

# 双曲型解法による磁化電子流体の高精度流束計算

Accurate flux calculation for magnetized electron fluids by hyperbolic system approach

- 川嶋 嶺, 東大航空, 東京都文京区本郷 7-3-1, E-mail : kawashima@al.t.u-tokyo.ac.jp  
小紫公也, 東大航空, 東京都文京区本郷 7-3-1

Rei Kawashima, Dept. Aero. and Astro., Univ. Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo

Kimiya Komurasaki, Dept. Aero. and Astro., Univ. Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo

The hyperbolic system approach has been developed to solve for the magnetized electron fluids in quasineutral plasmas. In this research, the accuracy in cross-field electron flux calculation is examined for the hyperbolic system approach. Simplified test cases of the lens- and cusp-shaped magnetic field geometries are computed by the hyperbolic system approach, and the results are compared with those obtained by the conventional elliptic-equation approach. The hyperbolic system approach stably computes the test cases and accurately calculates the cross-field electron fluxes with reflecting the effects of magnetic confinement. On the other hand, in the results obtained by the elliptic-equation approach, the cross-field electron fluxes are overestimated in the conditions of strong magnetic confinements. It is revealed that the hyperbolic system approach has an advantage of accurate electron flux calculation.

## 記号の説明

$A$	: 磁場ベクトルポテンシャル
$B$	: 磁束密度
$e$	: 電荷素量
$L$	: 計算領域サイズ
$M$	: 磁化テンソル
$m_e$	: 電子質量
$n_e$	: 電子数密度
$T_e$	: 電子温度
$V_d$	: 放電電圧
$u_e$	: 電子流速
$\Gamma$	: 電子流束
$\nu_{col}$	: 全衝突周波数
$\nu_{ion}$	: 電離衝突周波数
$\mu$	: 電子移動度テンソル
$\Omega$	: ホールパラメータ
$\phi$	: 空間電位
$\phi_n$	: 負電位 ( $-\phi$ )
$\tau$	: 擬似時間

## 添字

ref : 参照値

## 1. はじめに

宇宙電気推進システムの一つであるホールスラストは、全電化衛星や深宇宙探査機用の高性能推進機として、現在世界中で活発に研究開発が行われている。推進機内部でのプラズマ流れの数値シミュレーションも進歩しており、最近では推進機的设计開発も数値シミュレーション先行で行う Computer-Aided-Engineering (CAE) や Digital Twin のフェーズに移行してきている。今後より高性能な推進機を開発していくためには、精緻な物理モデルと、正確な計算手法の開発が重要である。

ホールスラストの数値シミュレーションは、従来より軸対象を仮定した軸方向-半径方向の 2 次元解析が主流であり、磁場形状がプラズマの生成及び加速に与える影響などが調査されてきた。プラズマ流中ではイオンは磁化されない一方で、電子は強く磁化されるため、磁場閉じ込めの影響を正確に計算するためには、磁化電子流体の

計算手法が特に重要となる。未解決問題として残る電子異常拡散の物理を詳細に議論するためにも、数値拡散を抑えた、磁場を横切る電子流束を正確に計算できる手法の開発が求められている。

ホールスラストにおいて、2 次元の磁化電子流計算を行った最初の数値解析は小紫と荒川によって行われ、ドリフト拡散近似を施した電子流体方程式がシンプルな直交格子上で計算された<sup>(1)</sup>。このアプローチは簡潔な定式化ながら、2 次元の磁場分布を反映させた電場計算を行うことができるため、最近のホールスラスト解析においても用いられている<sup>(2,3)</sup>。しかしながら、強く磁化された電子の流れはいわゆる異方性拡散方程式となり、その数値計算には難しさが伴う。磁力線と計算格子が沿っていない場合には、交差拡散の影響により強い数値拡散が発生することが知られており、この数値拡散によって磁力線を横切る電子流束を正確に計算できないという問題がある<sup>(4)</sup>。

