ベクトルポテンシャルによる非圧縮流れ場の数値解法

Numerical scheme for incompressible flow fields using the vector potential

○ 今村純也, *imi* 計算工学研究室, 351-0114 和光市本町 31-9-803, E-mail: jimamura@ra2.so-net.ne.jp
Junya Imamura, *imi* Computational Engineering Laboratory, 351-0114 Wako-shi, Honcho 31-9-803

This paper establishes a numerical scheme for incompressible flow fields using the vector potential ψ. Based on Helmholtz theorem, an arbitrary vector fields V can be expressed as a function of a scalar potential ϕ and ψ under a Coulomb gauge, i.e. $V=\nabla\phi+curl\,\psi$ ($div\psi=0$). In a previous study, I proposed an improved Helmholtz decomposition form that easily applied to perform numerical calculations, i.e. $u=(\nabla\phi+\nabla_{diag}\psi)+curl\,\psi$ ($\nabla^2\phi\neq 0,\ div\psi=0$), where u is the displacement vector and $\nabla_{diag}\psi$ denotes the diagonal terms of $\nabla\psi$, i.e., $(\nabla\phi+\nabla_{diag}\psi)=(\nabla\phi^C+\nabla\phi^I)$, where ϕ^C denotes compressible and ϕ^I denotes incompressible. Further, the compatible elements ψ_i must be C^1-continuous. The elements in this study are incompatible; however, to satisfy the boundary conditions, more specifically, the non-reflective outlet conditions, C^1-continuity is imposed on the boundary elements.

1．序 言

Helmholtz 分解を修正した“修正 Helmholtz 分解(*iH-d*)”表示法を提案している．

iH-d 表示法は，非圧縮流れ場はベクトルポテンシャルのみで表すので非分離表示となり，変位要素法(原始変数法)の延長上に在るが，無反射境界条件を取り込める，などの特徴を有す．

本稿では，その有限要素と数値計算法を示す．

既報[1]で，Helmholtz 分解のソレノイダル成分のみを，速度要素で数値計算する方法を“修正 HSMAC 法”と呼んで提案した．Ghia らの 2D キャビティ解を速度要素で再現する方法を示すためであった．

Ghia らは古典的なψ-ω法に依っており，渦なし流れの$\nabla\phi$を含まない不完全な解である．$\nabla\phi$は圧力勾配∇Pと空間的に同じ特性を有し，Navier-Stokes 方程式では(単位は異なるが)同じ働きをする．

ソレノイダル成分のみを解析するψ-ω法や，その粒子法である渦法は圧力に無関係に計算する．したがって，不完全な解しか得られない．

例を渦法のヘリコプター解析で考えれば，室内の模型ヘリコプターを計算していることに相当する．壁にぶつかりそうになれば，室ごと移動する．室外での解析では$\nabla\phi$, ∇Pは不可欠である．

更には，ソレノイダル成分のみではせん断は表せないが，渦度のみ対象とする欠点も挙げられる．

別報[2]では，原始変数法でそれらに対応しさらには，対流項を数値計算に適するよう高次 Taylor 展開する方法を提案している．

本稿でも，高次 Taylor 展開法はそのまま適用する．原始変数法(別報)では，連続の式を満たすために作業要素$\nabla\phi^W$を適用し，無反射境界条件設定のため本稿の境界要素を適用している，など別報とは相互に関連し合っている．

2．方 法

(1) *iH-d* 表示法

Helmholtz-Hodge の直交条件が成り立つ非圧縮では，渦なし成分は *iH-d* ではスカラーポテンシャル$\nabla\phi$に代え，ベクトルポテンシャルの勾配$\nabla\psi$の対角項で表す．

$\nabla\psi$の和分解形の内訳を新しい演算子で表すこととし，対角項を$2\nabla_{diag}\psi$で，$curl\psi$は$\nabla_{curl}\psi$でも表し，残るせん断形を$\nabla_{shr}\psi$で表すとする．

