

有限 Taylor 級数による Navier-Stokes 方程式の数値計算法

Numerical scheme for Navier-Stokes equation using finite Taylor series

○ 今村純也, *imi* 計算工学研究室, 351-0114 和光市本町 31-9-803, E-mail: jimamura@ra2.so-net.ne.jp
Junya Imamura, *imi* Computational Engineering Laboratory, 351-0114 Wako-shi, Honcho 31-9-803

The objective of this study is to establish a method that interprets the Navier-Stokes equation as the numerical calculation model of an endless Taylor series. To obtain the material derivative of a physical value A , the value of an endless Taylor series is initially represented in four-dimensional spacetime, and the convergence state $\Delta t \rightarrow 0$ of $\Delta \mathbf{x} = \Delta t \cdot \mathbf{U}$ can be subsequently derived, where \mathbf{U} is the velocity vector. Foreseeing that the time axis is discretized in Δt pitch, we can represent the convection term as a finite Taylor series of spatial terms of the finite-element function. That is, we construct an m -step Lax-Wendroff method.

1. 目的と方法

(1) 目的

本稿の目的は, Navier-Stokes 方程式を無限 Taylor 級数の数値計算モデルと捉え, 有限 Taylor 級数で数値計算する方法を確立することに在る.

時間軸には Δt で離散化することを見越せば, 対流加速度項は要素関数の空間微分を利用し尽くして表せ, Lax-Wendroff 型表示が容易となる. そこで, 要素関数を有限 Taylor 級数で表し, そのスキームを整理して示すものである.

(2) 方法

本稿は Helmholtz 分解表示法の計算工学への適用法研究の一環である. 適切な Helmholtz 要素は C^1 連続性を要し高次となる.

有限要素法は定ひずみ要素が基本である. 2 次要素や cubic 要素の精度高さは広く知られているが, 線形要素のいろいろなメリットの方を採るのが一般である.

定ひずみ要素は三角形・四面体に限定されるが, 直交格子法の幾何学的取り扱い易さはそれらの利点を上回ると考える.

本稿は同様に, 線形補間でない特性に注目しなければブレークスルーはないとの立場に立つ. 関連技法に関しては別報⁽¹⁾を参照されたい.

物質微分は, 時空間の点 a の周りに物理量 A の分布を Taylor 展開し, 時間軸は 1 階微分を局所加速度項とし, 空間軸は曲面の接線方向勾配を対流加速度項として表す.

無限 Taylor 級数項のうち, 2 階以上の導関数項を Navier の式でモデル化したものが Navier-Stokes (N.S.) 方程式と解釈すれば, 理論的には一貫する.

物理量 A を速度として, 移流式を時間微分し, 加速度項以外の時間微分項をすべて空間微分で表せば, 時間 2 次外挿式が空間分布のみで表せる. 差分法では Lax-Wendroff 法や IDO (Interpolated Differential Operator) 法に用いられ, 部分的・選択的に用いる方法では当該項は BTD (Balancing Tensor Diffusivity) 項と呼ばれ, 広く知られた展開法である.

同様に, 加々速度も空間微分項のみで表され, さらに時間軸を累次高次化できる.

有限要素ではこの方法で高次時間軸外挿が, 要素関数(空間関数)の次数が尽きるまで高次化できる.

上述の手順は物質微分誘導に当たり, 時間軸は時間ピッチ Δt で離散化することを予め考慮し, A 曲面接線方向(1 次項)のみならず, Taylor 展開式の空間次数が尽きるまで取り込んで置くことと同義である.

よって, すべての空間微分を取り込んで陽的に外挿すれば, 有限級数ではそれ以上の外挿はない. (差分法では, 理論的には格子

が尽きる範囲まで高次化できる.)

その外挿値は, 非線形項の外挿なので高次分布する. それを元の有限級数(平均流)で表示して, 同じ手順で時間発展させたい.

そこで, 拡散項も入れた Navier-Stokes 方程式で陽的に外挿した速度分布を, 要素関数で平均化する.

圧力勾配は外挿値の運動エネルギーを与え, Bernoulli 関数の勾配残差の最小化式で求めて置く.

2. 有限要素

(1) 有限要素

有限要素は適合要素であればよいが, 本稿では直交格子を用い, 不完全 3 重 3 次要素で格子内を埋める(補間する).

