

# メニーブロック法による非構造格子 LES Unstructured-grid LES Using Many-block Method

○ 松山 新吾, JAXA, 東京都調布市深大寺東町 7-44-1, E-mail: smatsu@chofu.jaxa.jp  
Shingo Matsuyama, Japan Aerospace Exploration Agency, 7-44-1 Jindaiji-higashimachi, Chofu, Tokyo

A high-order unstructured-grid large-eddy simulation (LES) is performed using the many-block method. To achieve an  $N$ -th order scheme in the many-block method, hexahedral parent cells are sub-divided into structured  $N^3$  cells. A finite volume method is applied to solve the governing equations in the sub-divided cells, and high-order spatial accuracy is implemented by interpolating the primitive variables at the cell interfaces of sub-divided cells with a high-order polynomial. Two benchmark problems, vortex transport by uniform flow and Taylor-Green vortex at  $Re = 5000$ , are solved by the 5th-order many-block method. The results show that the many-block method achieves 5th-order spatial accuracy in the vortex transport problem, and are in excellent agreement with a reference solution for Taylor-Green vortex obtained by a pseudo-spectral method.

## 1. はじめに

非構造格子はトポロジー的な制約を受けることなく空間を多面体で埋めることができるため、複雑形状への対応が容易である。非構造格子による CFD において空間高次精度を実現する手法として discontinuous Galerkin (DG) 法<sup>1)</sup>, flux reconstruction (FR) 法<sup>2)</sup> や spectral volume (SV) 法<sup>3)</sup> が精力的に研究されている。これらの手法ではセル内部に自由度 (内点) を導入することで空間高次精度を構成し、四次精度以上の非構造格子解法が実現されている。現状では内部自由度を持つセルを取り扱うことのできるプリポスト環境が十分に普及していないが、市販のメッシャーによる対応も進んでおり<sup>4,6)</sup>, 複雑形状を伴う流れ場に対する空間高次精度解法として最も有望である。

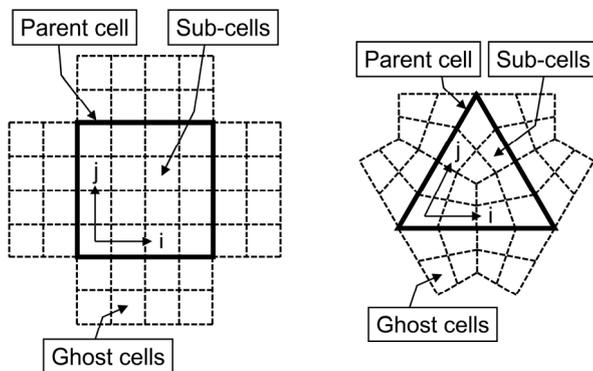


Fig. 1 Examples of a parent cell and sub-divided cells for (left) hexa- and (right) tetra-mesh.

著者はこれまでに、非構造格子による DNS/LES を目的として、DG 法などと同様に内部セルを持つ手法である「メニーブロック法」を提案した<sup>7)</sup>。メニーブロック法では、図 1 に示すようにセル内部をサブセルにより構造格子的に分割する。ヘキサセルで  $N$  次精度のスキームを構築する場合、 $N^3$  個程度のサブセルで分割を行なう。テトラセルの場合、テトラセルを 4 つのヘキサセルに分割したのちにさらにサブセルへ分割を行なう。したがって、 $N$  次精度のスキームを構築する場合、 $4 \times (N/2)^3$  ( $N$  は偶数) のサブセルへ分割される。各サブセルはセル中心のデータを保持しており、通常の有限体積法により支配方程式を解くことができる。また、空間高次精度はサブセルの境界面で物理量を高次に再構築することにより実現する。サブセルは完全に構造格子系であるため構造

格子の高次精度化手法をそのまま適用できる。また、親セルの境界面にはゴーストセルを配置し、隣接する親セルとデータ交換をすることで、全てのサブセルについて空間高次精度が実現できる。