∇^2_{diag}などは$\equiv\nabla_{diag}(\nabla_{diag})$としてベクトルを表すとする．したがって，$\nabla^2\phi=0$の条件下では$div\nabla\phi=div\nabla_{diag}\psi=0$であり，Coulomb ゲージ$div\psi=0$に対応する$\{1,1,1\}\cdot\nabla\phi=0$を，$div\phi=0$でも表すとする．すなわち$div$をスカラー一般にも適用し，$div\,div\phi$も可とする．

上述演算子を用い，変位ベクトル場uの *iH-d* 表示式を式(1)とする．

$$u=\nabla\phi+(\nabla_{diag}+\nabla_{curl})\psi$$
$$(\nabla^2\phi\neq 0,\ div\psi\Rightarrow 0,\ \nabla^2\psi\Rightarrow 0,\ \psi^{(11)}\Rightarrow 0)\qquad(1)$$

$\Rightarrow 0$は数値的に最小化(最小 2 乗)することを表す．

$\psi^{(11)}\Rightarrow 0$はすべてのゆがみ項を最小化することを表す．2D では$\psi^{(11)}\Rightarrow 0$であり，3D では$\psi_i^{(110)}\Rightarrow 0$, $\psi_i^{(101)}\Rightarrow 0$, $\psi_i^{(011)}\Rightarrow 0$である．更に，必要に応じて$\psi_i^{(111)}\Rightarrow 0$とする．

いずれの変数fについても($f^{(11)}\Rightarrow 0$)は必須とし，以下ではその表示を付すことを省略する．

なお，圧縮性の流れでは，$\nabla\phi$に下駄を履かせた形の($\nabla\phi+\nabla_{diag}\psi$)で$\nabla\phi$の計算を進めることとなる．

(2) ベクトルポテンシャル要素

要素関数を不完全 3 重 3 次とし，パラメータは頂点ノードkに$\{\psi_i^{(000)},\psi_i^{(100)},\psi_i^{(010)},\psi_i^{(001)}\}_k$の 4 パラメータ，要素 6 表面の図心(Centroid)それぞれに$\{\psi_i^{(110)}\}_C$, $\{\psi_i^{(101)}\}_C$, $\{\psi_i^{(011)}\}_C$の小計 6 パラメータ，要素合計で 38 自由度とする．(Fig.1)

Incomplete three-fold 3rd order element

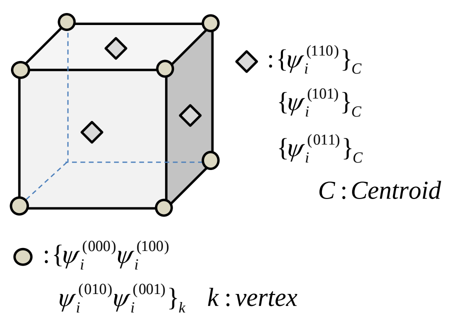


Fig.1 ψ_i element

関数は式(2)の有限 Taylor 級数表示とし，用いる項を係数項で示せば式(3)となる．

$$\psi_i(x,y,z)=\{\psi_i^{(lmn)}\}_0\frac{x^l y^m z^n}{l!m!n!}\qquad(2)$$

$$
\begin{array}{ll}
\{\psi_i^{(lmn)}\}_0 = \{\psi_i^{(000)}\psi_i^{(100)}\psi_i^{(200)}\psi_i^{(300)} & \psi_i^{(001)}\psi_i^{(101)}\psi_i^{(201)}\psi_i^{(301)} \\
\quad \psi_i^{(010)}\psi_i^{(110)}\psi_i^{(210)}\psi_i^{(310)} & \psi_i^{(011)}\psi_i^{(111)}\psi_i^{(211)}\psi_i^{(311)} \\
\quad \psi_i^{(020)}\psi_i^{(120)}\psi_i^{(220)} & \psi_i^{(021)}\psi_i^{(121)}\psi_i^{(221)} \\
\quad \psi_i^{(030)}\psi_i^{(130)} & \psi_i^{(021)}\psi_i^{(121)} \\
 & \\
\quad \psi_i^{(002)}\psi_i^{(102)}\psi_i^{(202)} & \psi_i^{(013)}\psi_i^{(113)} \\
\quad \psi_i^{(012)}\psi_i^{(112)}\psi_i^{(212)} & \psi_i^{(013)}\psi_i^{(113)}\}_0 \\
\quad \psi_i^{(022)}\psi_i^{(122)} &
\end{array}
\tag{3}
$$

