれば，1 段法に帰着する．

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2\\ \hline & 1\end{array} \tag{21}$$

上記の Butcher tableau に対応する IRK 法は

$$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_0+\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{F}_1, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{u}^{n+1}=\boldsymbol{u}_0+\Delta t\boldsymbol{F}_1 \tag{23}$$

である．この式は条件をつけ加えることなく，下記の LS2 形式に変形することができる．

$$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_0+\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{F}_1, \tag{24}$$

$$\boldsymbol{u}^{n+1}=\boldsymbol{u}_1+\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{F}_1. \tag{25}$$

簡単な計算により，上記の方法の安定関数はどちらも $R(z)=(1+z/2)/(1-z/2)$ となるので，A-安定であることを示すことができる．

この方法 (22,23) は陰的中点則であり，同時にまた，ガウス法の最低次数の方法とも一致する．

3.2 IRK-LS0 法 (s=2,p=2)

2 位の条件 (19,20) を $c_1\neq c_2$ のもとに解けば，$b_1=(c_2-\frac{1}{2})/(c_2-c_1)$, $b_2=(c_1-\frac{1}{2})/(c_1-c_2)$ のような c_1, c_2 をパラメータとする解が得られる．LS 形式ではない 2 段法に対応するバッチャー表示は以下のとおりである．

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & c_1 & \\ c_2 & a_{21} & a_{22}\\ \hline & \frac{c_2-1/2}{c_2-c_1} & \frac{c_1-1/2}{c_1-c_2}\end{array} \tag{26}$$

また，計算の手順は以下のようになる．

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_0 + c_1\Delta t\boldsymbol{F}_1, \quad (27)$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_0 + a_{21}\Delta t\boldsymbol{F}_1 + a_{22}\Delta t\boldsymbol{F}_2, \quad (28)$$

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}_0 + b_1\Delta t\boldsymbol{F}_1 + b_2\Delta t\boldsymbol{F}_2. \quad (29)$$

ただし，式 (29) において係数 b_1, b_2 は

$$b_1 = \frac{c_2 - 1/2}{c_2 - c_1}, \quad b_2 = \frac{c_1 - 1/2}{c_1 - c_2} \quad (30)$$

である．この方法の安定関数を計算すると

$$R(z) = \frac{N(z)}{D(z)}, \quad (31)$$

$$D(z) = (1 - a_{22}z)(1 - c_1z), \quad (32)$$

$$N(z) = 1 + (1 - c_1 - a_{22})z$$
$$+(a_{22}c_1 - b_1a_{22} + b_2a_{21} - b_2c_1)z^2 \quad (33)$$

となる．LS0(s=2,p=2) が A-安定である条件は $R(z)$ が左半平面に極を持たず，$|R(z)| \le 1$ となることである．文献 [8] の定理 (351B) をもちいてこの条件を評価すれば

$$0 < c_1, \quad 0 < a_{22}, \quad (34)$$

$$1 \le a_{22} + c_1 \quad (35)$$

となる．

3.3 IRK-LS1 法 (s=2,p=2)

2 位の条件 (19,20) を $c_1 \ne c_2$ のもとに解けば，$b_1 = (c_2 - \frac{1}{2})/(c_2 - c_1)$, $b_2 = (c_1 - \frac{1}{2})/(c_1 - c_2)$ のような c_1, c_2 をパラメータとする解が得られる．このうち LS1 形式で表されるものは，$a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$ とおくことによって求めることができる．それに対応するバッチャー表示は以下のとおりである．

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & c_1 & \\ c_2 & & c_2 \\ \hline & \frac{c_2-1/2}{c_2-c_1} & \frac{c_1-1/2}{c_1-c_2} \end{array} \quad (36)$$

また，計算の手順は以下のようになる．

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_0 + c_1\Delta t\boldsymbol{F}_1, \quad (37)$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_0 + c_2\Delta t\boldsymbol{F}_2, \quad (38)$$