メニーブロック法の長所は、構造格子ソルバーの高次精度化手法がそのまま利用できるため、DG 法や FR 法などの非構造高次精度化手法に全く馴染みのない研究者にも実装しやすい点にある。短所はゴーストセル部分でメモリ・演算が重複するために余分な計算コストが生じることである。本稿では、ヘキサセルを用いた五次精度のメニーブロック法により、ベンチマーク問題として二次元渦の移流問題<sup>8)</sup>と  $Re = 5000$  の Taylor-Green vortex<sup>9)</sup> について解析を実施した結果を紹介する。また、シンポジウムの講演においては  $Re = 3900$  の円柱周りの LES<sup>10)</sup> を実施した結果についても報告する予定である。

## 2. 数値解析手法

本研究では主に LES による解析を実施する。LES に用いる支配方程式はフィルター操作を施した三次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式であり、保存式として密度・運動量・エネルギーの保存式を解く。通常、フィルター操作を施した支配方程式にはサブグリッドスケール (SGS) 項が含まれるが、本研究では SGS 項を使用しない陰的 LES (ILES) により解析を行う。ILES では SGS 項を 0 とするため、見かけ上は DNS と同じ形式の方程式を解くことになる。

支配方程式は有限体積的手法により離散化し、対流流束を SLAU スキーム<sup>11)</sup>により計算する。本研究では、サブセル界面で原始変数 ( $\rho, u, v, w, p$ ) を高次多項式で再構築<sup>12)</sup>することにより空間高次精度化を行う。本稿では以下に示す五次の多項式による補間<sup>13)</sup>を実装した。

$$u_{i+\frac{1}{2}}^L = \frac{2}{60}u_{i-2} - \frac{13}{60}u_{i-1} + \frac{47}{60}u_i + \frac{27}{60}u_{i+1} - \frac{3}{60}u_{i+2} \quad (1)$$

さらに、低マッハ数領域における数値粘性を低減するため、Thomber らによって提案された修正<sup>14)</sup>を補間した速度成分へ加える。粘性流束は四次精度の中心差分的手法により求める。粘性係数はサザーランドの式により、熱伝導係数はプラントル数を 0.72 として評価した。時間積分には、二段階二次もしくは三段三次の Runge-Kutta 法を用いる。解析では CFL 数が 0.5~0.7 を維持するように時間刻みを設定した。

メニーブロック法による非構造格子ソルバーでは FV-UNS 形式および Gmsh 形式の非構造格子を読み込む仕様になっている。

また Metis<sup>(15)</sup>などの格子分割ソフトウェアを用いた格子分割にも対応する。解析は宇宙航空研究開発機構 (JAXA) に設置されている JAXA スーパーコンピュータシステム (JSS2) 上で 32~63 ノード (1024~2016 コア) を用いて解析を実施した。

### 3. メニーブロック法による解析例

ヘキサセルによるメニーブロック法では一つの親セルに  $N^3$  個のサブセルが含まれるため、セル数を示す指標として自由度 (DOF) を用いる。これは、サブセルを含めたセル数をカウントするものであるが、DG 法などの高次精度非構造格子スキームにおいてセル数を示す際に広く用いられている指標である。例として五次精度で  $105^3$  個の親セルを用いて解析を行う場合、DOF は  $5^3$  個のサブセルを含めた  $525^3 (=105 \times 5)^3$  となる。