圧力も同じ要素形状とする．

Fig.1 は非適合要素であり，適合要素は頂点ノード 8 パラメータの完全 3 重 3 次 C^1 連続要素で，境界に接する要素に適用する．

その適用法は後述の境界条件の項で示す．

(3) 基礎方程式

速度を $\boldsymbol{U}$ で表すとし, 密度をρ, 圧力をP, 粘性係数をμとして，Navier-Stokes（N.S.）方程式を式(4)に，連続の式を(5)に，Bernoulli 関数を式(6)に示す．

$$
\rho\frac{D\boldsymbol{U}}{Dt}+\nabla P-\mu(\nabla^2\boldsymbol{U}+\frac{1}{3}\nabla div\boldsymbol{U})=0 \tag{4}
$$

$$
div\boldsymbol{U}=0 \tag{5}
$$

$$
\rho\frac{1}{2}\boldsymbol{U}^2+P=const \tag{6}
$$

(4) 数値計算スキーム

N.S.方程式解法は，空間軸は Galerkin 法変分式に拠り，時間軸は運動エネルギーを連続させるため，速度を線形変化（変位が時間軸に C^1 連続な 2 次変化）とする時空要素を適用する．

対流加速度を要素の可能な限りの空間微分で高次 Taylor 展開して表す. 展開式の（$\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{x}^2, \Delta\boldsymbol{x}^3,\cdots$）は ＝（$\Delta t\boldsymbol{U}, \Delta t^2\boldsymbol{U}^2, \Delta t^3\boldsymbol{U}^3,\cdots$）でもあり，外挿式の積分は空間積分でもあり時間積分でもある．

その数値計算上の取り扱いは別報(2)により，本稿でも別報に準ずる．

原始変数法との違いは，局所加速度項の体積率偏差を offset するのに，本稿では作業要素ϕ^Wを介さず，Coulomb ゲージ残差 $div\boldsymbol{\psi}$ を増分$\nabla_{diag}\Delta\boldsymbol{\psi}$ に均等に配分して offset する方法を採る点に在る．

ベクトル変数で表されるスカラー式の残差を，ベクトルの増分に均等に配分し，反復計算することで満たすものである．

配分するスカラー式残差 R は反復 m=(0),1,2,3,⋯ の(m-1)回目の値 R^{m-1} とする．(2D では天秤の分銅の配分でイメージ出来よう．)

連続の式も同様にして，体積率偏差（$div\boldsymbol{U}=0$ の残差）を法線ひずみ増分$\nabla_{diag}\Delta U_i$ に均等に配分して満たすものとする．

圧力勾配は Bernoulli 関数の勾配の最小化式を，上述反復計算に組み込んで，交互に解くことで求める．

そのスキームを式(7)に示す．式(7)は Centroid ノードのパラメータによる変分行をその他変分行から分けて表している．

(5) 境界条件および境界要素

系の境界に接する要素（境界を含む要素）を境界要素と呼ぶものとする．（ゼロ以外の境界ノードパラメータを含む要素のみ必要．）

境界条件は，Helmholtz 分解した変位の$\nabla_{curl}\boldsymbol{\psi}$成分（および$\nabla_{shr}\boldsymbol{\psi}$成分）は Dirichlet 条件のみの反射条件となる．

