

## 分割型移流項を用いた高次精度流束再構築法の 実用計算における安定性について

### On Stability of Split-form High-order Flux-reconstruction Schemes for Practical Flow Simulations

- 渡邊 誉良, 横国大, 神奈川県横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-5, watanabe-takara-sc@ynu.jp
- 阿部 圭晃, 東北大, 宮城県仙台市青葉区片平 2-1-1, yoshiaki.abe@tohoku.ac.jp
- 芳賀 臣紀, JAXA, 神奈川県相模原市中央区由野台 3-1-1, haga.takanori@jaxa.jp
- 高木 亮治, ISAS/JAXA, 神奈川県相模原市中央区由野台 3-1-1, ryo@isas.jaxa.jp
- 大山 聖, ISAS/JAXA, 神奈川県相模原市中央区由野台 3-1-1, oyama@flab.isas.jaxa.jp
- 野々村 拓, 東北大, 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01, nonomura@aero.mech.tohoku.ac.jp
- 宮路 幸二, 横国大, 神奈川県横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-5, miyaji@ynu.ac.jp
- Takara Watanabe, Yokohama National University, 79-5, Tokiwadai, Hodogaya-ku, Yokohama, Japan
- Yoshiaki Abe, Tohoku University, 2-1-1, Katahira, Aoba-ku, Sendai, Japan
- Takanori Haga, JAXA, 3-1-1, Yoshinodai, Chuo-ku, Sagamihara, Japan
- Ryoji Takaki, ISAS/JAXA, 3-1-1, Yoshinodai, Chuo-ku, Sagamihara, Japan
- Akira Oyama, ISAS/JAXA, 3-1-1, Yoshinodai, Chuo-ku, Sagamihara, Japan
- Taku Nonomura, Tohoku University, 6-6-04, Aramaki Aza Aoba, Aoba-ku, Sendai, Japan
- Koji Miyaji, Yokohama National University, 79-5, Tokiwadai, Hodogaya-ku, Yokohama, Japan

This paper discusses numerical stability of the split-form FR scheme for practical flow simulations, i.e. laminar flow simulation of NACA0012 airfoil. Numerical stability of the split-form FR scheme is compared with that of FR schemes in divergence form by searching for the maximum time-step width that allows stable computation. This result shows split-form FR scheme has an advantage in numerical stability, whereas FR scheme in divergence form is unstable in the most flow conditions. This paper also shows the FR scheme with the eighth-order solution approximation on high-order mesh can work well with less error unless the order of a solution polynomial is less than the order of a shape function of high-order mesh.

#### 1. はじめに

近年、航空機やロケットのような複雑形状周りの高レイノルズ数乱流のCFD解析への需要が高まっており、複雑形状周りの解析が容易で、かつ計算コストが低く精度も高い計算手法の開発が期待されている。複雑形状周りの解析の容易さには非構造格子を、計算コストの低さ・精度の高さには高次精度計算手法を用いることで応えられると考えれば、その2つの要素を融合した不連続ガレルキン法のような非構造高次精度計算手法が有効であると考えられる。本研究では、非構造高次精度計算手法の中でも、計算コストが比較的低いと期待される流束再構築法<sup>1)</sup>に注目する。

高次精度計算手法は、非線形移流項の離散化から生じるエイリアス誤差の蓄積を原因とする数値的不安定性の問題点がある。これを解決するために、移流項に分割型を用いる方法がある。分割型 (split form) は混合型, skew-symmetric form といった名称で知られ、エイリアス誤差を減らし、自乗量保存性を満たす効果が数値的安定性に寄与することが知られている。森西<sup>2)</sup>は構造格子を用いる差分法において自乗量保存スキームを構築し、数値的安定性の高いスキームを実現した。非構造高次精度計算手法においても、Gassner<sup>3)</sup>が split form を不連続ガレルキン法に導入し、安定性の高いスキームの実現に成功している。流束再構築法においてもこれを導入するために、阿部・森中<sup>4)</sup>が、split form を用いたときの保存量保存性、自乗量保存性を満たす条件を示している。

しかしながら、分割型移流項を用いた流束再構築法の検証計算は Cartesian 格子を用いた周期的な乱流のように、簡単な解析までにとどまっている。そのため、分割型移流項を用いた流束再構築