#### 3. 1. 二次元渦の移流問題

最初のベンチマーク問題として、図 2 に示すような二次元渦の移流問題<sup>(8)</sup>を解いた結果を紹介する。この問題では以下の初期条件を与えて渦を 50 周期 ( $50T$ ) だけ移流させる。

$$\begin{aligned} u_0 &= u_\infty - \beta u_\infty \frac{y - y_c}{R} e^{-r^2/2} \\ v_0 &= \beta u_\infty \frac{x - x_c}{R} e^{-r^2/2} \\ T_0 &= T_\infty - \frac{0.5}{C_p} (\beta u_\infty)^2 e^{-r^2} \\ p_0 &= \rho_0 R_{gas} T_0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $u, v$  は各速度成分、 $T$  は温度、 $p$  は圧力、下付き文字の  $\infty$  は一様流の状態を示し、 $r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$  である。また、 $\beta=0.2, R=0.05$  とした。一様流のマッハ数は 0.5 とした。

図 2 に  $DOF=270^2$  の格子を用いて  $t=0$  から  $t=50T$  まで渦を移流させた結果を渦度分布で示す。50 周期後の渦度分布は減衰することなく初期の分布を維持しており、高い空間精度が実現されている。

図 3 に格子幅を変えて誤差評価を行なった結果を示す。三段階に格子幅を変化させた結果は、 $u, v$  のいずれも五次のスロープと同じ傾きで誤差が減少しており、メニーブロック法により空間五次精度が実現されている。

#### 3. 2. Taylor-Green vortex

次に  $Re = 5000$  の Taylor-Green vortex<sup>(9)</sup> についてベンチマークを行った結果を紹介する。Taylor-Green vortex では  $-\pi L < x, y, z < \pi L$  サイズの立方体計算領域で以下の分布を初期条件として時間発展問題を解く。

$$\begin{aligned} u &= U_0 \sin\left(\frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{y}{L}\right) \cos\left(\frac{z}{L}\right) \\ v &= -U_0 \cos\left(\frac{x}{L}\right) \sin\left(\frac{y}{L}\right) \cos\left(\frac{z}{L}\right) \\ w &= 0 \\ p &= p_0 + \frac{\rho_0 U_0^2}{16} \left\{ \cos\left(\frac{2x}{L}\right) + \cos\left(\frac{2y}{L}\right) \right\} \left\{ \cos\left(\frac{2z}{L}\right) + 2 \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $u, v, w$  は各速度成分、 $p$  は圧力、 $L, U_0, p_0, \rho_0$  はそれぞれ代表長、代表速度、代表圧力、代表密度である。代表量で定義されるレイノルズ数が 5000、マッハ数は約 0.09 であり、圧縮性の効果は無視できる。本解析では立方体計算領域の全ての境界に周期境界条件を設定した。