原始変数法ではこの条件をNeumann境界で設定するため流出境界では，境界法線方向および境界接線方向いずれも速度勾配を=0 としている．

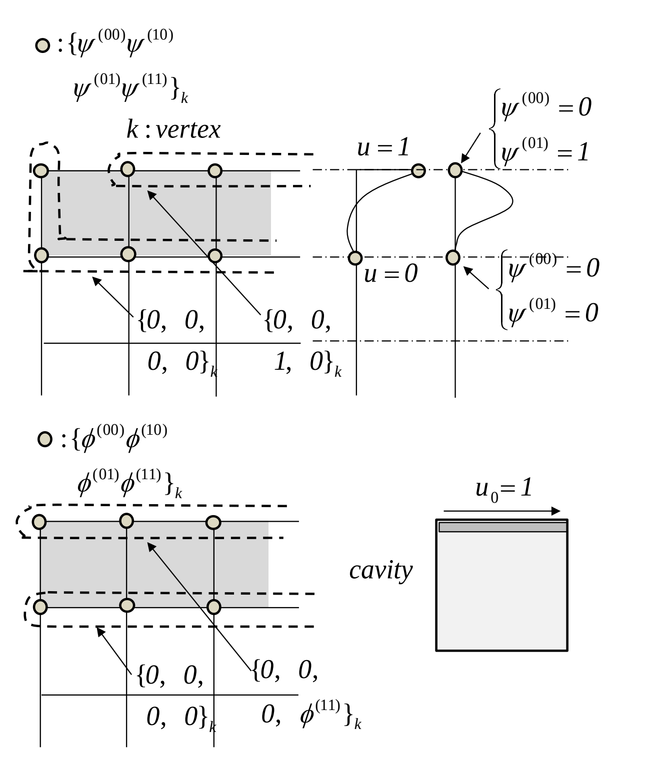
ただ，バックステップ流れや風洞の outlet などでは，流出境界と

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int_\Omega [\{\nabla P+\rho(\nabla\frac{k^2}{2})^{m-1}\}\cdot\delta\nabla P]d\Omega=0 \\
&\int_\Omega [\rho\{\frac{\boldsymbol{u}^m}{\Delta t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u})^{m-1}\}\cdot\delta\boldsymbol{u}+\frac{\rho}{\Delta t}(\nabla\Delta\boldsymbol{\psi}\cdot\delta\nabla\boldsymbol{\psi} \\
&\quad +\{\boldsymbol{1}\}\frac{1}{3}div\boldsymbol{\psi}^{m-1}\cdot\delta\nabla_{diag}\boldsymbol{\psi})+\nabla P\cdot\delta\nabla_{diag}\boldsymbol{\psi} \\
&\quad +\mu\cdot\{(2\nabla^2\Delta\boldsymbol{\psi}+\nabla^2\boldsymbol{\psi})\cdot\delta\nabla^2\boldsymbol{\psi} \\
&\quad +(\nabla div\boldsymbol{u}^T)^{m-1}\cdot\delta\nabla^2_{diag}\boldsymbol{\psi}\}\cdot\delta\nabla\boldsymbol{u}]d\Omega=0 \\
&\int_\Omega [(\psi_1^{(200)}+\psi_2^{(110)}+\psi_3^{(101)})\cdot\delta(\frac{\partial\psi_2^{(110)}}{\partial\{\psi_2^{(110)}\}_C}+\frac{\partial\psi_3^{(101)}}{\partial\{\psi_3^{(101)}\}_C}) \\
&\quad +(\psi_1^{(110)}+\psi_2^{(020)}+\psi_3^{(011)})\cdot\delta(\frac{\partial\psi_1^{(110)}}{\partial\{\psi_1^{(110)}\}_C}+\frac{\partial\psi_3^{(011)}}{\partial\{\psi_3^{(011)}\}_C}) \\
&\quad +(\psi_1^{(101)}+\psi_2^{(011)}+\psi_3^{(002)})\cdot\delta(\frac{\partial\psi_1^{(101)}}{\partial\{\psi_1^{(101)}\}_C}+\frac{\partial\psi_2^{(011)}}{\partial\{\psi_2^{(011)}\}_C}) \\
&\quad]d\Omega=0
\end{aligned}
\right\}, \tag{7}
$$

$$
where \quad \begin{cases} \boldsymbol{u}^L \equiv \nabla_{diag}\boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{u}^T \equiv \nabla_{curl}\boldsymbol{\psi} \end{cases},
$$

$$
\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^L+\boldsymbol{u}^T, \quad \boldsymbol{u}^m=\boldsymbol{u}^{m-1}+\Delta\boldsymbol{u}, \quad k^2=u_i^L\cdot u_i^L
$$