要素は頂点ノードに変位と勾配パラメータを設定する不完全 3 重 3 次要素とし, 要素の各表面の図心(Centroid)にゆがみパラメータ $\{U_i^{(110)}\}_C, \{U_i^{(101)}\}_C, \{U_i^{(011)}\}_C$ (小計 6) を設定し, Fig.1 に示す合計 38 パラメータの要素とする.

圧力要素も Fig.1 と同形状とする.

Incomplete three-fold 3rd order element

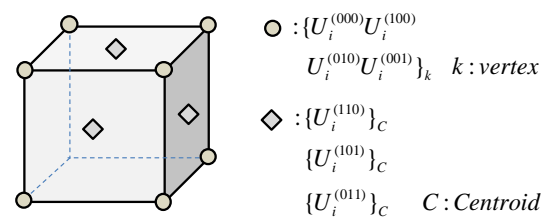


Fig.1 Finite element

直交格子ではゆがみ項が頭れる. ゆがみパラメータはゆがみ項に自由度を付加し, $\nabla \text{div} \mathbf{U} = 0$ を積極的に満たす目的で加えた. (別報⁽²⁾参照. 以下その変分は省略.)

(2) 数値計算スキーム

時空要素は $n \sim n+1$ 間で速度が線形変化(変位 \mathbf{u} は 2 次)とする. 要素パラメータ増分 $\Delta \mathbf{U}$ は $n+1$ 断面で表す. ($\mathbf{U}_t = \mathbf{U}^{n+t} \cdot \Delta \mathbf{U} / \Delta t$)

要素関数を Taylor 級数式(1)の係数項で, 式(2)に示す.

よって, 移流項の最高次数は各軸 t^3 となり, Galerkin 法変分式では t 軸 2 断面で Gauss 積分する必要がある.

$$U_i(x, y, z) = \{U_i^{(lmn)}\}_0 \frac{x^l y^m z^n}{l!m!n!} \quad (1)$$

$$\{U_i^{(lmn)}\}_0 = \left\{ \begin{array}{ll} U_i^{(000)}U_i^{(100)}U_i^{(200)}U_i^{(300)} & U_i^{(001)}U_i^{(101)}U_i^{(201)}U_i^{(301)} \\ U_i^{(010)}U_i^{(110)}U_i^{(210)}U_i^{(310)} & U_i^{(011)}U_i^{(111)}U_i^{(211)}U_i^{(311)} \\ U_i^{(020)}U_i^{(120)}U_i^{(220)} & U_i^{(021)}U_i^{(121)}U_i^{(221)} \\ U_i^{(030)}U_i^{(130)} & U_i^{(022)}U_i^{(122)} \\ \\ U_i^{(002)}U_i^{(102)}U_i^{(202)} & U_i^{(013)}U_i^{(113)} \\ U_i^{(012)}U_i^{(112)}U_i^{(212)} & U_i^{(013)}U_i^{(113)}\}_0 \quad (2) \\ U_i^{(022)}U_i^{(122)} \end{array} \right.$$

速度を U で表すとし、密度を ρ 、圧力を P 、粘性係数を μ とし、Navier-Stokes (N.S.) 方程式を式(3)に、連続の式を式(4)に、Bernoulli 関数を式(5)に示す。

$$\rho \frac{DU}{Dt} + \nabla P - \mu(\nabla^2 U + \frac{1}{3}\nabla \text{div}U) = 0 \quad (3)$$

$$\text{div}U = 0 \quad (4)$$

$$\rho \frac{1}{2}U^2 + P = \text{const} \quad (5)$$

要素重心(COG: Center of the Gravity)を局所原点とし、式(1)で Taylor 展開して a 点での式(2)の導関数ベクトル $\{U_i^{(lmn)}\}_a$ を計算し、次いで a 点で Taylor 展開して、 $\Delta x = t \cdot \Delta U_a$ 上流点の速度 U^{ex} を計算し、平均流 U との差 $(U - U^{ex})$ の分散を最小化(最小 2 乗)することで U 分布を得る。

その計算に際し圧力勾配を、式(5)の勾配式に U^{ex} を代入して、最小 2 乗法で求めて置く必要がある。

Bernoulli の定理は ①理想流体・②定常流・③非圧縮・④渦なし流れを前提とする。式(5)の勾配式を、N.S.方程式内での役割で考えれば、局所加速度項=0、応力項=0、対流項の回転成分=0、と置くことに等しい。