近年、磁化電子流体に対する新しい計算手法として、双曲型方程式系を用いる解法（以下双曲型解法）が提案され研究されている<sup>(5,6)</sup>。この手法は従来楕円型の拡散方程式を用いて計算されてきた磁化電子流体に対し、擬似時間発展を用いて時間発展型双曲型方程式系を構築して計算する手法である。適切な前処理などを用いることにより、強い磁場閉じ込め条件においても磁化電子流体を安定かつ高速に計算できるという特長を持っている。

本研究では、準中性プラズマ中磁化電子流体に対する双曲型解法に対し、磁場を横切る電子流束の計算精度を議論する。従来用いられてきた楕円型方程式を用いる楕円型解法との比較を通じて、双曲型解法による磁場を横切る電子流束がいかに正確に計算できるか、ということに焦点を当てて議論する。

## 2. 基礎方程式

### 2.1 準中性プラズマ中電子流体

磁場の影響が小さい中性粒子やイオンの流れはそれぞれ適切な粒子モデルまたは流体モデルによって表現されるとして、ここでは磁場閉じ込めの影響を強く受ける磁化電子流れの基礎方程式を考える。運動論モデル（粒子モデル）を出発点として、基本的には流体近似、電子慣性ゼロ、電氣的準中性を仮定することで、準中性プラズマ中電子流体の基礎方程式が得られる。

まず電子の質量保存則は以下の連続の式によって書き表される。

$$\nabla \cdot (n_e \vec{u}_e) = n_e \nu_{ion}. \quad (1)$$

準中性プラズマ中では、電子密度分布がイオン密度分布に瞬時に一致するように、電子が素早く移動すると考え

られて、電子の時間微分項は無視される。このことから、電子流体は非圧縮性流体に近い特徴を持つと考えられる。電子の質量が小さいことや電子と重粒子との衝突が頻繁に起こることなどによって、電子慣性が小さくなる。電子慣性の影響を無視すると、電子の運動量保存則は以下の力の釣り合いの式によって書き表される。

$$\nabla \cdot (en_e T_e) = en_e \nabla \phi - en_e \vec{u}_e \times \vec{B} - m_e \nu_{col} n_e \vec{u}_e. \quad (2)$$

この近似はドリフト拡散近似と呼ばれ、多くの実用的なプラズマ流解析で用いられる。ここでは 2 次元解析を想定し、ホールスラストの軸方向 - 半径方向解析の様に、磁力線が解析対象である  $x - y$  平面内に存在し、 $B_z = 0$  かつ  $z$  方向に対称性が仮定できるとする。式 (7) から以下のように電子流束を陽に書き表すことができる。

$$n_e \vec{u}_e = n_e [\mu] \nabla \phi - [\mu] \nabla (n_e T_e). \quad (3)$$

$[\mu]$  は電子移動度のテンソルで、以下の様に表される。

$$[\mu] = \frac{1}{1 + \Omega^2} \begin{bmatrix} 1 + \Omega_x^2 & \Omega_x \Omega_y \\ \Omega_x \Omega_y & 1 + \Omega_y^2 \end{bmatrix} \frac{e}{m_e \nu_{col}}. \quad (4)$$

$\Omega_x, \Omega_y$  は電子ホールパラメータと呼ばれる無次元量であり、ここでは以下の様に定義する。

$$\Omega_x = \frac{e}{m_e \nu_{col}} B_x, \quad \Omega_y = \frac{e}{m_e \nu_{col}} B_y. \quad (5)$$

準中性を仮定したプラズマの数値計算では、電位はガウスの法則ではなく、電子流体方程式を通じて計算される。すなわち、基礎方程式としては、ガウスの法則による電位のポアソン方程式を除く代わりに、準中性仮定 ( $n_e = n_i$ ) を加える格好となる。この電位に関する近似的計算手法はプラズマ近似と呼ばれる<sup>(7)</sup>。

## 2.2 楕円型解法

準中性プラズマ中電子流体の特徴は電子流体方程式系から空間電位を計算する点であるが、従来のアプローチでは楕円型方程式を用いた計算が行われてきた。楕円型方程式を用いたアプローチ（以下楕円型解法）では、式 (3) を式 (1) に代入し、変数  $u_e$  を消去することで得られる以下の楕円型方程式を用いる。

$$\nabla \cdot (-n_e [\mu] \nabla \phi) = -\nabla \cdot ([\mu] \nabla (n_e T_e)) - n_e \nu_{ion}. \quad (6)$$