Fig.2 Boundary element for driven cavity



壁との交点(隅点)では，流出速度がゼロとなるので，接線方向勾配=*0* を保つことはできず条件は乱れる．

無反射とするには Sommerfelt の放射条件 *D/Dt=0*(自由界面の条件)を満たす必要がある．それには C^1 連続なポテンシャル要素で対応する必要がある．

反対に，例えば 2D 強制キャビティの移動壁端点では，外部からの流入を遮断する必要がある．原始変数法では困難であるが，C^1 連続なψ 要素では可能となる．

そこで，境界要素は C^1 連続な$\boldsymbol{\psi}$ 要素とし，Fig.1 の要素は境界上ノードパラメータをすべて=***0*** として，両者の和要素(オーバーラップの系)で計算する．

2D キャビティの境界条件設定法を Fig.2 に示す．流れ関数ψは 3D ではψ_3であり，*z* 方向に Fig.2 の形で 3 次分布となる．

$\nabla\phi$は対応する$\nabla_{diag}\boldsymbol{\psi}$境界要素のノードパラメータと等値する．

流入境界では回転成分は Dirichlet 境界で固定し，Dilatational 成分のみϕの境界要素で与える．$\nabla\phi$は対応する$\boldsymbol{\psi}$の境界要素成分と等値する．Fig.3 の例では式(8)となる．

$$\{\phi^{(10)}\}_k = \{\psi_1^{(10)}\}_k = 1 \tag{8}$$

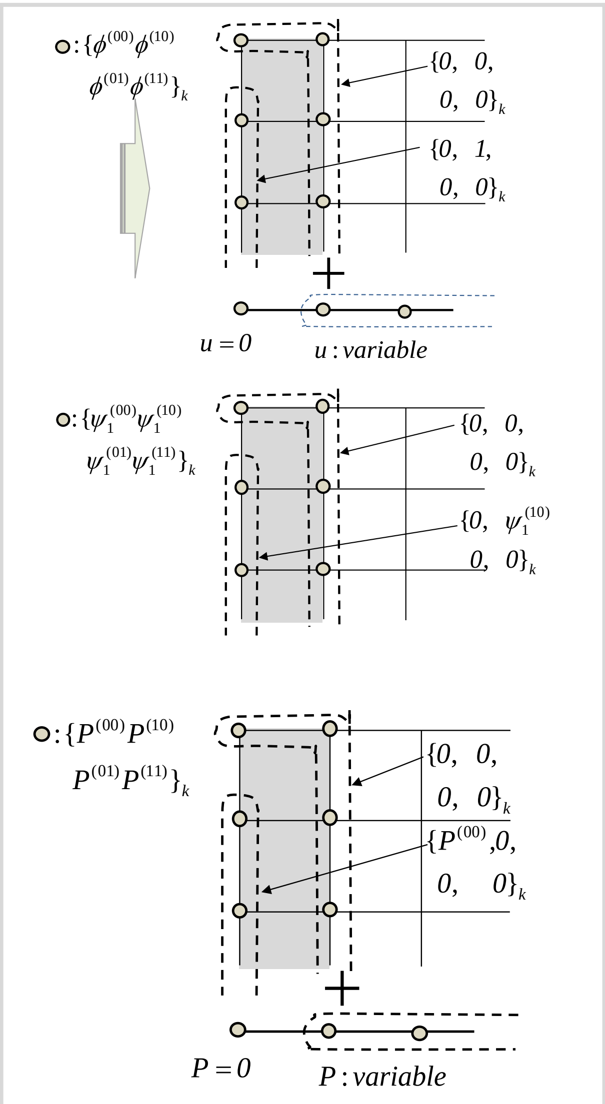


Fig.3 Boundary element for inlet side

流出境界では無反射条件を，境界要素で Fig.4 のように与える．流入境界同様，$\nabla\phi$と対応する$\boldsymbol{\psi}$の境界要素成分は等値する．