法の安定性について、曲面を持った壁ありの流れ場などのより実用的な計算ではまだ議論されていない。

また、非構造高次精度計算手法は他の計算手法に比較して、必要となる格子数の数が少なく済み、計算コストが軽くなるという利点があるが、一方で格子数が少ないと曲率が大きな壁面を正確に表現できないという問題もある。これを解決するには、通常の格子よりも座標情報を多く持つ high-order mesh が有効であることが知られている。しかし、8次精度計算などで high-order mesh が使われた例は少なく、得られる解の精度に対しどのように影響を及ぼすのかについては、ほとんど議論されていない。

本稿では、NACA0012 翼周り層流計算、円柱周り非粘性流れ計算などの実用的な計算を行うことで分かった、分割型移流項を用いた流束再構築法の数値的安定性についてまとめる。これらの計算では、8次精度までの超高次精度計算にも取り組んでおり、移流項に分割型を用いた場合と、通常の発散型を用いた場合とで、数値的安定性がどう異なるかを検証する。

また、複数の実用的な計算を通して分かった、超高次精度計算を行ったときの high-order mesh の効果についてもまとめる。NACA0012 翼周り層流計算では、linear mesh を用いたときに比べて表面圧力分布がどの程度正確に表現できるかを検証する。さらに、円柱周り非粘性流計算と Bump 有り非粘性 Channel 流計算を通して、high-order mesh が解の精度に及ぼす影響を、流れ場を比較することで調べる。

## 2. 数値計算法

### 2.1 流束再構築法

流束再構築法の概要を, 1 次元保存則を用いて示す.  $u = u(t, x)$  は保存変数,  $f(u)$  は流束である.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

各セル  $E_j$  内に  $K+1$  個の自由度 (内点) を導入し, これを解の定義点 (SP, solution point) と定義する. 本研究では, SP に Legendre 多項式の零点である Gauss 点と, Lobatto 多項式の零点である Gauss-Lobatto 点を用いた.

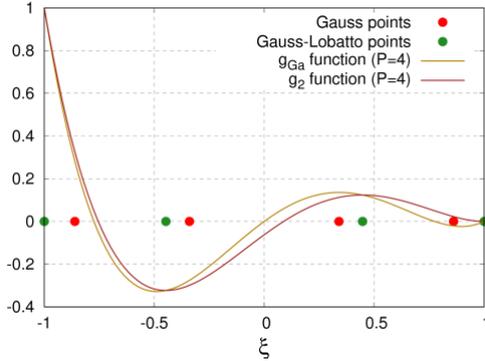


Figure 1: Solution points and Correction function

また, SP における保存変数  $u_{j,k}$  と流束  $f_{j,k}$  を  $K$  次の Lagrange 多項式で近似する.

$$f_j = \sum_{k=0}^K f_{j,k} \phi_k(\xi) \quad (2)$$

ここで,  $\phi_k$  は Lagrange 多項式の基底関数であり, 以下の式(3)で定義される.

$$\phi_k = \prod_{l=0, l \neq k}^K \frac{\xi - \xi_l}{\xi_k - \xi_l} \quad (3)$$

近似して形成された流束関数  $f_j$  は隣り合うセルの境界で不連続であり, 隣り合うセルの情報が反映されない. これを解決するには, セルの境界で連続になるように流束関数を再構築する必要がある. 再構築には以下の式を用いる.

$$(F_\xi)_{j,k} = (f_\xi)_{j,k} + [f_{j-1/2}^{com} - f_j(-1)]g_L'(\xi_k) + [f_{j+1/2}^{com} - f_j(1)]g_R'(\xi_k) \quad (4)$$

式(4)で用いられている関数  $g_L$ ,  $g_R$  は修正関数と呼ばれるものであり, 標準要素  $I$  ( $\xi \in [-1, 1]$ ) において以下のように定義される.

$$g_L(-1) = 1, \quad g_L(1) = 0 \quad (5)$$

$$g_R(\xi) = g_L(-\xi) \quad (6)$$

修正関数には以下の種類の関数を用いた. ここで,  $P_K$  は  $K$  次の Legendre 多項式を,  $R_{R,K}$  は右 Radau 多項式を表す.

$$g_{Ga,K} = \frac{K}{2K-1}R_{R,K} + \frac{K-1}{2K-1}R_{R,K-1} \quad (7)$$

$$g_{2,K} = \frac{K-1}{2K-1}R_{R,K} + \frac{K}{2K-1}R_{R,K-1} \quad (8)$$

$g_{Ga}$  関数は Gauss 点を解にもつ多項式である.  $g_2$  関数はセル内の左右どちらかの境界を除く Gauss-Lobatto 点で一階微分値  $g_2' = 0$  となる特徴を有する.