電子移動度テンソルの対角成分は各方向への拡散の効果を表している一方で、非対角成分は、ある一方向の勾配が別の方向の流束を誘起するというドリフトの効果を表している。従来のアプローチではこの楕円型方程式を  $\phi$  に関する境界値問題として解いていた。準中性プラズマ中電子流体は非圧縮性流体に近い性質をもつことを前述したが、楕円型方程式を用いたアプローチは非圧縮性流体の Marker-and-cell (MAC) 型解法に類似する。

## 2.3 双曲型解法

異方性拡散方程式を安定かつ高速に解く手法として、双曲型システムによるアプローチが開発されてきた。この手法は前述の異方性拡散方程式を、それと等価な双曲型方程式システムに変換して解く手法である。式 (2) は以下の様に書き直すことができる。

$$-en_e \nabla \phi + \nabla \cdot (en_e T_e) = -m_e \nu_{col} [M] n_e \vec{u}_e. \quad (7)$$

ここで、

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 + \Omega_y^2 & -\Omega_x \Omega_y \\ -\Omega_x \Omega_y & 1 + \Omega_x^2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

$[M]$  は電子の磁化度合いを表す無次元のテンソルである。これらの式に擬似時間発展項を付加することで、双曲型

方程式系を構築することを考える。電子の質量保存の式には本来電子密度の時間微分項が備わっていたが、電気的準中性の仮定によりこの時間微分項は無視されていた。そこで準中性プラズマ中電子流体のための双曲型解法では、以下の様に電子密度の代わりに空間電位に関する擬似時間発展項を加える。

$$\frac{n_{e,ref}}{\phi_{ref}} \frac{\partial \phi_n}{\partial \tau} + \nabla \cdot (n_e \vec{u}_e) = n_e \nu_{ion}. \quad (9)$$

ここで  $\phi_n \equiv -\phi$  である。一方運動量保存の式には、以下の様に電子運動量の擬似時間発展項を加える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} (m_e n_e \vec{u}_e) + en_e \nabla \phi_n + \nabla \cdot (en_e T_e) \\ = -m_e \nu_{col} [M] n_e \vec{u}_e. \end{aligned} \quad (10)$$

双曲型解法は式 (9), (10) からなる双曲型システムに対し、風上差分を適用することで安定に計算を行おうとするものである。ここで人工的に付加された擬似時間発展項は物理的な意味を持たないため、反復計算によって十分小さい値に収束させる必要がある。定常状態において、双曲型方程式系は微分方程式上では元の保存式や楕円型の式 (6) と同等である。擬似時間発展を用いるアプローチという点で双曲型解法は非圧縮性流体や低マッハ数の流体に対する擬似圧縮性解法に類似する<sup>(8)</sup>。

## 3. 数値手法

### 3.1 方程式の簡素化と無次元化

本研究では 2 次元のテスト計算を通じて磁化電子流体に対する双曲型解法の有効性を評価する。電子が磁化されたことによる数値上の難しさに焦点を当てるため、ここでは以下の仮定を置いたシンプルな異方性拡散問題を扱う。

$$\begin{aligned} n_e = \text{const.}, \quad T_e = \text{const.}, \quad \nu_{col} = \text{const.}, \\ \nu_{ion} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

スケールパラメータに依存しない計算を行うために方程式の無次元化を行う。計算領域サイズ  $L$  や参照値などを用いて、各物理量を以下の様に無次元化する。

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} = L \nabla, \quad \tilde{\phi} = \phi / \phi_{ref}, \quad \tilde{\nu}_{col} = \nu_{col} / \nu_{col,ref}, \\ \tilde{\tau} = \nu_{col,ref} \tau, \quad [\tilde{\mu}] = (m_e \nu_{col,ref}) / e [\mu] \end{aligned} \quad (12)$$