Fig.4 のψ_3は流出流量を表すこととなる．したがって，式(9)で等値する．（ψ_3は境界上の 1 点で=*0* とする．）

$$\{\phi^{(10)}\}_k = \{\psi_1^{(10)}\}_k = \{\psi_3^{(01)}\}_k \tag{9}$$

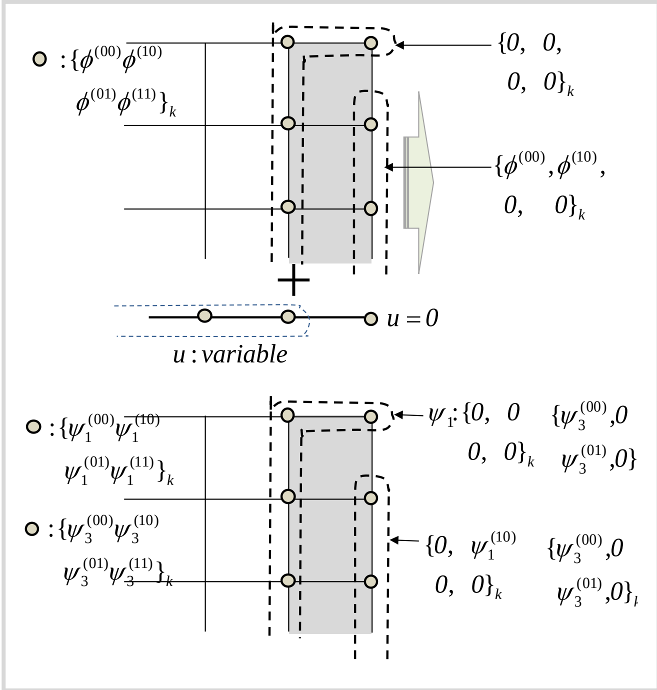


Fig.4 Boundary element for outlet side

Sommerfelt の無反射条件は $D\phi/Dt=0$ とし，自由界面の条件で与える必要がある．よって，$\{\phi^{(00)}\}_k$は式(10)で積分できる．

右辺は運動エネルギーに比例するので，流出速度は式(6)に拠り，圧力に比例することとなる．（ノード値は累次積分して計算可能．）

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\phi}{\partial t} + \phi^{(10)}\cdot\phi^{(10)} = 0 \\ &\therefore \{\phi^{(00)}\}_k^{n+1} = \{\phi^{(00)}\}_k^{n} - \Delta t\{\phi^{(10)}\}_k \cdot \{\phi^{(10)}\}_k \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

境界要素は 3D では 64 項の 3 重 3 次要素となるが，連立方程式を解くわけではない．（Neumann 境界では 1 パラメータは解く．）

系内部を解く Fig.1 要素はノード当り 4 パラメータに低減している．

3．ψ-*U* 双対格子ハイブリッド要素法

(1) 要素形状

Ghia らのψ-ω法は古典的なハイブリッド法として知られる．

里深らは境界条件の容易さから ***U*-$\boldsymbol{\omega}$**法を研究し[3] 一定の成果は得ている．また，ベクトルポテンシャル適用の研究[4] もある．

ただ，序言で述べた渦法の条件不足の弊を免れていない．一般にベクトルポテンシャル法は，圧力計算を省略できるとの誤認がある．[5]

Helmholtz 分解を修正 Helmholtz 分解表示するポイントは非圧縮 Lateral 成分の数値計算にあるが，Neumann 境界問題では Lateral 成分が卓越するのでスキームへの組込みは不可欠である．