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}_0 + b_1\Delta t\boldsymbol{F}_1 + b_2\Delta t\boldsymbol{F}_2. \quad (39)$$

ただし，式 (39) において係数 b_1, b_2 は

$$b_1 = \frac{c_2 - 1/2}{c_2 - c_1}, \quad b_2 = \frac{c_1 - 1/2}{c_1 - c_2} \quad (40)$$

である．この方法の安定関数を計算すると

$$R(z) = \frac{N(z)}{D(z)}, \quad D(z) = (1 - c_1z)(1 - c_2z), \quad (41)$$

$$N(z) = 1 + (1 - c_1 - c_2)z + (c_1c_2 - c_1 - c_2 + \frac{1}{2})z^2 \quad (42)$$

となる．LS1(s=2,p=2) が A-安定である条件は，$c_1+c_2 = \alpha$, $c_1c_2 = \beta$ とおけば

$$0 < \alpha, \quad 0 < \beta, \quad (43)$$

$$\frac{1}{2} \le \alpha \le \frac{1}{2} + 2\beta \quad (44)$$

となる．係数 c_1, c_2 をもちいて表せば

$$\frac{1}{2} \le c_1 + c_2 \quad \text{and} \quad (45)$$

$$(c_1, c_2 \le \frac{1}{2} \quad \text{or} \quad c_1, c_2 \ge \frac{1}{2}) \quad (46)$$

となる．

3.4 IRK-LS2 法 (s=2,p=2)

IRK2 位法 (14) の中から LS2 形式に書けるものを探す．積分の第 1 段目が低容量であるためには

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_0 + a_{11}\Delta t\boldsymbol{F}_1 + a_{12}\Delta t\boldsymbol{F}_2 \to \boldsymbol{u}_0 + a_{11}\Delta t\boldsymbol{F}_1 \quad (47)$$

となる必要があるから，$a_{12} = 0$，したがって，$a_{11} = c_1$．第 2 段目が LS2 形式であるためには

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{u}_0 + a_{21}\Delta t\boldsymbol{F}_1 + a_{22}\Delta t\boldsymbol{F}_2 \\ &= \boldsymbol{u}_1 + (a_{21} - c_1)\Delta t\boldsymbol{F}_1 + a_{22}\Delta t\boldsymbol{F}_2 \\ &\to \boldsymbol{u}_1 + a_{22}\Delta t\boldsymbol{F}_2 \end{aligned} \quad (48)$$

とならなくてはならないことから，$a_{21} = c_1$，したがって $a_{22} = c_2 - c_1$．最後の段が LS2 形式であるためには

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^{n+1} &= \boldsymbol{u}_0 + b_1\Delta t\boldsymbol{F}_1 + b_2\Delta t\boldsymbol{F}_2 \\ &= \boldsymbol{u}_2 + (b_1 - c_1)\Delta t\boldsymbol{F}_1 + (b_2 - c_2 + c_1)\Delta t\boldsymbol{F}_2 \\ &\to \boldsymbol{u}_2 + (b_2 - c_2 + c_1)\Delta t\boldsymbol{F}_2 \end{aligned} \quad (49)$$

とならなければならないことから，$b_1 = c_1$, したがって $b_2 = 1 - c_1$．ここで，式 $b_1 = c_1$ と式 (19) より $c_1 \ne 1$ がわかり，c_2 は c_1 を用いて

$$c_2 = \frac{1/2 - c_1^2}{1 - c_1} \quad (50)$$

のように表される．このとき，式 $b_2 = 1 - c_1$ と式 (19) はみたされる．以上のことより，2 位で LS2 形式は可能で，それはバッチャー表示で下記のように表され

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & c_1 & \\ c_2 & c_1 & c_2 - c_1 \\ \hline & c_1 & 1 - c_1 \end{array} \quad (51)$$

計算手順は以下のようになる．

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_0 + c_1\Delta t\boldsymbol{F}_1, \quad (52)$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1 + (c_2 - c_1)\Delta t\boldsymbol{F}_2, \quad (53)$$