ここでチルダ付きの文字は無次元化された量を表す。双曲型解法では電子流速も変数として扱う。計算領域内部で磁場を横切って移動する電子の流速を考えると、オームの法則の観点から電子流速は、放電電圧に比例し、計算領域サイズと衝突周波数に反比例する。さらに、電子が磁化された場合には磁場を横切る方向の電子移動度に比例する。これらのことから、電子流速に対しては以下の様な無次元化を施す。

$$\tilde{u}_e = (1 + \Omega^2) \frac{L \nu_{col,ref}}{(e V_d / m_e)} u_e. \quad (13)$$

### 3.2 楕円型解法における数値手法

Sec. 3.1 における仮定を施すと、式 (6) は以下の様に単純化される。

$$\tilde{\nabla} \cdot (-[\tilde{\mu}] \tilde{\nabla} \tilde{\phi}) = 0. \quad (14)$$

直交格子上で、この楕円型方程式を直接法によって計算する。この手法を以下では楕円型解法と呼称する。拡散項

Tab. 1: 比較に用いる計算手法一覧 .

	双曲型解法	楕円型解法
方程式	双曲型システム	楕円型方程式
格子	直交格子	直交格子
空間	2 次精度風上	2 次精度中心
時間	ADI-SGS 法	直接法

は交差拡散を含めすべて 2 次精度中心差分で離散化し、長方形格子における 9 点のステンシルを用いた一般的な離散化式を用いた<sup>(9, 10)</sup>。直接法、すなわちガウスの消去法は LU 分解と前進後退代入という二つのステップにより実装し、係数行列が帯行列となることを利用して、計算時間短縮及び使用メモリ低減を行った。

### 3.3 双曲型解法における数値手法

Sec. 3.1 における仮定を施すと、式 (9), (10) は以下の様に単純化される。

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_n}{\partial \tilde{\tau}} + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\vec{u}}_e = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \tilde{\vec{u}}_e}{\partial \tilde{\tau}} + \tilde{\nabla} \tilde{\phi}_n = -[M] \tilde{\vec{u}}_e \quad (16)$$

この双曲型方程式系に対し安定な計算を行うために、近似リーマン解法に基づく風上差分を適用する。空間の離散化は有限体積法に基づいて行い、Steger-Warming の流束ベクトル分離法<sup>(11)</sup>による風上差分を用いた、minmod 流束制限関数を併用した MUSCL 法を用いて空間 2 次精度とした。

双曲型解法において擬似時間発展項は物理的な意味を持たないため、十分小さな値へと収束させる必要があるが、この収束加速のために陰解法が有効である。本研究では圧縮性流体の CFD にて用いられる Symmetric Gauss-Seidel 法を用いた。陰解法部分の空間差分は空間 1 次精度にて評価した。本研究にて比較に用いる計算手法を Tab. 1 にまとめる。

## 4. レンズ磁場およびカusp磁場でのテスト計算

### 4.1 計算条件

本研究では 2 次元のテスト計算を通じて双曲型解法による電子流束の計算精度を評価する。2 次元テスト計算の計算領域と境界条件を Fig. 1 に示す。

二次元での磁場形状のトポロジーとしてプラズマ工学的に重要なものとして、レンズ磁場及びカusp磁場がある。レンズ磁場はイオンの流れを集中させるプラズマレンズと呼ばれる効果を作り、ホールスラスタの放電チャネルにおいて、イオンを壁面から遠ざけながら加速するために用いられる磁場形状である<sup>(12, 13)</sup>。カusp磁場は容器壁面からプラズマを遠ざけながらも、カusp点の周りでは磁場フリーの領域を作ることが可能であり、イオンエンジンの放電室などで用いられるほか、ホールスラスタにおいても陽極付近でしばしば現れる。

テスト計算用のレンズ磁場およびカusp磁場を生成するため、それぞれ以下の磁場ベクトルポテンシャルを仮定した。

$$A_{z, \text{Lens}} = B_{\text{ref}} \hat{x} \left( 1 - \frac{2\hat{y}^2}{L^2} \right)^{-1}, \quad (17)$$

$$A_{z, \text{Cusp}} = \frac{B_{\text{ref}}}{L} (\hat{x}^2 - \hat{y}^2). \quad (18)$$