式(4)により, 例えば左側境界  $x_{j-1/2}$  において左側境界の値を  $f_j(-1)$  から共通流束  $f_{j-1/2}^{com}$  に変えることができ, セル境界で流束関数は共通流束をとるようになる. また, セル境界で不連続だった流束関数  $f_j$  は連続的な  $K+1$  次の流束関数  $F_j$  に再構築される. 再構築の式は微分型であるので, 任意の時間進行法で解を更新する.

### 2.2 2次元への拡張

前項で述べた 1 次元の流束再構築法を, 2 次元に拡張する. 2 次元の保存則は以下のように表される.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

流束再構築法では, 四角形セルで計算領域を分割する. また, これらのセルを標準要素  $(\xi, \eta) \in [-1, 1]$  に変換する. 変換は次式で表される.

$$\begin{pmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^K M_i(\xi, \eta) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad (10)$$

ここで,  $K+1$  は物理要素を定義する点数,  $(x_i, y_i)$  はそれぞれの点のデカルト座標,  $M_i(\xi, \eta)$  は形状関数である.  $J$  はヤコビアン,  $\xi_x$ ,  $\xi_y$  などはメトリックを表す.

$$J = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \quad (11)$$

$$\xi_x = \frac{1}{J}y_\eta, \quad \xi_y = -\frac{1}{J}x_\eta \quad (12)$$

$$\eta_x = -\frac{1}{J}y_\xi, \quad \eta_y = \frac{1}{J}x_\xi$$

物理空間の支配方程式は計算空間で次式のように表される.

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = 0 \quad (13)$$

$$\hat{Q} = JQ \quad (14)$$

$$\hat{E} = J(\xi_x E + \xi_y F), \quad \hat{F} = J(\eta_x E + \eta_y F)$$

$Q_{i,j,k}$  を 1 次元 Lagrange 多項式のテンソル積で表す.

$$Q_i(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^K \sum_{j=0}^K \left( \frac{1}{J_{i,j,k}} \cdot \hat{Q}_{i,j,k} \right) \phi_j(\xi) \phi_k(\eta) \quad (15)$$

ここで  $\phi_j$  は Lagrange 多項式の基底関数である.

セル内の流束分布も solution point で計算される  $\hat{E}(Q_{i,j,k})$ ,

$\hat{F}(Q_{i,j,k})$  を用いて同様に表現される.

$$\hat{E}_i(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^K \sum_{j=0}^K \hat{E}_{i,j,k} \phi_j(\xi) \phi_k(\eta) \quad (16)$$

$$\hat{F}_i(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^K \sum_{j=0}^K \hat{F}_{i,j,k} \phi_j(\xi) \phi_k(\eta) \quad (17)$$

流束関数はセル境界にて共通流束をとるように修正される。例えば  $\xi$  方向では、共通流束  $\hat{E}_{i\pm 1/2}^{com}(\eta_k)$  をもって、 $\partial \hat{E} / \partial \xi$  を次式で評価する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{E}_i^c(\xi, \eta_k)}{\partial \xi} &= \sum_{j=0}^K \hat{E}_{i,j,k} \cdot \phi_j'(\xi) \\ &+ [\hat{E}_{i-1/2}^{com}(\eta_k) - \hat{E}_i(-1, \eta_k)] g_L'(\xi) \\ &+ [\hat{E}_{i+1/2}^{com}(\eta_k) - \hat{E}_i(1, \eta_k)] g_R'(\xi) \end{aligned} \quad (18)$$

同様に  $\partial \hat{F} / \partial \eta$  を評価し、解  $\hat{Q}_{i,j,k}$  を任意の時間進行法で更新する。