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}_2 + (1 - c_2)\Delta t\boldsymbol{F}_2. \quad (54)$$

この方法の安定関数は

$$R(z) = \frac{N(z)}{D(z)}, \quad (55)$$

$$D(z) = [1 - (c_2 - c_1)z][1 - c_1z], \quad (56)$$

$$N(z) = 1 + (1 - c_2)z \quad (57)$$

となる．LS2(s=2,p=2) が A-安定である条件を文献 [8] の定理をもちいて評価すれば

$$c_1 > 0, \quad c_1 < c_2, \quad (1 - c_2)^2 \le c_1^2 + (c_2 - c_1)^2 \quad (58)$$

となる．この不等式に式 (50) をもちいれば

$$0 < c_1, \quad c_1 < c_2 \quad (59)$$

となる．式 (50) を考慮しながら整理すれば，上の不等式が成り立つときに

$$0 < c_1 < \frac{1}{2} \tag{60}$$

となる．c_1 が式 (60) の範囲にあるとき，$1/2 < c_2 \leq 2-\sqrt{2}$ である．この方法と DIRK 法 [7, 12] との関係は，この方法で $a_{22} \equiv c_2 - c_1 = c_1$, すなわち $c_2 = 2c_1$ とした場合に $c_1 = 1-1/\sqrt{2}$, $c_2 = 2-\sqrt{2}$ となり，これは DIRK の 2 段 2 位法と一致する．

3.5 IRK-LS0 法 (s=2,p=3⁻)

前節までは，2 位の条件 (15,16) をみたす一般的な係数 (19,20) の中から低容量形式になるものを調べた．この小節では，2 位の条件に加えて 3 位の条件 (17) をみたす一般的な (低容量ではない) 係数を求める．ただし，p=3^- の記号は，条件 (17) がみたされているが，条件 (18) がみたされていないことを表すものとする．

まず式 (17) の両辺に $(c_2 - c_1)$ をかけて，それに式 (19,20) を代入する．この式を整理すると，左辺にも因数 $(c_2 - c_1)$ があらわれるが，$c_1 = c_2$ の場合は 3.1 節で取り扱った場合に帰着する．そこで，$c_1 \neq c_2$ とする．両辺を因数 $(c_2 - c_1)$ で割って，整理すれば，

$$-c_1 c_2 + \frac{c_1 + c_2}{2} = \frac{1}{3} \tag{61}$$

を得る．ここで，$\alpha = c_1 + c_2$ とおいて c_1, c_2 を α で表せば，

$$c_1, c_2 = \left(\alpha \mp \sqrt{(\alpha-1)^2 + \frac{1}{3}}\right), \quad \frac{2}{3} \leq \alpha \leq \frac{4}{3} \tag{62}$$

となる．ただし，上式で根号の前にある符合は本来どちらをとってもかまわないのだが，$c_1 < c_2$ となるように選んである．そうすると，式 (62) からわかるように $c_1 < 1/2 < c_2$ になる．また，上記 α の定義域は $c_1 \geq 0$, $c_2 \leq 1$ となる範囲として定めてある．このとき，c_1, c_2 の値域は $0 \leq c_1 \leq 1/3$, $2/3 \leq c_2 \leq 1$ となる．係数 a_{ij} には条件 (18) を課さないので，$c_j = \sum_i a_{ij}$ をみたすものから任意に値を選ぶことができる．

低容量ではない (LS0) 本節の方法はバッチャー表示で以下のように表され

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & a_{12} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & \frac{c_2-1/2}{c_2-c_1} & \frac{c_1-1/2}{c_1-c_2} \end{array} \tag{63}$$

計算手順は次のとおりとなる．

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_0 + a_{11}\Delta t \boldsymbol{F}_1 + a_{12}\Delta t \boldsymbol{F}_2, \tag{64}$$
$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_0 + a_{21}\Delta t \boldsymbol{F}_1 + a_{22}\Delta t \boldsymbol{F}_2, \tag{65}$$
$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}_0 + b_1\Delta t \boldsymbol{F}_1 + b_2\Delta t \boldsymbol{F}_2. \tag{66}$$