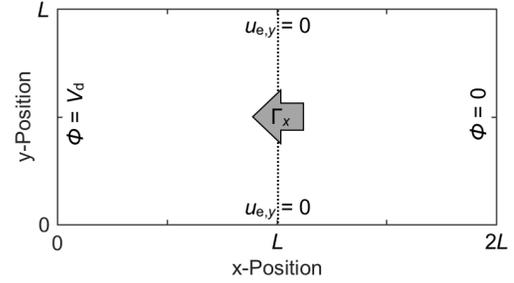


Fig. 1: 2次元テスト計算の計算領域と境界条件 .

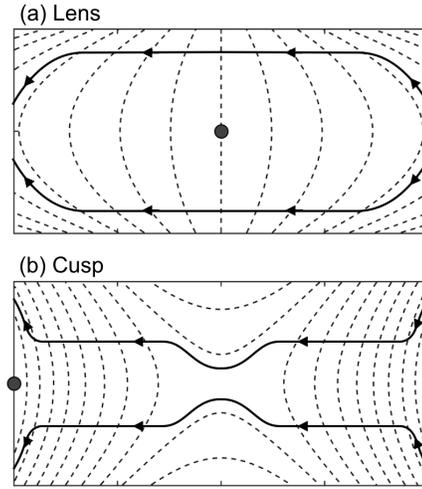


Fig. 2: 入力条件としてテスト計算に用いたレンズ磁場およびカusp磁場形状。図中黒点線は磁力線、実線は予想される電子流線の一例を表し、黒点にて  $B_{\text{ref}}$  を定義する。

それぞれの磁場形状を Fig. 2 に示す。参照磁束密度  $B_{\text{ref}}$  は図中黒点の位置で定義されており、参照ホールパラメータは  $\Omega_{\text{ref}} = eB_{\text{ref}} / (m_e \nu_{\text{col,ref}})$  と与えられる。

磁力線を横切る電子流束に対する評価指標として、本研究では計算領域を横切る電子流束を用いた。計算領域を横切る電子流束  $\Gamma_x$  は Fig. 1 に示される通り、 $x = L$  の境界を横切って流れる電子流束の総和と定義した。本解析では参照ホールパラメータを  $1 - 10^4$  で変化させて、計算領域を横切る電子流束を計算した。

### 4.2 計算結果

レンズ磁場条件を  $\Omega_{\text{ref}} = 100$  に設定して双曲型解法により計算した。各変数の擬似時間発展項(残差)は Fig. 3 に示す通り単調減少し、定常解が得られた。レンズ磁場条件の計算結果を Fig. 4 に示す。電位分布は磁場分布を反映したレンズ型になっており、等電位線は磁力線に正確に沿っている。電子は陰極側から陽極側へと向かう際、横切る磁力線の本数が最小になる経路を選択する傾向がある。この特性と照らし合わせると、レンズ磁場条件の電子流線の結果は妥当なものであると分かる。

カusp磁場条件に対しても  $\Omega_{\text{ref}} = 100$  の条件にて双曲型解法により計算した。各変数の擬似時間発展項は、レンズ磁場条件の結果と同様 Fig. 5 の通り単調減少を示した。カusp磁場条件の計算結果を Fig. 6 に示す。等電位線はカusp磁場形状を反映したものとなっており、カusp点の周辺では電位が平坦な領域ができていることが分かる。また電子流線に対しては、カusp磁場の磁場形状と照らし合わせると、横切る磁力線の本数が最小となるような電子流線が適切に計算されていることが分かる。

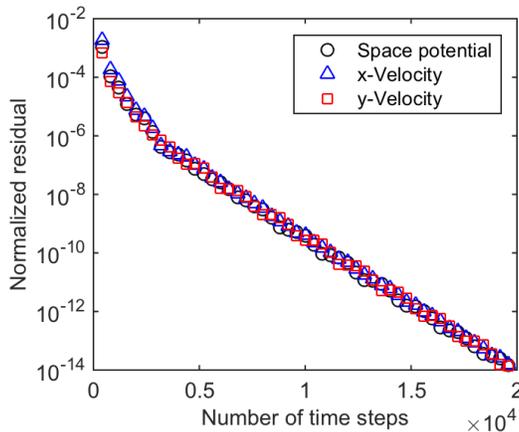


Fig. 3: レンズ磁場条件を双曲型解法で計算した際の反復計算における残差収束性.