### 2.3 分割型移流項

圧力を除く移流項  $\partial(\rho u \phi) / \partial x$  を変形して、以下 3 つの型を定義する。

$$(Div.) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) \quad (19)$$

$$(Adv.) = \phi \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \rho u \frac{\partial}{\partial x} (\phi) \quad \text{etc.} \quad (20)$$

$$(Split.) = \frac{1}{2} (Div.) + \frac{1}{2} (Adv.) \quad (21)$$

ここで、発散型 (*Div.*) と勾配型 (*Adv.*) はそれぞれ保存形、非保存形で記述される。また、発散型と勾配型の平均として混合型 (*Split.*) があり、自乗量保存形を与える。混合型を考える際、時間項の取り扱いが難しいことから、時間項を除いた擬混合型を用いることがある。擬混合型は自乗量保存性を先天的には満たさないものの、スキームの数値安定性を向上させる効果があることが知られている。本稿では、分割型 (*split form*) を、混合型と擬混合型を包含する呼び名として定義する。

勾配型は複数の表し方が出来るため、分割型も複数の表し方が提唱されているが、今回の検証計算では式(22)に示す Fe 型 (Feierissen et al.<sup>6)</sup>) を用いた。この Fe 型は  $\rho u \cdot \phi$  の様に 2 次の分割で表される。

$$(Fe) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) + \frac{1}{2} \phi \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{1}{2} \rho u \frac{\partial}{\partial x} (\phi) \quad (22)$$

### 2.4 保存量保存性と自乗量保存性

上記の移流項分割型を用いると、解の多項式の次数は  $K$  であるのに対し、移流項を表す多項式の次数が  $2K - 1$  なので、一般的には保存量保存性は満たされない。

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left[ I^K[f] \frac{\partial I^K[h]}{\partial \xi} + I^K[h] \frac{\partial I^K[f]}{\partial \xi} \right] d\xi \\ \cong \sum_{i=0}^K \omega_i \left[ I^K[f] \frac{\partial I^K[h]}{\partial \xi} + I^K[h] \frac{\partial I^K[f]}{\partial \xi} \right] \\ = I_L^K[fh](1) - I_L^K[fh](-1) \end{aligned} \quad (23)$$

しかし、 $K + 1$  個の SP に Gauss-Lobatto 点を選べば、2 次の非線形項の厳密な数値積分が  $2K - 1$  次の多項式まで可能であること、また SP はセル境界に相当する端点を含む為に、非線形項の値

は離散的に厳密となることから、式(23)が成立し、保存量保存性が満たされることがわかった。

ここで、 $f$  と  $g$  は任意の関数であり、 $I^K$  は  $K$  次の多項式補間、 $\omega_i$  は Gauss-Lobatto 点での数値積分時の重みを表す。また、詳細な説明は省略するが、セル内の自乗量保存を満たすためには、修正関数に  $g_2$  関数を選ぶことが十分条件となる。

結果、Fe 型で保存量保存性を満足する十分条件は以下のとおりである。

- SP (解の定義点) に Gauss-Lobatto 点を選ぶこと  
ただし、Gauss 点でも、セル境界の流束 (非線形項) を  $2K - 1$  次の多項式で外挿補間すれば保存量保存性を満たす。保存量保存性については修正関数の選び方に任意性があるが、自乗量保存性も満たしたい場合は、次の十分条件が加わる。
- 修正関数に  $g_2$  関数を選ぶこと  
なお、この条件は Fe 型と同じ 2 次の非線形項であれば他の型でも適用可能であるが、3 次の非線形項の場合はその限りでない。

### 2.5 メトリック計算方法

流束再構築法を含め、高次精度計算手法では、格子の形状を定義する形状関数が高次であるとき、一様流を保持しないことがある。阿部ら<sup>9)</sup>は、保存型の流束再構築法において曲線を持つ 3 次元の格子を用いるとき、一様流保持を満たすことが可能なメトリクス計算方法を議論した。本研究では、2 種類のメトリック計算方法を用いている。

$$NC: \hat{\xi}_x = y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta \quad (24)$$

$$CSC: \hat{\xi}_x = \left\{ (y_\eta z - z_\eta y)_\zeta - (y_\zeta z - z_\zeta y)_\eta \right\} / 2 \quad (25)$$

式(24)を表す NC 型 (非保存型, non-conservative metric) は、一般的なメトリック計算方法である。計算手法の多項式次数を  $P$ 、high-order mesh の形状関数の次数を  $GP$  とすると、NC 型は、 $P \geq 2GP$  の関係であるときのみ一様流保持を満たすことが、阿部らにより報告されている。ただし、本稿にある検証計算はすべて 2 次元計算であるため、非保存型は保存型と同等の計算方法となる。つまり本稿において NC 型は、 $P \geq GP$  の関係であるときに一様流保持を満たすと考えれば良い。