上式で c_1, c_2 は式 (62) をみたすものとし，式 (71) において $b_1 = (c_2 - 1/2)/(c_2 - c_1)$, $b_2 = (c_1 - 1/2)/(c_1 - c_2)$ とする．

この方法の積分精度は，ジェームソン・ベイカーの陽的ルンゲ・クッタ法 [14] と同様，波動方程式，線形化オイラー方程式など線形の方程式においては時間 3 次精度で，非線形のナビエ・ストークス方程式では 2 次精度である．

3.6 IRK-LS1 法 (s=2,p=3⁻)

前節の方法において，係数を

$$a_{11} = 0, \quad a_{21} = 0 \tag{67}$$

(LS1 条件) とすれば，自動的に $a_{12} = c_1$, $a_{22} = c_2$ が定まり，低容量 LS1 形式が可能である．したがって，LS1 形式にするために，式 (61) 以外のパラメータ α に対する追加の条件は不要である．

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & c_1 & \\ c_2 & & c_2 \\ \hline & \frac{c_2-1/2}{c_2-c_1} & \frac{c_1-1/2}{c_1-c_2} \end{array} \tag{68}$$

計算手順は次のとおりとなる．

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_0 + c_1\Delta t \boldsymbol{F}_1, \tag{69}$$
$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_0 + c_2\Delta t \boldsymbol{F}_2, \tag{70}$$
$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{u}_0 + b_1\Delta t \boldsymbol{F}_1 + b_2\Delta t \boldsymbol{F}_2. \tag{71}$$

前節と同様，上式において c_1, c_2 は式 (62) をみたすものとし，式 (71) において $b_1 = (c_2 - 1/2)/(c_2 - c_1)$, $b_2 = (c_1 - 1/2)/(c_1 - c_2)$ とする．

この方法の安定関数は

$$R(z) = \frac{N(z)}{D(z)}, \quad D(z) = (1 - c_1 z)(1 - c_2 z), \tag{72}$$

$$N(z) = 1 + (1 - c_1 - c_2)z + (c_1 c_2 - c_1 - c_2 + \frac{1}{2})z^2 \tag{73}$$

となる．LS1(s=2,p=3^-) が A-安定である条件は，$R(z)$ を評価することによって，$c_1 + c_2 = \alpha$, $c_1 c_2 = \beta$ とおいて

$$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2} + 2\beta \tag{74}$$

のように求まる．ここで，式 (61) より $-\beta + \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$ であるから，上式で 2 番目の不等号は成立しない．したがって，残念ながらこの方法は A-安定ではない．

3.7 IRK-LS2 法 (s=2,p=3⁻)

前々節の方法において，低容量 LS2 形式に書けるための条件

$$a_{11} = 0, \quad a_{21} = c_1, \quad b_1 = a_{21} \tag{75}$$

を式 (19) と組み合わせて，それらを c_1 について解けば，

$$c_1^3 - c_1^2 + \frac{c_1}{3} - \frac{1}{12} = 0 \tag{76}$$

が得られる．一方で，式 (75) を (20) と組み合わせて c_1 について解くと，

$$c_1^3 - \frac{c_1^2}{2} + \frac{1}{3} = 0 \tag{77}$$

が得られる．以上のふたつの式を同時に満足するような c_1 の値はなく，p=3^- で LS2 形式は不可能であることが示される．

3.8 IRK-LS2 法 (s=2,p=3)

IRK 法 (14) において，2 位の位数条件 (19,20) と 3 位の位数条件，(61) および (18)，をすべて矛盾なくみたす実数係数は存在しない．したがって，完全な 3 位法を低容量 LS2 形式に表すことはできない．同様に，4 位法を LS2 形式に表すことはできない．