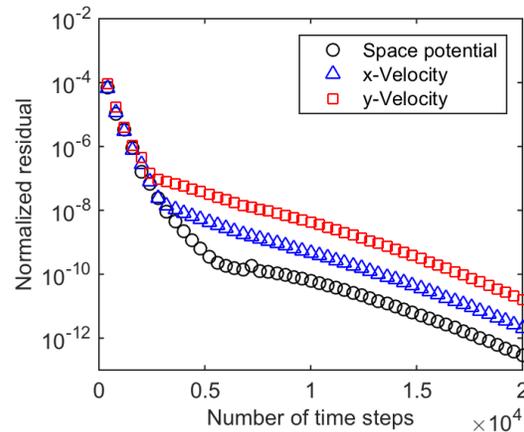


Fig. 5: カスプ磁場条件を双曲型解法で計算した際の反復計算における残差収束性.

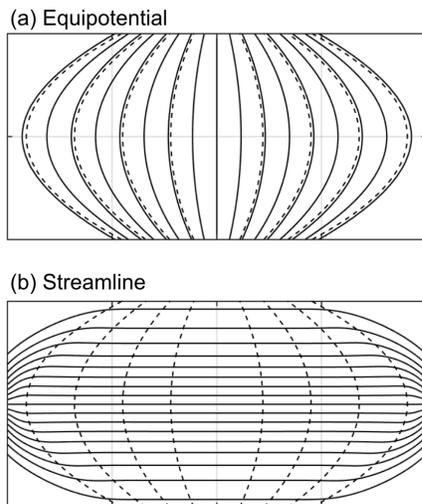


Fig. 4: 双曲型解法によるレンズ磁場条件の計算結果. 点線は参照磁力線を表す.

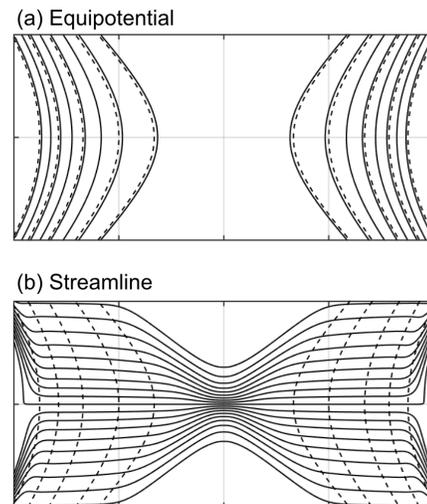


Fig. 6: 双曲型解法によるカスプ磁場条件の計算結果. 点線は参照磁力線を表す.

### 4.3 電子流束の計算精度

レンズ磁場条件において、双曲型解法と楕円型解法によって得られた、計算領域を横切る電子流束のホールパラメータ依存性を Fig. 7 に示す。計算領域右端から左端へと電子が流れるときの電気的抵抗を考えると、磁場閉じ込めによる電気的抵抗が支配的となる。磁力線を横切る方向の電子移動度は式 (4) で表されるとおり、 $1 + \Omega^2$  に反比例する。すなわち、磁場閉じ込めが十分強い条件では、計算領域を横切る電子流束は  $\Omega^{-2}$  に比例する。双曲型解法では、磁場閉じ込めが強くなる  $\Omega_{\text{ref}} > 10$  となる条件において、 $\Gamma_x \propto \Omega_{\text{ref}}^{-2}$  という特徴が捉えられている。双曲型解法では、磁場閉じ込めの影響を反映した正確な電子流束計算が可能であることが分かった。