式(25)を表す CSC 型 (consistent symmetric conservative metric) は、NC 型が一様流保持を満たす条件が厳しい問題に対して、考案された特別なメトリック計算手法である。CSC 型を用いれば、 $P < GP$  の関係であるときでも一様流保持を満たすことが、理論的に説明されており、3 次元の非粘性渦移流計算でも確認されている。

## 3. 数値的安定性の検証

### 3.1 NACA0012 翼周り層流計算

非定常、2 次元の NACA0012 翼周りの層流計算を行った。ここでは、マッハ数、迎角の異なる複数の流れ条件において、移流項に分割型を用いた場合の数値的安定性を、通常発散型を用いた場合と比較する。Table 1 に示す通り、6 種類の流れ条件で検証計算を行った。翼弦長を代表長さとしたレイノルズ数はどの条件においても 5000 で固定である。

計算を行うにあたり、時間進行法には 3 次 TVD Runge-Kutta 法、共通流束には SLAU flux<sup>7)</sup>、粘性項には BR2 flux<sup>8)</sup>、メトリックには NC 型を用いた。solution point には Gauss-Lobatto 点を用いた。修正関数には  $g_{Ga}$  関数、 $g_2$  関数をそれぞれ用いている。 $g_2$  関数を用い、かつ共通流束に運動エネルギー保存 (KEP) flux を用いる場合、スキームは自乗量保存性を満たす。

Table 1: Conditions for laminar flow over the NACA0012 airfoil

	Mach number	Angle of attack	Reynolds number
M05A08	0.5	8	5,000
M05A09	0.5	9	5,000
M05A10	0.5	10	5,000
M05A11	0.5	11	5,000
M04A10	0.4	10	5,000
M06A10	0.6	10	5,000

総自由度数をほぼ同じ値とするため、8 次精度 (P7) 計算のときは格子数 864, 4 次精度 (P3) 計算のときは格子数 3600 の C 型の計算格子を用いた。また、曲率を持った壁をより正確に再現するために、high-order mesh を用いた。境界条件として、翼表面には no-slip 条件を課した。

計算手法の数値的安定性を調べる手法としては、一般的に von Neumann 解析が知られているが、ここで調べる計算手法は非線形であるため、これを用いることが出来ない。そこで、本研究では次のような方法で数値的安定性を調べた。

- 1) 分割型を用いたとき、無次元時間 50 以上安定的に計算を行える最大の時間幅を見つける。
- 2) 発散型を用いたときも、1) で見つけた最大の時間幅で、無次元時間 50 以上安定的に計算が行えるか調べる。
- 3) もし 2) で計算が発散したときは、1) で見つけた時間幅の半分 の値で、2) と同様に発散型で無次元時間 50 以上安定的に計算が行えるか調べる。

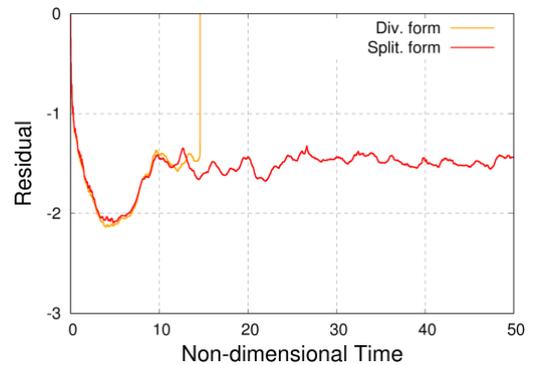
Table 2: Maximum time-step width (Angle of attack is changed.)

Condition	Correction Function	Polynomial of order	Maximum time step of split form	Div. form	
				Same time step	Half time step
M05A08	$g_{Ga}$	P7	$0.99 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M05A08	$g_{Ga}$	P3	$1.80 \times 10^{-4}$	✓	✓
M05A08	$g_2$	P7	$1.01 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M05A08	$g_2$	P3	$1.95 \times 10^{-4}$	✓	✓
M05A09	$g_{Ga}$	P7	$0.92 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M05A09	$g_{Ga}$	P3	$1.62 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M05A09	$g_2$	P7	$0.94 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M05A09	$g_2$	P3	$1.85 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M05A10	$g_{Ga}$	P7	$0.84 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M05A10	$g_{Ga}$	P3	$1.63 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M05A10	$g_2$	P7	$0.88 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M05A10	$g_2$	P3	$1.75 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M05A11	$g_{Ga}$	P3	$1.54 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M05A11	$g_2$	P3	$1.66 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up