以上 3 章各節で検討した結果をまとめれば，3.1 節の LS2(s=1,p=2)，3.3 節の LS2(s=2,p=2) は A-安定であり，2N-storage の陰的ルンゲ・クッタ法として非圧縮の流体計算に適用可能である．3.5 節の LS1(s=2,p=3^-) は 3N-storage で，この方法は，線形の方程式を 3 次精度で積分することができる．今回は 3N-storage の方法を試していないが，流体計算への適用結果に興味が持たれる．なお，これらの方法は非圧縮性流体だけではなく，圧縮性流体に対しても適用することが可能である．

4. 計算結果

4.1 矢のまわりの流れ

細長比 (長さ/直径)120 の矢羽なしのアーチェリー用シャフト X10 先端に椎型 (BUL) 鏃 (やじり) を装着した場合の抵抗係数を，一般座標差分法非圧縮性流体コードで計算した．

差分法は移流項に 3 次の風上寄り差分 (人工粘性項の係数を K-K スキーム [21] の 1/4 より小さく，1/12 とした)，粘性項および圧力勾配項に 2 次の中心差分をもちい，発散項は計算空間における有限体積法で離散化した．

時間進行には，(a) ジェームソン・ベイカーによる 3 段の低容量ルンゲ・クッタ陽解法 (表 1 では RKJ3 と略記)，(b) 3.1 節の低容量陰的中点則 IRK-LS2(s=1,p=2)，(LS2(1,2) と略記)，(c) 3.4 節の低容量ルンゲ・クッタ法 IRK-LS2(s=2,p=2)，(LS2(2,2) と略記) をもちいた．ただし (c) の係数は $c_1 = 1 - 1/\sqrt{2}$ とした．また，比較のためにオイラーの陽解法 (eE1)，陰解法 (BE1) をもちいた計算をおこなった．ここでもちいた方法を表 1 にまとめて示す．

method	max Δt	cpu time (s)	$r_{\Delta t}$	r_{cpu}
eE1	0.0014	14.7	1	1
BE1	0.0017	39.5	1.2	2.7
RKJ3	0.0019	41.3	1.4	2.8
LS2(1,2)	0.0035	54.4	2.5	3.7
LS2(2,2)	0.0056	96.5	4.0	6.6

Table 1: Max Δt and cpu time

2.2 節に述べた射影法を使用して，スカラー関数のポアソン方程式は，(a) 前処理なしの共役勾配法，(b) ヤコビ・ガウスザイデル法，(c) マルチグリッド法のいずれかをもちいた．(c) は残差をソース項として粗格子で誤差を緩和する方式をとり，制限関数に注入，延長関数に双線形補間，緩和にガウス・ザイデル法をもちいた．格子は 3 レベルとした．

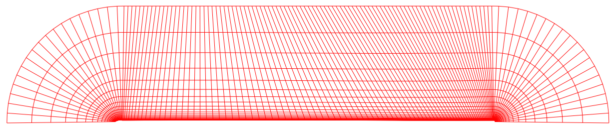
物体に沿った格子は O-O のトポロジーで，Eiseman による 4 平面補間法 [22] によって生成した．鏃の先端部分だけは，η-線を中心軸と一致させるために超限補間法による補正をおこなった．鏃および矢 (矢と略記) 表面に沿う方向を ξ, 矢表面から離れる方向を η, 矢の軸まわりの方向を ζ とするとき，予備計算でもちいた格子点数は，ξ 方向に流れが大きく変化しないことを仮定して $521 \times 121 \times 81$ とした．

シャフト直径を 1 として，遠方境界は矢表面から 40 の位置にとってある．なお，シャフトの後端は半径 0.5 の半球としてある．η 方向の矢表面での最小格子幅は約 1.3×10^{-3}, ξ 方向の最小格子幅は約 0.01, ζ 方向の格子幅は約 0.04 である．時間刻みの値は，特に記載のないときには $\Delta t = 0.001$ とした．