よって、残る $1/2\nabla(U^{ex})^2 + \nabla P = 0$ を満たせばよく、式(5)の N.S.式内での役割が説明できる。

時空要素内で U^{ex} は局所加速度に関わりなく、Taylor 級数から導かれるので、②は満たしている。そこで、圧力も時空要素内で一定(時間軸不連続)とする。

連続の式(4)は、その残差(体積率偏差)の平均を法線ひずみの増分に均等に配分して offset(相殺)させることで満たす。

加速度項からも体積率偏差を offset するためには、作業要素 ϕ^W を使い、局所加速度から渦なし成分を $\nabla\phi^W$ に掬い上げて置き、 $I \cdot \phi^W$ の平均値を加速度増分に配分して、同様に offset する。

以上を収束するまで反復計算する。そのスキームを式(6)に示す。(ϕ^W の適用には、時空要素内加速度一定であることを反映。)

$$\left. \begin{array}{l} \int_{\Omega} \{ \nabla P + \frac{\rho}{2} \nabla(U_i^{ex})^2 \} \cdot \delta \nabla P = 0 \quad (P^{(11)} \Rightarrow 0) \\ \int_{\Omega} \{ \nabla \phi^W - U^{m-1} \} \cdot \delta \nabla \phi = 0 \quad (\phi^{W(11)} \Rightarrow 0) \\ \int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{\rho}{\Delta t} (U^m + \Delta U + \frac{1}{3} I \cdot \nabla \phi^W) + \rho (U^{ex} \cdot \nabla U^{ex}) + \nabla P \right] \cdot \delta U \right. \\ \left. + \mu \cdot \{ 2\nabla \Delta U + (\nabla U + \frac{1}{3} \text{div}U)^{m-1} \} \cdot \delta \nabla U \right\} d\Omega = 0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

$$\text{where } U^m = U^{m-1} + \Delta U, \quad (m = (0), 1, 2, 3, \dots)$$

上流化法は[Appendix-1]による。

流入・流出の境界には C^1 連続なベクトルポテンシャル要素(境

界要素)を加えて、流入側では流入量を外力 (U_n または P) として与え、流出側では無反射条件を設定する。(別報⁽¹⁾ 参照。)

(3) 渦粘性係数の導入

非圧縮の散逸率 Φ_D は、連続の式を代数的に満たす仮定では、式(7)で計算される。

$$\Phi_D = \mu \{ 2(\nabla_{diag} U)^2 + (\nabla_{shr} U)^2 \} \quad (7)$$

式(7)に U^{ex} を代入して計算した精密な散逸率 Φ_D^{ex} と、平均流 U で計算した散逸率 Φ_D には差が出る。

そこで渦粘性係数の考え方で要素ごとに μ_T を導入して、要素ごとに散逸量を式(8)で一致させる。(Φ_D, Φ_D^{ex} はあらためて散逸量と定義する。)

$$\frac{\mu + \mu_T}{\mu} \Phi_D = \Phi_D^{ex} \quad (\because \mu_T = \mu \frac{\Phi_D^{ex} - \Phi_D}{\Phi_D}) \quad (8)$$

∇U^{ex} が平均 ∇U の上下に $\pm \nabla u$ で分布し、かつ対称なら ∇U^2 より ∇u^2 だけ大きく、渦粘性係数は正となる。

(4) 渦粘性係数計算法の考察

まず U^{ex} は U に比べ、高次空間変動 ($\Delta x, \Delta x^2, \Delta x^3, \dots$) を有し、それは時間変動 ($\Delta t U, \Delta t^2 U^2, \Delta t^3 U^3, \dots$) でもある。したがってエルゴード性により、要素断面で時間平均しても同じ値を得る。

すなわち、要素長さを l とすれば $lU/\Delta t U = l/\Delta t U = m$ ステップ分の Φ_D^{ex}, Φ_D を累積して、要素幅を乗じれば式(8)と同じ計算となる。

U^{ex} は時空間の点 (t, a) の、 Δt 時間後の速度である。つまり、現在 U の速度が U^{ex} の空間高次の速度となり、 $2\Delta t$ 時間後には U^{ex} の速度が $(U^{ex})^{ex}$ となり、非線形式特有のカスケードを Taylor 展開からも理解することができる。