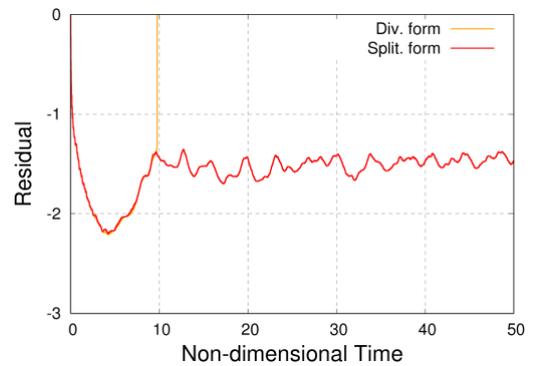
Table 3: Maximum time-step width (Mach number is changed.)

Condition	Correction Function	Polynomial of order	Maximum time step of split form	Div. form	
				Same time step	Half time step
M04A10	$g_{Ga}$	P7	$1.26 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M04A10	$g_{Ga}$	P3	$2.36 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M04A10	$g_2$	P7	$1.29 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M04A10	$g_2$	P3	$2.57 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M05A10	$g_{Ga}$	P7	$0.84 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M05A10	$g_{Ga}$	P3	$1.63 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M05A10	$g_2$	P7	$0.88 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M05A10	$g_2$	P3	$1.75 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M06A10	$g_{Ga}$	P3	$1.03 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up
M06A10	$g_2$	P3	$1.11 \times 10^{-4}$	Blow up	Blow up

迎角を変化させた結果を Table 2 に、マッハ数を変化させた結果を Table 3 に示す。Table 2 と Table 3 では、移流項に分割型を用いたとき、無次元時間 50 以上安定的に計算を行える最大の時間幅を示している。また、表中の記号「✓」は、発散型を用いたとき無次元時間 50 以上安定的に計算できたことを表す。



(a) 8th-order computation (P7)



(a) 4th-order computation (P3)

Figure 2: Convergence histories for condition M05A10

Table 2 と Table 3 に示した結果を考察する。まず、分割型と発散型の違いに注目すると、分割型は全ケースについて無次元時間 50

以上計算が行えたのに対し、発散型は 2 ケースを除いて、時間幅を分割型の最大時間幅の半分の値にしても計算は不安定であることが分かる。

条件 M05A10 (マッハ数 0.5, 迎角 10 度) の収束履歴を Figure 2 に示す。計算は同じ時間幅 (分割型で安定的に計算が行える最大の時間幅) で行った。発散型は計算の初期の段階で発散しているのに対し、分割型は安定的に計算が行える。この要因としては、分割型が持つエイリアス誤差を減らす効果にあると考えている。このことから、分割型は発散型に対して、実用計算においても数値的安定性において優位であると考えられる。また、これらの結果は曲率を持った壁ありの実用的な計算においても、8 次精度 (P7) 計算が安定的に行えることを示している。

一方で修正関数の違いに注目すると、 $g_2$  関数は  $g_{Ga}$  関数よりも最大時間幅をより大きく取れることが分かる。この最大時間幅における  $g_2$  関数と  $g_{Ga}$  関数の違いはおそらく、関数の傾きの違いによるものと考えられる。修正関数は傾きが急だとより CFL 条件が小さくなること、また、Figure 1 のように  $g_{Ga}$  関数は  $g_2$  関数よりも傾きが急であることが知られている<sup>(1)</sup>。

### 3.2 円柱周り非粘性流計算

数値的安定性における分割型の発散型に対する優位性を、他の検証ケースにおいても確認するため、2 次元の円柱周りの非粘性流計算を行った。ここでも、移流項に分割型を用いた場合の数値的安定性を、通常の発散型を用いた場合と比較する。検証に用いた流れ条件は 1 通りのみで、マッハ数が 0.2 の非粘性流である。

計算を行うにあたり、時間進行法には 3 次 TVD Runge-Kutta 法、共通流束には SLAU flux, 粘性項には BR2 flux, メトリックには NC 型を用いた。solution point には Gauss-Lobatto 点, 修正関数には  $g_2$  関数を用いた。計算格子数は 900 である。境界条件として、円柱表面には slip 条件を課した。曲面を持った壁をより正確に再現するために、high-order mesh を用いた。ここでは、2 種類の high-order mesh を用いた。片方は 2 次の形状関数を用いる GP2 mesh, もう片方が 4 次の形状関数を用いる GP4 mesh である。