Lateral 成分がなければ，自然対流に対しては Bussinesque 近似以外の方法はない．

Fig.1 要素は非適合であり，適用には何らかの処置が必要である．そのひとつはハイブリッド要素法である．

ここでは$\boldsymbol{\psi}$-$\boldsymbol{U}$を双対格子配置して，もう 1 段次数を下げることを考える．別報(6)で 2 次要素および準 2 次要素を提案している．ここではψ_iに不完全 2 次要素，ψ_iに 3 重 1 次要素を適用し，双対格子で配置する．

境界要素は前述の要素を適用するが，以下では理解容易化のため，特別な境界要素を適用しない通常の方法で説明する．

双対格子の一つを mG(main Grid) と呼び境界を含む配置とし，境界条件を与える．もうひとつの格子を sG(sub-Grid) と呼び格子内をψ_i要素で埋め，系の 1 点で$\psi_i^{(000)}=0$ とする．

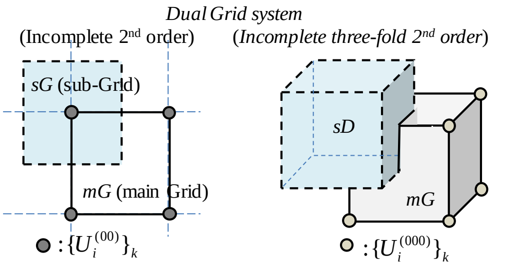


Fig.5 Dual grid systems

不完全 2 次ψ_iの要素形状を Fig.6 に示す．

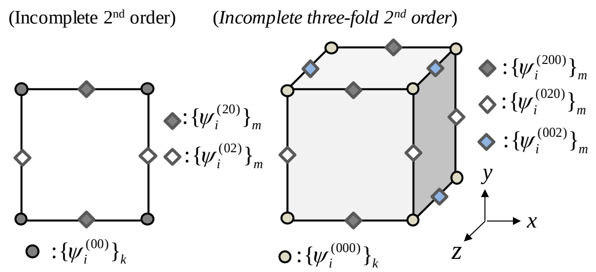


Fig.6 ψ_i elements for 2D and 3D

(2) 数値計算スキーム

圧力要素は省略するが，求まっているものとする．

$\boldsymbol{U}$ 要素は通常の N.S.方程式 Galerkin 法変分式あるいは有限体積法で解く．ただし，速度を $1/2{\cdot}(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{U}_\psi)$で表す．

$\boldsymbol{\psi}$ 要素は $1/2{\cdot}(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{U}_\psi)$に変分式で制約条件を与える役割とし，変分式を連立させる．加える変分行は式(11)とする．

式(11)は微分形で表しているが sG 内で積分する．

$$\left.\begin{aligned}
&(\boldsymbol{U}_\psi-\boldsymbol{U})\cdot\frac{\partial \boldsymbol{U}_\psi}{\partial\{\psi_i^{(000)}\}_k}\cdot d\Omega=0\\
&div\boldsymbol{U}_\psi\cdot\Big(\frac{\partial\psi_1^{(200)}}{\partial\{\psi_1^{(200)}\}_m}+\frac{\partial\psi_2^{(020)}}{\partial\{\psi_2^{(020)}\}_m}+\frac{\partial\psi_3^{(002)}}{\partial\{\psi_3^{(002)}\}_m}\Big)\cdot d\Omega=0\\
&\nabla(\boldsymbol{U}_\psi-\boldsymbol{U})\cdot\Big(\frac{\partial\psi_1^{(020)}}{\partial\{\psi_1^{(020)}\}_m}+\frac{\partial\psi_2^{(002)}}{\partial\{\psi_2^{(002)}\}_m}+\frac{\partial\psi_3^{(200)}}{\partial\{\psi_3^{(200)}\}_m}\Big)\cdot d\Omega=0\\
&\nabla(\boldsymbol{U}_\psi-\boldsymbol{U})\cdot\Big(\frac{\partial\psi_1^{(002)}}{\partial\{\psi_1^{(002)}\}_m}+\frac{\partial\psi_2^{(200)}}{\partial\{\psi_2^{(200)}\}_m}+\frac{\partial\psi_3^{(020)}}{\partial\{\psi_3^{(020)}\}_m}\Big)\cdot d\Omega=0
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

$$where\ \ \boldsymbol{U}_\psi\equiv(\nabla_{diag}+\nabla_{curl})\boldsymbol{\psi}$$