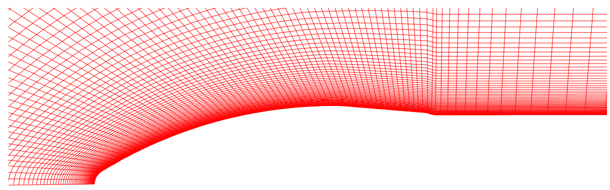
Fig.1 に格子とシャフト形状の図を示す．座標軸は流れの方向に x, 主流に直交する方向に y および z 軸をとった．Fig.1(a) には ζ = 1-面上の格子を，xy-平面上に図示してある．原点の位置は，鏃付け根部分にとってある．Fig.1(b) は椎型鏃付近の拡大図を示す．Fig.1(c) には X10 および参考までに A/C/E シャフトの寸法実測データを [mm] 単位で示す．

境界条件は矢表面で粘着条件，矢前方部分および側面の遠方では一様流と一定圧力 $p = 0$ とした．矢後方部分の遠方では x 方向の平均流速による流出境界条件および，主流方向のトラクションフリー条件とした．

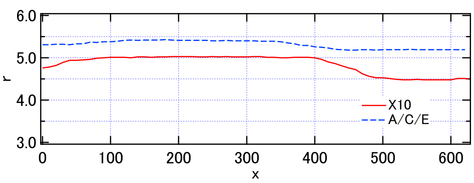
代表長をシャフト直径，代表速度を矢の飛翔速度 (主流速度)，動粘性係数を標準状態の乾燥空気の値としたとき，競技矢のレイノルズ数は約 18000 と見積もられている [23, 24]．そこで，本計算においてはレイノルズ数を $Re = 2 \times 10^4$ として，計算は無次元時間で $t = 500$ まで時間を進めた．これは実時間で約 0.05 [s] に相当する．初期条件は一様流である．以下に示すのは迎角 0 の場合の計算結果である．



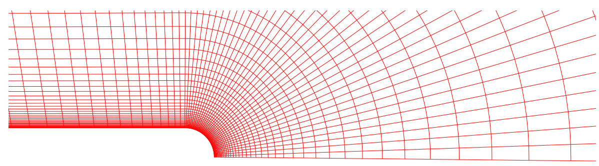
(a) ζ = 1-surface



(b) bullet-type point



(c) measured curve data of X10 shaft



(d) tail

Fig. 1 Grid system for the bullet point and X10 shaft

4.1.1 安定上限と計算時間

初期値から 100 ステップ安定に計算できる Δt の最大値と，かかった計算時間を

表 1 に示す．右側 2 列は $\max\Delta t$ と計算時間の，オイラー陽解法に対する比を示してある．この問題に対して BE1 では予想外に Δt を大きくとることができず，むしろ陽解法である RKJ3 の方が若干安定である．1 ステップあたりの計算時間はほぼ同じで，両者ともに eE1 の 3 倍程度となっている．

つぎに，低容量陰的中点則 LS(1,2) は $\max\Delta t$ の値を eE1 の約 2.5 倍にとることができ，計算時間は eE1 の約 4 倍になっている．LS(1,2) は 1 段目が BE1，2 段目が eE1 と同じやり方で時間を進めるわけであるから，非常に簡単な方法でこれだけ安定性を高めることができることになる．

2 段の低容量ルンゲ･クッタ陰解法 LS(2,2) は $\max\Delta t$ の値を eE1 の 4 倍にとることができ，計算時間は eE1 の約 6 倍になっている．この矢まわりの流れを計算するとき，これ以上格子点数を増した場合には RKJ3 では若干安定性不足になるために，陰解法が望まれていた．LS(p,2) が高い安定性をもつことが示されたために，この問題の解決に目処を立てることができた．