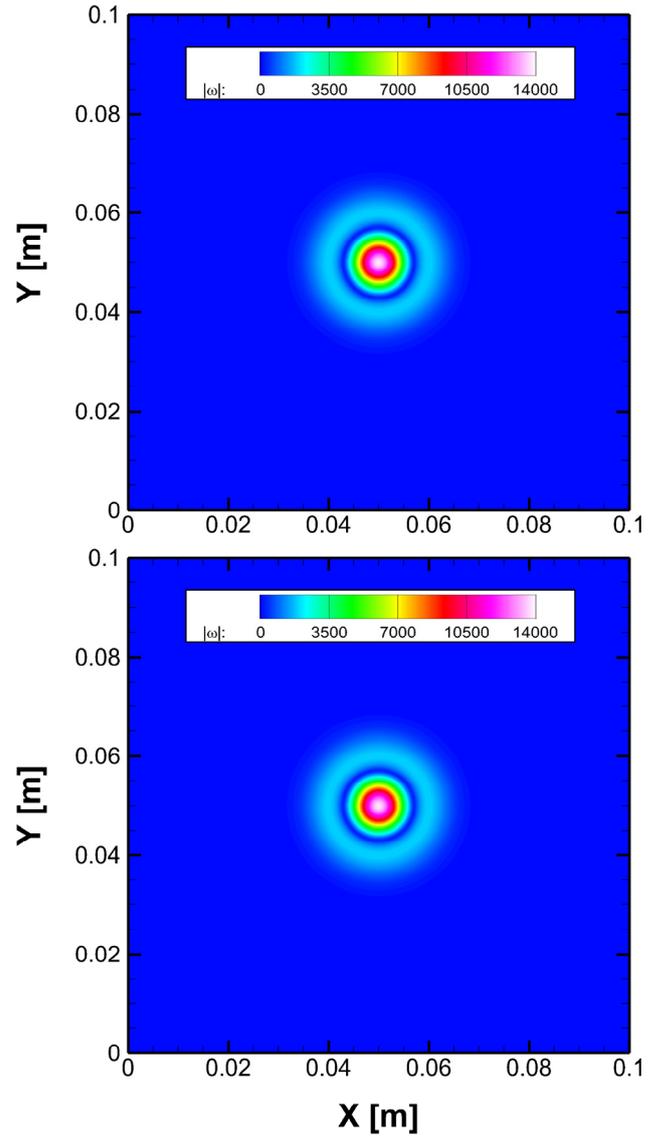


Fig. 2 Instantaneous vorticity contours on the  $270^2$  grid at (upper)  $t=0$  and (lower)  $t=50T$ .

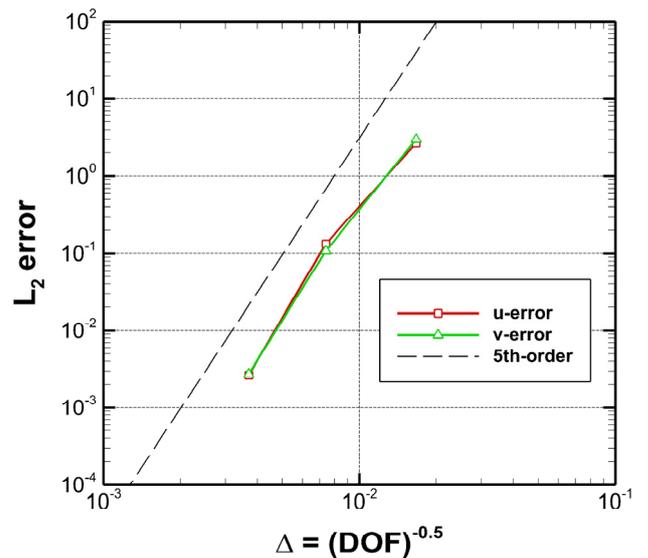


Fig. 3  $U$ - and  $V$ -velocity errors versus grid spacing  $\Delta$ .

図 4 に kinetic energy  $E_k$  の散逸率  $\varepsilon = -dE_k/dt$  について時間発展を比較した結果を示す。DOF=525<sup>3</sup> の格子を用いたメニープロック法による解析結果はリファレンスの擬似スペクトル法による結果<sup>(16)</sup> (864<sup>3</sup> 格子点) と非常に良く一致する。

図 5 にメニープロック法により得られた渦の三次元構造を示す。図の結果は  $t=9t_0$  における速度勾配テンソルの第二不変量  $Q$  の等値面 (渦度により色付け) を示す。DOF=525<sup>3</sup> の格子による解析では微細な三次元渦構造が捉えられており、高い空間精度が実現されていることがわかる。

### 3. 3. 円柱周りの LES

実問題に対するメニープロック法の適用例として、シンポジウムでは  $Re = 3900$  の円柱周りの LES<sup>(10)</sup> について結果を報告する予定である。図 6 に Gmsh 形式の非構造格子データを読み込んだ結果を示す。色付けされた親セル群は領域分割型の並列化により各 CPU に割り当てられる。また、それぞれの親セル内部は 5<sup>3</sup> 個のサブセルで分割されている。二次元渦の移流問題と Taylor Green vortex では直交格子を用いた解析を行ったが、図 6 に示す格子ではゴーストセル部分の格子線が折れ曲がっており、このような直交性の悪い格子でもメニープロック法の空間精度が維持されるかを調査する予定である。