有限要素では $U^{ex}, (U^{ex})^{ex}, ((U^{ex})^{ex})^{ex}, \dots$ の計算には、 U^{ex} on Δt を計算するサブルーチンが recursive に利用できる。つまり、有限級数の多重積となる。

ただ、 $(U^{ex})^{ex}$ などを過度に継続して累次数値計算することは、要素境界を大幅にはみ出すので、有効でなくなる。(源の要素関数たる U 分布は要素内でのみ有効。)

系の境界の要素では系外を積分して μ_T を求めることとなり意義がより薄くなる。

そこで、格子スケールの速度から格子内の変動を推測する LES の概念で考えてみる。

Fig.1 の要素では 3 次外挿まで(不完全には 5 次まで)可能であった。そこで、1 次、2 次の外挿も並行して行い、成長曲線で μ_T を回帰計算することが考えられる。

さらに最尤推定法を活用することが考えられる。 Δt を m 分割し、 $\langle \Delta t/m \rangle$ ピッチで $U^{ex}, (U^{ex})^{ex}, \dots$ を Δt まで順次外挿計算して、 $\langle \Delta t/m \rangle$ を独立変数とし、 $U^{ex}, (U^{ex})^{ex}, ((U^{ex})^{ex})^{ex}, \dots$ on Δt から計算されるそれぞれの μ_T を従属変数として成長曲線を当てはめ、飽和水準(saturation level)の μ_T を採用する方法である。

この方法では要素境界からはみ出しは僅かであり、補正可能である。([Appendix-1] 参照。)

$m=1,2,3$ の 3 通り計算すれば修正指数曲線、ロジスティック曲線などにより 3 点推定法で簡易計算できる。

点 (a) は要素重心点で代表するか、複数点で計算するかなど検討課題は残る。さらにはロジット(Logit)モデルで、 m も点 (a) も一般化して最尤推定することが考えられ、今後の研究課題である。

いずれの方法を採用にしても成長曲線でなければ意義はない。

その判定機構組み込みは必要である。

例えばロジスティック曲線式(9)の係数は制約条件を付帯する。

$$y_t = \frac{\gamma}{1 + a \cdot \exp(-\beta \cdot t)}, \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0) \quad (9)$$

差分法では、時間軸 C' 連続な運動エネルギー保存法は、時間軸中央差分法⁹⁾を適用して可能である。

空間高次の導関数は、格子を拡げて移動最小 2 乗法(不等距離差分法⁴⁾)で計算できるので、空間 1 次, 2 次, 3 次, ... の成長率曲線推計は同様に可能である。

Lax-Wendroff 法は Taylor 展開に基づく差分法として知られ, 2 段階 Lax-Wendroff 法でも説明される。上述は m 段階 Lax-Wendroff 法で一般化して説明できる。

ただ LES 同様、境界近傍での計算には工夫が必要となる。

(5) レイノルズ応力の数値計算

レイノルズ応力は、連続の式が代数的に満たされる仮定で、保存形を基に誘導されている。上述までの Taylor 展開形は非保存形が基礎となっている。

有限 Taylor 級数での U^{ex} , $(U^{ex})^{ex}$, ... の計算が recursive に数値計算可能となる特長は非保存形の適用による。

乱流エネルギーのパワースペクトルはエネルギー保存領域・慣性小領域・散逸領域に分類される。 U^{ex} , $(U^{ex})^{ex}$, ... 計算は、そのうちの慣性領域までをカバーすることを狙いとする。(散逸領域はさらに乱流理論の導入を要し、本稿の対象から外れる。)

既報⁹⁾で、レイノルズ輸送方程式を Lax-Wendroff 型の累次空間微分で表す方法を検討した。その方法では SGS (Sub Grid Scale) 成分の 3 重積, 4 重積, ... のクロス項を逐次展開し、保存する必要があり、それらの項は幾何級数的に増加するので、数値計算には現実的ではない。(4 重クロス項の計算には 100 近い連立方程式を解く必要がある。⁹⁾)

そこで非保存形で、本稿での SGS ベクトル: $u=(U^{ex}-U)$, ... の成分の累次積で表すことを考える。すなわち U^{ex} , $(U^{ex})^{ex}$, ... の array の長さは、いずれも U の係数ベクトルの成分数(array の長さ)と同じなので、累次積もシステムティックに数値計算できることに拠る。