4.1.2　計算結果　矢にはたらく抵抗係数の時刻歴を Fig.2 に示す．BE1 と RKJ3 は時刻 $t = 440$ 付近までグラフ上ではほとんど区別がつかないほど同じ値となった．これに対して，LS(1,2) と LS(2,2) はやや異なる値を示したものの，全体的な傾向や．変動の周期などは BE1，RKJ3 と類似である．また，この LS(1,2) と LS(2,2) も時刻 $t = 450$ 付近まではほとんど同じ C_D 値を示した．比較のために，細長比 120 の直円柱シャフトに椎型鏃を装着して，格子点数 261x121x81 の粗格子上で RKJ3 をもちいて計算した C_D 値を Fig.3 に示す．図中には実験による測定値 [23, 24, 25] もプロットしてある．X10 シャフトに対して計算された C_D 値は Fig.3 にプロットされた値とも矛盾しない値になっているものと判断される．

最後に，流れ場の可視化図を Fig.4 に示す．

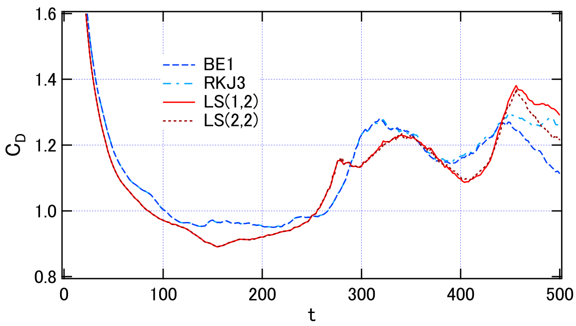


Fig. 2 Time history of drag coefficient

5.　結論

本報では対角成分の係数が互いに異なる対角陰的ルンゲ・クッタ (DIRK) 法のなかから，低容量の形式に書けるものを探して，それを Chorin のタイプの射影法と組み合わせて非圧縮性流体の計算に応用した．

LS2 形式 (2N-storage) となるものは，1 段 2 位が 1 種類 (IRK-LS2(1,2))，2 段 2 位が 1 種類 (IRK-LS2(2,2)) あり，LS2(2,2) は値を変化させることができるパラメータを 1 つふくむ．LS1 形式 (3N-storage) となるものは，2 段 2 位に 1 種類あり，この方法も係数が変数の 1 パラメータ族として与えられる．

鏃を装着したベアーシャフトまわりの 3 次元流れに LS2(1,2) と LS2(2,2) を適用した計算では，オイラー陽解法の 2.5-4 倍の安定性が示され，これらの方法の実用性が検証できたものと考えられる．

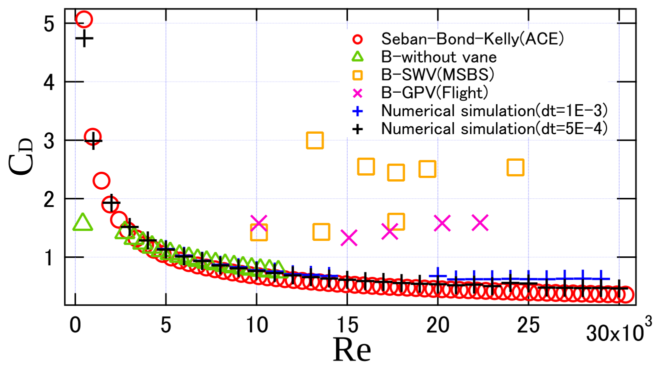


Fig. 3 Drag coefficient C_D vs Re

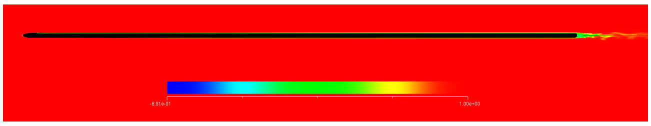


Fig. 4 Flow field at $t = 600$, $Re = 2.0 \times 10^4$

参考文献

(1) Kim, J. and Moin, P., Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations, J. Comput. Phys., **59** (1985) 308-323.

(2) Owen, H. and Codina, R., A third-order velocity correction scheme obtained at the discrete level, Int. J. Numer. Meth. Fluids., **69** (2012) 57-72.