ここでも von Neumann 解析を用いることが出来ないため、次のような方法で数値的安定性を調べた。

1) 分割型を用いたとき、Courant 数 0.10 で無次元時間 450 以上安定的に計算を行えるか調べる。

2) 発散型を用いたときも、Courant 数 0.10 で無次元時間 450 以上安定的に計算を行えるか調べる。

3) もし 2) で計算が発散したときは、Courant 数を 2) の 10 分の 1 の値である 0.01 で、2) と同様に発散型で無次元時間 450 以上安定的に計算を行えるか調べる。

安定性解析の結果を Table 4 に示す。表中の記号「✓」は、無次元時間 450 以上安定的に計算できたことを表す。Table 4 にある結果を考察する。まず、分割型と発散型の違いに注目すると、分割型は安定的に無次元時間 450 以上計算が行えたのに対し、発散型は Courant 数を 10 分の 1 の値にしても計算は不安定であることがわかる。前項の NACA0012 翼周り層流の結果とあわせて、これらは、実用的な計算においても、移流項に分割型を用いると、通常の発散型を用いたときよりも数値的に安定であることを示唆する結果である。

また、GP2 mesh と GP4 mesh を用いたときの数値的安定性に違いは、この円柱周りの非粘性流計算からは確認されなかった。

Table 4: Numerical stability of split form and div. form

Polynomial of order	Type of mesh	Split form CFL = 0.10	Div. form	
			CFL = 0.10	CFL = 0.01
P1	GP2	✓	✓	✓
P1	GP4	✓	✓	✓
P2	GP2	✓	Blow up	Blow up
P2	GP4	✓	Blow up	Blow up
P3	GP2	✓	Blow up	Blow up
P3	GP4	✓	Blow up	Blow up
P5	GP2	✓	Blow up	Blow up
P5	GP4	✓	Blow up	Blow up
P7	GP2	✓	Blow up	Blow up
P7	GP4	✓	Blow up	Blow up

## 4. High-order mesh の効果

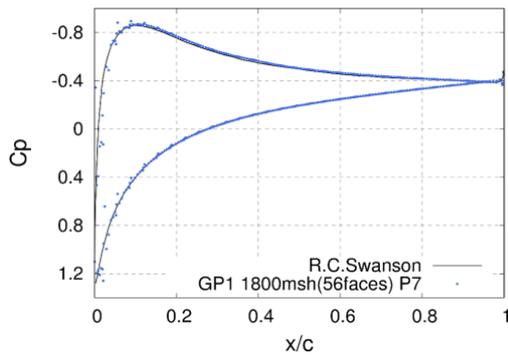
### 4.1 NACA0012 翼周り層流計算

2 次元の NACA0012 翼周りの定常層流計算を行った。ここでは、high-order mesh の効果を調べる。high-order mesh は曲面を持った壁を表現するのに有効であることが期待される。CFD 解析に通常用いられる linear mesh と、2 種類の high-order mesh をそれぞれ用い、NACA0012 翼周りの層流を 8 次精度 (P7) 計算で解き、表面圧力係数分布を比較することで、その効果を確認する。用いる 2 種類の high-order mesh は、片方が 2 次の形状関数を用いる GP2 mesh, もう片方が 4 次の形状関数を用いる GP4 mesh である。両者とも、計算格子数 1800 の C 型格子であり、翼の表面は 56 個の面で表現される。境界条件として、翼表面には no-slip 条件を課した。

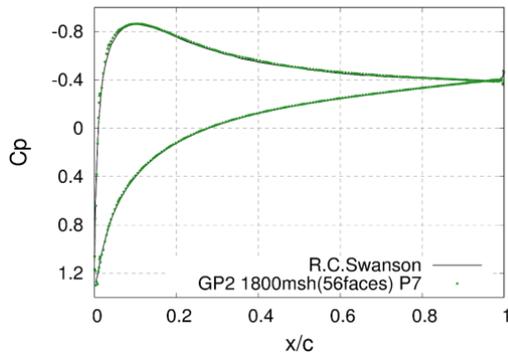
流れ条件であるが、マッハ数が 0.8, 迎角が 10 度, レイノルズ数が 500 である。計算を行うにあたり、時間進行法には TC-PGS 法<sup>(9)</sup>, 共通流束には SLAU flux, 粘性項には BR2 flux, メトリックには NC 型を用いた。移流項には発散型, solution point には Gauss 点, 修正関数には  $g_{Ga}$  関数を用いた。