### 4. まとめ

本稿では、ヘキサセルを用いた五次精度のメニープロック法により、ベンチマーク問題として二次元渦の移流問題と  $Re = 5000$  の Taylor-Green vortex について解析を実施した結果を紹介した。二次元渦の移流問題では三段階に格子解像度を変化させ誤差評価を行い、空間五次精度が実現されていることを示した。Taylor-Green vortex では DOF = 525<sup>3</sup> の格子による解析で擬似スペクトル法と同じレベルの空間高次精度を実現できることが示された。

実問題に対するメニープロック法の適用例として、シンポジウムでは  $Re = 3900$  の円柱周りの LES について結果を報告する予定である。この問題に用いる計算格子ではゴーストセル部分の格子線が折れ曲がっており、直交性の悪い格子でもメニープロック法の空間精度が維持されるかを調査する予定である。

### 謝辞

本研究では数値計算を実行するにあたって、宇宙航空研究開発機構スーパーコンピュータ『JSS2』を用いた。ここに記して関係者各位に謝意を表す。

### 参考文献

- (1) Cockburn, B. and Shu, C.-W., J. Comput. Phys. 141 pp. 199-224, 1998.
- (2) Huynh, H. T., AIAA Paper 2007-4079.
- (3) Sun, Y., Wang, Z. J., and Liu, Y., J. Comput. Phys. 215, pp.41-58, 2006.
- (4) Karman, S. L., Wyman, N. and Steinbrenner, J. P., AIAA Paper 2017-3790.
- (5) Karman, S. L., Erwin, J. T., Glasby, R. S. and Stefanski, D., AIAA Paper 2016-3178.
- (6) <https://www.pointwise.com/news/2018/High-Order-Mesh-Generation-CFD-Now-Available-Pointwise.html>
- (7) 松山, JAXA-SP-17-004, pp. 153-158, 2017.
- (8) <https://how5.cenaero.be/content/vi1-vortex-transport-uniform-flow>
- (9) Taylor, G. I. and Green, A. E., Proceedings of the Royal Society of London A 158, pp. 499-521, 1937.
- (10) <https://how4.cenaero.be/content/as1-dnsles-infinite-cylinder-re3900>
- (11) Shima, E. and Kitamura, K., AIAA Journal 49, pp.1693-1709, 2011.

- (12) Matsuyama, S., Computers & Fluids 91, pp.130-143, 2014.
- (13) Gerolymos, G. A., Sénéchal, D. and Vallet, I., J. Comput. Phys. 228, pp.8481-8524, 2009.
- (14) Thomber, B., Mosedale, A., Drikakis, D., Youngs, D. and Williams, R., J. Comput. Phys. 227, pp.4873-4894, 2008.
- (15) George, K. and Kumar, V., METIS - Unstructured Graph Partitioning and Sparse Matrix Ordering System, Version 2.0, 1995.
- (16) Brachet, M. E., Fluid Dynamics Research 8, pp.1-8, 1991.

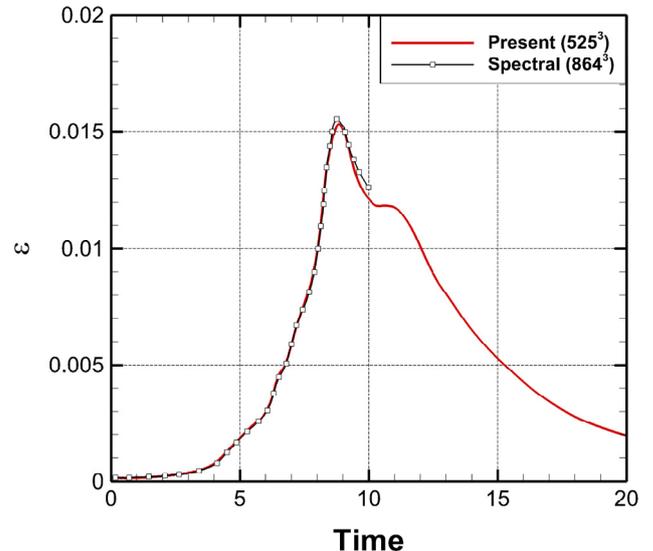


Fig. 4 Temporal evolution of the kinetic energy dissipation rate.