一方で、直交格子上で楕円型方程式を解く楕円型解法では、磁場閉じ込めが強くなる条件において、電子流束が過多に見積もられてしまっている。特に  $\Omega_{\text{ref}} > 10^2$  の条件下ではホールパラメータを増加させても電子流束はほぼ横ばいとなっており、 $\Gamma_x \propto \Omega_{\text{ref}}^{-2}$  という磁場閉じ込めの影響を適切に反映した流束計算が出来ていない。

磁力線を横切る電子流束の計算精度に関して、カスプ磁場条件においても、レンズ磁場条件の結果と同様の傾向が見られた。カスプ磁場条件における計算領域を横切る電子流束のホールパラメータ依存性を Fig. 8 に示す。

カスプ磁場条件の場合でも、双曲型解法は  $\Omega_{\text{ref}} > 10$  となるような強い磁場閉じ込めの条件において、 $\Gamma_x \propto \Omega_{\text{ref}}^{-2}$  という特徴を捉えた計算を行うことが可能であった。一方楕円型解法はやはり  $\Omega_{\text{ref}} > 10^2$  となるような強い磁場閉じ込めの条件では、電子流束が過大に計算されている。

すべての計算手法で基礎的な物理モデルは同一であるため、楕円型解法において電子流束が過剰に計算されてしまうのは数値的な誤差によるものである。楕円型解法は有限体積法および直接法に基づいて実装されており、数値流束の保存はマシン精度の十分小さい誤差で満たされている。つまり、楕円型解法における電子流束が過剰に計算されてしまう原因は空間的な離散化誤差によるものである。準中性プラズマ中電子流体は非圧縮性流体に近い性質を持っており、支配方程式を楕円型の拡散方程式を用いて記述することが可能である。しかしながら、この拡散方程式を一般的な中心差分で計算しても、強い磁場閉じ込めの条件下では異方性の影響により流束が正確に計算できないことが明らかになった。

ホールスラストでは磁場閉じ込め強度は  $\Omega > 100$  となることが知られているが<sup>(14)</sup>、このような強い磁場閉じ込めの影響を正確に反映したプラズマ流解析を行う上で、双曲型解法は有力な数値手法となることが示された。

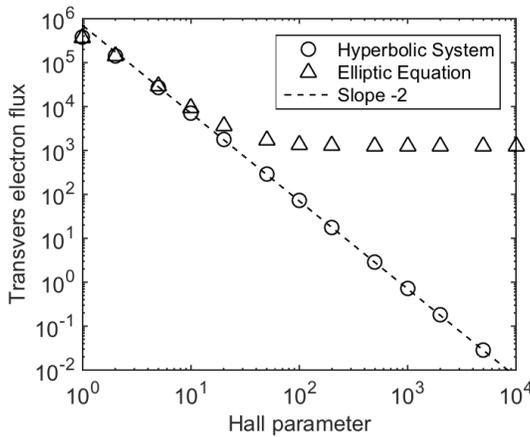


Fig. 7: レンズ磁場条件における各手法での放電電流のホールパラメータ依存性.

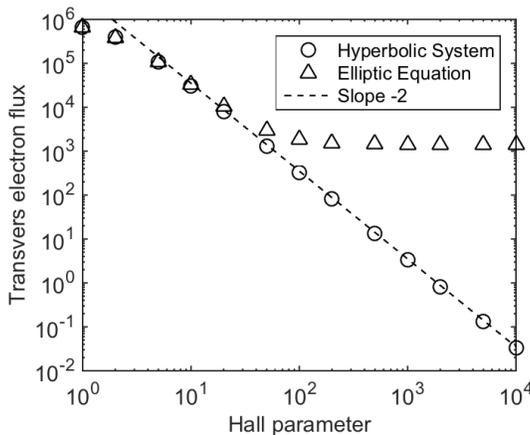


Fig. 8: カスプ磁場条件における各手法での放電電流のホールパラメータ依存性.