(3) Ascher, U. M., Ruuth, S. J. and Wetton, T. R., Implicit-Explicit methods for time-dependent partial differential equations, SIAM J. Numer. Anal., **32** (3) (1995) 797-823.

(4) Butcher, J. C., Implicit Runge-Kutta processes, Math. Comp, **18** (1964) 50-64.

(5) Butcher, J. C., A stability property of implicit Runge-Kutta methods, BIT, **15** (1975) 358-361.

(6) Bickart, T. A., An efficient solution process of implicit Runge-Kutta methods, SIAM J. Numer. Anal., **14** (6) (1977) 1022-1027.

(7) Alexander, R., Diagonally implicit Runge-Kutta methods for stiff O.D.E.'s, SIAM J. Numer. Anal., **14** (1977) 1006-1021.

(8) Butcher, J. C., Numerical methods for ordinary differential equations, (John Wiley & Sons, Ltd., Chichester), (2003) pp. 88, 91, 165.

(9) E. Hairer, Highest possible order of algebraically stable diagonally implicit Runge-Kutta methods, BIT, **20** (1980) 254-256.

(10) E. Hairer and Wanner, G., Solving ordinary differential equations II, Stiff and differential-algebraic problems, second revised ed. (Springer), (1996) p. 71.

(11) Sanders, B., Energy-conserving Runge-Kutta methods for the incompressible Navier-Stokes equations, J. Comput. Phys., **233** (2013) 100-131.

(12) 岩津, 対角陰的ルンゲ・クッタ (DIRK) スキームを用いた圧力修正射影法, 第 30 回数値流体力学シンポジウム講演予稿集, B01-2, 5pages, 2016.

(13) Williamson, J. H., Low-storage Runge-Kutta schemes, J. Comput. Phys., **35** (1980) 48-56.

(14) Jameson, A. and Baker, T. J., Solution of the Euler equations for complex configurations, AIAA-paper 83-1929 (1983).

(15) Jameson, A., Success and challenges in computational aerodynamics, AIAA-paper 87-1184 (1987).

(16) Carpenter, M. H. and Kennedy, C. A., Fourth-order 2N-storage Runge-Kutta schemes, NASA Technical Memorandum 109112, (1994).

(17) Brasey, V. and Hairer, E., Half-explicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic systems of index 2, SIAM J. Numer. Anal., **30** (1993) 538-552.

(18) 岩津, 安定でコンシスタントなルンゲ・クッタ-圧力方程式法による非圧縮性流体の高次精度時間積分法, 第 64 回理論応用力学講演会 (NCTAM2017) 講演論文集, 2pages, 2017.

(19) 岩津, 陽的ルンゲ・クッタ法による非圧縮流れの時間高次解法, 第 31 回数値流体力学シンポジウム講演予稿集, A09, 6pages, 2017.

(20) Weinan, E. and Liu, J.-G., Gauge method for viscous incompressible flows, Comm. Math. Sci., **1**(2) (2003) 317-332.

(21) Kawamura, T. and Kuwahara, K., Computation of high Reynolds number flow around circular cylinder with surface roughness, AIAA-paper, 84-0340 (1984).

(22) Eiseman, P. R., Mesh generation using algeraic techniques, NASA Conference Publication 2166, Numerical Grid Generation Techniques, (1980) 73-120.

(23) 鈴木一史, 桝井和典, 向山桂太, 宮嵜武, 澤田秀夫, 矢の空力特性-境界層遷移に対する先端形状の影響- , ながれ, **29** (2010) 289-292.

(24) 大川恭平, 田口智清, 宮崎武, 杉浦裕樹, 矢の空力特性に対する細長比の影響, ながれ, **23** (2013) 449-456.

(25) Miyazaki, T., Mukaiyama, K., Komori, Y., Okawa, K., Taguchi, S. and Sugiura, H., Aerodynamic properties of an archery arrow, Sports Eng. (2013) **16** 43-54.