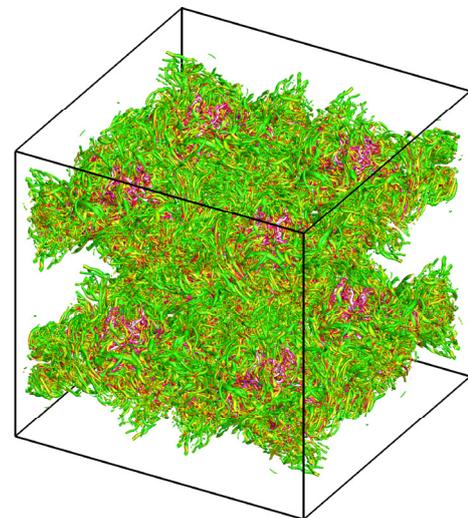


Fig. 5 Vortical structure by iso-surfaces of  $Q$ -criterion colored with vorticity magnitude at  $t = 9t_0$ .

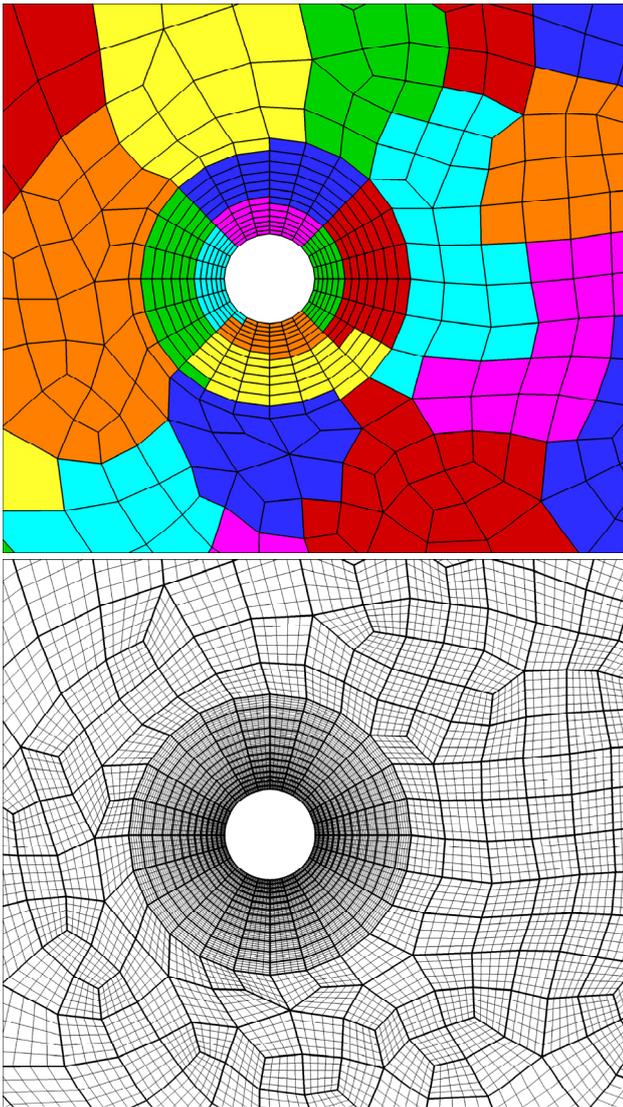


Fig. 6 An example of Gmsh formatted unstructured mesh around an infinite cylinder. (upper) Parent cells and (lower) sub-divided cells are visualised.