## 5. 結論

ホールスラストなどで現れる準中性プラズマ中磁化電子流体に対し、双曲型方程式系と擬似時間発展を用いて解析する双曲型解法に関し、磁場を横切って流れる電子流束の計算精度を検証した。テスト計算では2次元での磁場形状のトポロジー上重要であるレンズ磁場およびカスプ磁場の形状を用いた。従来用いられていた手法である、楕円型方程式を直交格子上で直接法により解く手法を実装し、双曲型解法とこの楕円型方程式を用いる手法の間で、磁力線を横切って流れる電子流束の計算精度に関して比較を行った。

レンズ磁場およびカスプ磁場条件に対し双曲型解法を適用したところ、各変数の擬似時間発展項は安定に十分小さい値へと収束し、収束解が得られた。ホールパラメータが100以上となるような電子が強く磁化された条件では、楕円型方程式を直交格子上で解いた場合には磁場を横切る電子流束が、数値誤差により過大に計算されてしまうことが分かった。一方双曲型解法では、レンズ磁場およびカスプ磁場の条件において、磁場閉じ込め強度を反映した正確な電子流束計算が可能であることが示された。

## 謝辞

本研究はJSPS 科研費 JP17K14873 の助成を受けたものです。

## 参考文献

- (1) Komurasaki, K. and Arakawa, Y., "Two-dimensional numerical model of plasma flow in a Hall thruster," *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 11, No. 6, 1995, pp. 1317–1323.
- (2) Hagelaar, G. J. M., Bareilles, J., Garrigues, L., and Boeuf, J. P., "Role of anomalous electron transport in a stationary plasma thruster simulation," *Journal of Applied Physics*, Vol. 93, No. 1, 2002, pp. 67–75.
- (3) Kubota, K., Cho, S., Watanabe, H., and Funaki, I., "Hybrid-PIC Simulation of Hall Thruster with Internally Mounted Cathode," 35th International Electric Propulsion Conference, IEPC-2017-429, 2017.
- (4) Hagelaar, G. J. M., "Modelling electron transport in magnetized low-temperature discharge plasmas," *Plasma Sources Science and Technology*, Vol. 16, No. 1, 2007, pp. S57–S66.
- (5) Kawashima, R., Komurasaki, K., and Schönherr, T., "A hyperbolic-equation system approach for magnetized electron fluids in quasi-neutral plasmas," *Journal of Computational Physics*, Vol. 284, 2015, pp. 59–69.
- (6) Kawashima, R., Komurasaki, K., and Schönherr, T., "A flux-splitting method for hyperbolic-equation system of magnetized electron fluids in quasi-neutral plasmas," *Journal of Computational Physics*, Vol. 310, 2016, pp. 202–212.
- (7) Chen, F. F., *Introduction to plasma physics and controlled fusion*, Plenum Press, New York, 1984.
- (8) Chorin, A. J., "A numerical method for solving incompressible viscous flow problems," *Journal of Computational Physics*, Vol. 2, No. 1, 1967, pp. 12–26.
- (9) in 't Hout, K. J. and Welfert, B. D., "Stability of ADI schemes applied to convection–diffusion equations with mixed derivative terms," *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 57, No. 1, 2007, pp. 19–35.
- (10) Mitchell, A. R. and Griffiths, D. F., *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*, Wiley, New York, 1980.
- (11) Steger, J. L. and Warming, R., "Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods," *Journal of Computational Physics*, Vol. 40, No. 2, 1981, pp. 263–293.
- (12) Linnell, J. A. and Gallimore, A. D., "Internal plasma potential measurements of a Hall thruster using plasma lens focusing," *Physics of Plasmas*, Vol. 13, 2006, pp. 103504.
- (13) Hofer, R. R., Jankovsky, R. S., and Gallimore, A. D., "High-Specific Impulse Hall Thrusters, Part 1: Influence of Current Density and Magnetic Field," *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 22, No. 4, 2006, pp. 721–731.
- (14) Hofer, R. R. and Gallimore, A. D., "High-Specific Impulse Hall Thrusters, Part 2: Efficiency Analysis," *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 22, No. 4, 2006, pp. 732–740.