Fig.1 の要素では，図心ノードの無い頂点ノードのみとし，$\boldsymbol{U}$ も同じ要素形状とし，制約条件として式(12)を連立させる．

$$\left.\begin{aligned}
&(\boldsymbol{U}_\psi-\boldsymbol{U})\cdot\frac{\partial \boldsymbol{U}_\psi}{\partial\{\psi_i^{(000)}\}_k}\cdot d\Omega=0\\
&(\boldsymbol{U}_\psi-\boldsymbol{U})\cdot\Big(\frac{\partial}{\partial\{\psi_1^{(100)}\}_m}+\frac{\partial}{\partial\{\psi_2^{(010)}\}_m}+\frac{\partial}{\partial\{\psi_3^{(001)}\}_m}\Big)\boldsymbol{U}_\psi\cdot d\Omega=0\\
&(\boldsymbol{U}_\psi-\boldsymbol{U})\cdot\Big(\frac{\partial}{\partial\{\psi_1^{(010)}\}_m}+\frac{\partial}{\partial\{\psi_2^{(001)}\}_m}+\frac{\partial}{\partial\{\psi_3^{(100)}\}_m}\Big)\boldsymbol{U}_\psi\cdot d\Omega=0\\
&(\boldsymbol{U}_\psi-\boldsymbol{U})\cdot\Big(\frac{\partial}{\partial\{\psi_1^{(001)}\}_m}+\frac{\partial}{\partial\{\psi_2^{(100)}\}_m}+\frac{\partial}{\partial\{\psi_3^{(010)}\}_m}\Big)\boldsymbol{U}_\psi\cdot d\Omega=0
\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

4．まとめと今後の課題

- せん断変形は，どこまでも体積変化なしの非圧縮でなければならない．
- 固体は一般に非圧縮材料なので，破壊に至るまでもその特性が保持されなければ，せん断破壊現象の解明はできない．
- 流れ場は一般に非圧縮であるが，サーマルキャビティのように温度が加われば，圧縮・膨張計算ができなければならない．
- そのためには分離要素・分離解法が不可欠である．
- そのためには,Helmholtz 分解表示すべきであるが，これまでそのスキームは確立されていない．その方法を提案した．
- 数値計算は無限に連続する連立方程式から部分的に切り取って行うので，Neumann 境界の設定は特に重要である．流出側の無反射条件を厳密に設定する技法などを示した．
- 簡単な数値計算が直近の課題である．

参考文献

(1) 今村, “修正 Helmholtz 分解の提案およびその有限要素，並びに流体・固体への適用”，計算工学講演会論文集，vol.22, (2017), F-06-2.

(2) 今村, "有限 Taylor 級数による Navier-Stokes 方程式の数値計算法," 第 32 回数値流体力学講演論文集, (2018) .

(3) 芳里，里深，森西，西田, “渦度-速度表示法による正方空洞内に生じる自然対流問題の数値計算”，日本機械学会論文集（B 編），論文 No.89-1470, 56 巻 530 号, (1990-10).

(4) 島田，徳永，里深，西田,“ベクトルポテンシャル法による三次元粘性流の数値計算”，日本機械学会論文集（B 編），論文 No.88-0677 , 55 巻 514 号, (1989-6).

(5) 保原充，大宮司久明 編，“数値流体力学”，東京大学出版会, pp.24-35, 1993

(6) 今村, "直交格子法の課題； 連続の式を満たす技法あれこれ，ほか," 第 32 回数値流体力学講演論文集, (2018) .