(6) 時間軸積分

先に t^3 要素なので t 軸 2 断面で数値積分する必要があると述べた。 μ を回帰式で求めるなら、それ相当の時空要素内積分点数が必要である。

また、対流項のエルゴード性について触れ、空間の点(a)で時間積分すればよいとした。ただ、点(a)は時間軸上を移動するので、特定時刻の空間の 1 点に固定する必要がある。その点で時間積分する。したがって要素境界では空間移動を反映させる必要があり、そのための上流化法も示した。

点(a)は、陽解法では時間ステップ n 点に、陰解法は $n+1$ 点、クラクニコルソン法は $n+1/2$ 点に固定する。

本稿でも $n+1/2$ 点とする。したがって、時空要素を点($\Delta t/2, a$)で積分するには、上流化と下流化が必要である。すなわち、提案の上流化・下流化法では t 軸 2 断面の数値積分点で、要素内のみならず、要素表面 1 周積分もそれぞれで要す。

Fig.2 に既往の計算法と本稿の方法の概念を示す。

既往の方法の曲線は実速度で未知である。提案の方法の曲線は高次 Taylor 級数の U^{ex} である。

クラクニコルソン法が $n+1/2$ 点の接線平行線上に推計するのに対し、提案の方法は U^{ex} との最小 2 乗式で推計する。

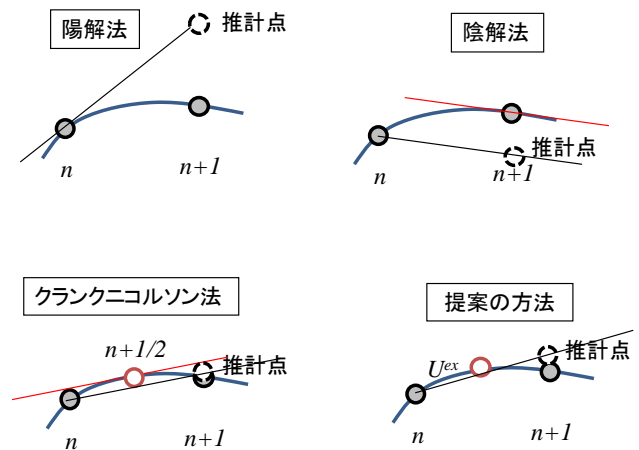


Fig.2 velocity estimation: previous and proposed method

かつ、中点($\Delta t/2, a$)の Taylor 級数の係数ベクトルは U^{ex} から求める係数ベクトル(ベクトル導関数)とする。 $U_{n+1/2}$ のベクトル導関数では反復計算を要すからである。

よって提案の方法の曲線は、正確には、 $(U^{ex}_{n+1/2})^{ex}$ であり、平均速度 U はそれらとの最小 2 乗で決定する。

空間方向には、いずれの方法も最小 2 乗法(Galerkin 法)である。

3. 2 段階 Taylor 展開 ψ 要素法

(1) ψ - U 双対格子ハイブリッド法

別報²⁾で、直交格子法に 2 次要素を適用して連続の式を満たし、1 次と 3 次の双対格子で境界形状を表す技法を提案している。以下では後者に適用した双対格子法を“2 段階 Taylor 展開法”と呼ぶものとする。

ψ 要素は $curl \psi$ 成分が連続式を代数的に満たし、 $\nabla \phi$ は回転ゼロを代数的に満たす点が魅力的である。

ただ、 $\nabla \nabla \phi$ は 6 成分より成り、 $\nabla \nabla \psi$ は 18 成分より成るので、それら自由度数に見合った条件式を満たす必要がある。その上で $curl \psi$ および $\nabla \phi$ の特性を利用する。

ここでは 2 次 ϕ 要素と ψ_i 要素でそれらを数値的に満たし、6 次の 2 段階 Taylor 展開法による ψ の高次導関数で、 U^{ex} を計算して行く技法を検討する。

先ず 2 次 ϕ 要素は Fig.3 とする。(ψ_i も同形状。)

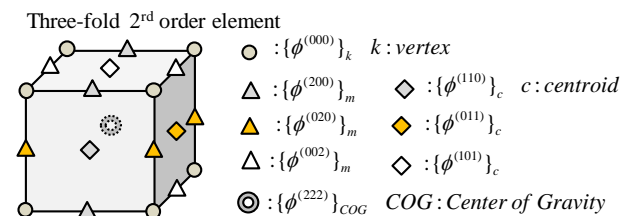


Fig.3 potential element shape for ϕ and ψ_i

$U(u, v, w)$ の要素形状は、先ず $\nabla \psi_i$ の項の次数と完全に一致する要素をそれぞれ用意する。すなわち、それぞれ 3 要素となる。

(u, v, w) 要素それぞれについて同一形状の 3 要素となるので、 u 要素の例を Fig.4 に示す。

Fig.3 の形状に比べ、Fig.4 要素は 1 軸方向のみ線形変化としている。左から順に x 方向線形, y 方向線形, z 方向線形としている。

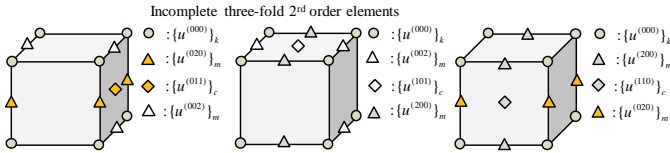


Fig.4 incomplete U_i elements (v.v. u -element)

N.S.方程式の速度には、これら3要素の平均 $U_i=1/3$ (3要素の和)を代入して表すが、更に Fig.3 の ψ 要素を加えた平均で表す。すなわち式(10)で表した U_i を代入する。(右肩添え字は Fig.4 に対応。)

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{u}^x + \mathbf{u}^y + \mathbf{u}^z}{6} + \frac{1}{2}(\nabla_{diag} + \nabla_{curl})\boldsymbol{\psi} \quad (10)$$

Fig.4 要素の同一位置のノードパラメータは等値し、N.S.方程式はそれらパラメータの Galerkin 法変分式で表す。

$\boldsymbol{\psi}$ 要素は Fig.5 のように \mathbf{U} 要素と双対配置し、式(11)の変分式を N.S.方程式と連立させて、 $\boldsymbol{\psi}$ のパラメータに制約を与える。双対格子の U_i^j を mG (main Grid)と呼び、 ψ_i^j を sG (sub-Grid)と呼んで区別する。(式(11)は微分形表示。)

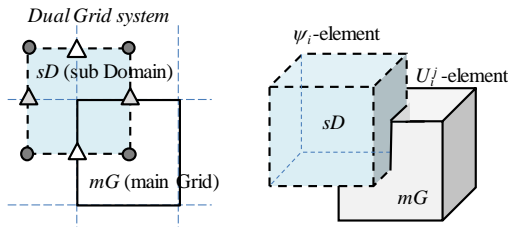


Fig.5 dual Grid system

$$\left. \begin{aligned} &(\frac{\partial \psi_i}{\partial x^i} - U_i) \cdot \frac{\partial}{\partial \{\psi_i^{(000)}\}_k} \frac{\partial \psi_i}{\partial x^i} \cdot d\Omega = 0 \\ &(\psi_1^{(200)} - u^{x,(100)}) \cdot \frac{\partial \psi_1^{(200)}}{\partial \{\psi_1^{(200)}\}_k} \cdot d\Omega = 0 \\ &(\psi_3^{(020)} - \psi_2^{(011)} - u^{y,(010)}) \cdot (\frac{\partial \psi_3^{(020)}}{\partial \{\psi_3^{(020)}\}_m} - \frac{\partial \psi_2^{(011)}}{\partial \{\psi_2^{(011)}\}_c}) \cdot d\Omega = 0 \\ &(\psi_3^{(011)} - \psi_2^{(002)} - u^z) \cdot (\frac{\partial \psi_3^{(011)}}{\partial \{\psi_3^{(011)}\}_c} - \frac{\partial \psi_2^{(002)}}{\partial \{\psi_2^{(002)}\}_m}) \cdot d\Omega = 0 \\ &\dots \text{similar to above for } v^j \text{ and } w^j \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

\mathbf{U} 要素で系(境界形状)を表し、境界条件を与える。(正確な境界要素は別報⁽¹⁾による。)

$\boldsymbol{\psi}$ 要素の系外ノードのパラメータ $\{\psi_i^{(000)}\}_k$ は対称条件(法線方向曲率=0)で消去する。

移流項には更に、 $\boldsymbol{\psi}$ 要素の局所原点(mG の頂点ノード点)の導関数パラメータを頂点ノードパラメータとする mG 内3重5重の要素関数で $\mathbf{U}\boldsymbol{\psi}$ を表して、 \mathbf{U}^{ex} を計算して行くものとする。

式(5)の運動エネルギーに代入する速度は散逸の影響を受けて減衰した Lateral 値でなくてはならない。

$\nabla^2 \mathbf{U}$ は $\nabla \text{div } \mathbf{U}$ を作用させてせん断形にも回転形にも変形できるが、数値計算ではそれらは等価ではない。 $\nabla^2 \boldsymbol{\psi}$ も同様である。

そこで、Fig.3 の ϕ 要素を $\nabla_{shr} \boldsymbol{\psi}$ から計算して $\nabla \phi$ を代入して圧力 P を求める。よって、圧力損失が計算される。

3. まとめと今後の課題

- 物質微分は連続体として Taylor 展開離散形表示の Δt の極値 $\rightarrow 0$ を採り、接平面方向で表す。
- 数値計算では時間軸 Δt の離散計算をすることを見越せば、 Δt の高次項、すなわち $(\Delta t \cdot \mathbf{U}) \cdot \nabla \mathbf{U}$ の高次項が復活する。
- そこで、要素関数の次数を利用し尽くして $(\Delta t \cdot \mathbf{U}) \cdot \nabla \mathbf{U}$ を表示し、物質微分項を \mathbf{U}^{ex} で表示した。
- ただ、空間高次となるので要素関数の次数に平均化する。
- 平均化しなければ (\mathbf{U}^{ex}) のベクトル導関数を求め、 $(\mathbf{U}^{ex})^\alpha$ として数値的に継続し得る。
- それを $(\Delta t/m \cdot \mathbf{U}) \cdot \nabla \mathbf{U}$ で Δt まで継続するとした。
- 要素関数が高次であるほど、移流項の高次項が捉え得る。
- そこで、2段階 Taylor 展開法での高次化法を示した。
- 平均流 \mathbf{U} に \mathbf{U}^{ex} の散逸量を反映させる方法も示した。
- 提案は慣性領域までをカバーするものであり、今後の課題として散逸領域をカバーするスキームの組み込みが残る。

[Appendix-1] 上流化技法

有限要素形状は基底関数の適用領域を規定する手段であり、厳密に守らなければならない。Navier-Stokes 方程式の空間微分項を用いて時間軸にテーラー展開すれば、移流項は空間的に $\Delta t \cdot U_n$ 上流点を表す。

それを要素内で積分すれば、風上にある要素内を積分したことになり、適用領域をはみ出すので、はみ出し面積分を補正する。

よって、移流項の積分は式(a)で表される。すなわち、上流側でははみ出し分を差し引き、下流側では不足分を加える。これは式(19)第2項の要素一周積分を加えることで自動的に達せられる。

$$\int_{\Omega} U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} d\Omega \Rightarrow \int_{\Omega} U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} d\Omega + \int_S (-\Delta t U_n) U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} ds, \quad (a)$$

where U_n : perpendicular velocity

式(a)第2項を x, y 座標で Fig.a に示す。

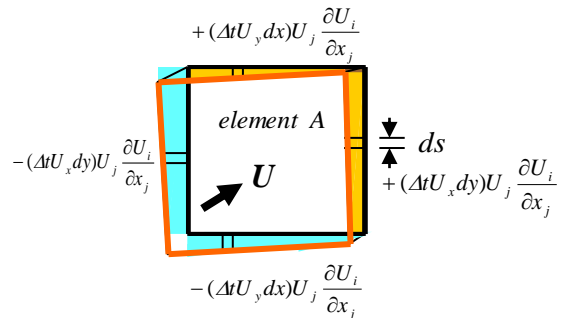


Fig.a Up-winding terms

参考文献

- (1) 今村, "ベクトルポテンシャルによる非圧縮流れ場の数値解法," 第32回数値流体力学講演論文集, (2018).
- (2) 今村, "直交格子法の課題; 連続の式を満たす技法あれこれ, ほかに," 第32回数値流体力学講演論文集, (2018).
- (3) 今村: 時間軸中央差分法による流れ場の数値計算, 計算工学講演会論文集, Vol.21, 2016.
- (4) 杉原, 今村, "不等距離差分法による応力解析(その4)," 日本建築学会論文報告集, 第178号, (1970).
- (5) 今村, 棚橋 "パラメータを直接計算するレイノルズ輸送方程式の数値計算法," 計算工学会論文集, Paper No.20030012, (2003).