Figure 3 は linear mesh, GP2 mesh, GP4 mesh をそれぞれ用いて得られた表面圧力分布を示している。比較するための参照値として、文献(10)から引用した結果を黒の実線で表している。

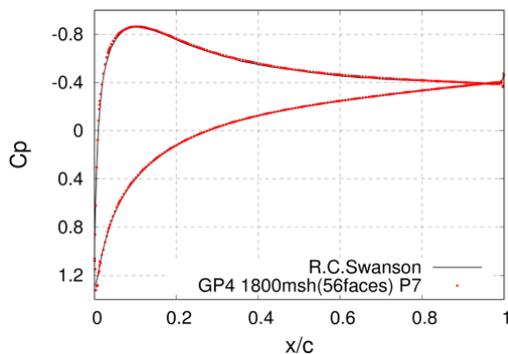
Figure 3 にある結果を考察する。Linear mesh の結果は前縁部分で不連続な分布を描いており、大きな曲率を持つ壁表面の圧力分布を正確に解くことが出来ていないことが分かる。一方、high-order mesh である GP2 mesh と GP4 mesh の結果は、連続的な分布を描いており、参照値とよく一致している。GP4 mesh は GP2 mesh と同じくらい正確に、曲率を持つ壁表面を表現する効果があることも示唆される。この結果から、格子数が少ないときの高精度計算において、high-order mesh は曲率を持った壁を表現するのに有効な方法であることが分かる。



(a)  $C_p$  distribution on linear mesh



(b)  $C_p$  distribution on GP2 mesh



(c)  $C_p$  distribution on GP4 mesh

Figure 3: Comparison of surface pressure coefficient distributions

#### 4.2 円柱周り非粘性流計算

3. 2節の2次元円柱周りの非粘性流計算について、ここでは high-order mesh が解の精度に与える影響を調べる。用いる high-order mesh は3種類あり、それぞれ2次の形状関数を用いる GP2 mesh, 3次の形状関数を用いる GP3 mesh, 4次の形状関数を用いる GP4 mesh である。この3種類の high-order mesh を精度の観点から比較する。移流項には分割型を用い、メトリックには NC 型または CSC 型を用いる。その他の境界条件、計算格子および計算手法は3. 2節と同じである。

Figure 4, Figure 5, Figure 6 にそれぞれ3次精度 (P2) 計算, 4次精度 (P3) 計算, 5次精度 (P4) 計算による結果を示す。いずれも密度の等高線図 (瞬時場) である。Figure 4 に示した3次精度 (P2) 計算の結果について考察する。GP2 mesh を用いた時は、NC 型、CSC 型ともに流れ場が対称的であり、精度良く再現できている。

一方で、GP3 mesh を用いた時は、特に NC 型を用いた場合に流れ場が非対称的であり、誤差が生じていることが予想される。GP4 mesh を用いた時は、NC 型、CSC 型ともに流れ場が非対称的であり、このときも誤差が生じていることが予想される。Figure 5 に示した4次精度 (P3) 計算の結果について考察する。GP2 mesh, GP3 mesh を用いた時は、NC 型、CSC 型ともに流れ場が対称的であり、精度良く再現できている。一方で、GP4 mesh を用いた時は、NC 型、CSC 型ともに流れ場が非対称的であり、誤差が生じている。

続けて、Figure 6 に示した5次精度 (P4) 計算の結果について考察する。5次精度計算は、GP2 mesh, GP3 mesh, GP4 mesh いずれを用いた場合も流れ場は対称的であり、精度良く解けていることが分かる。

これらをもとに、計算手法の多項式次数 P と High-order mesh の形状関数の次数 GP の関係について考察する。流れ場が対称的であったのは、3次精度 (P2) 計算では GP2 mesh を用いたときのみ、4次精度 (P3) 計算では GP2 mesh と GP3 mesh を用いたとき、5次精度 (P4) 計算では GP2 mesh と GP3 mesh, GP4 mesh を用いたときであった。また、これは NC 型を用いた場合と CSC 型を用いた場合の両方に共通して言える。

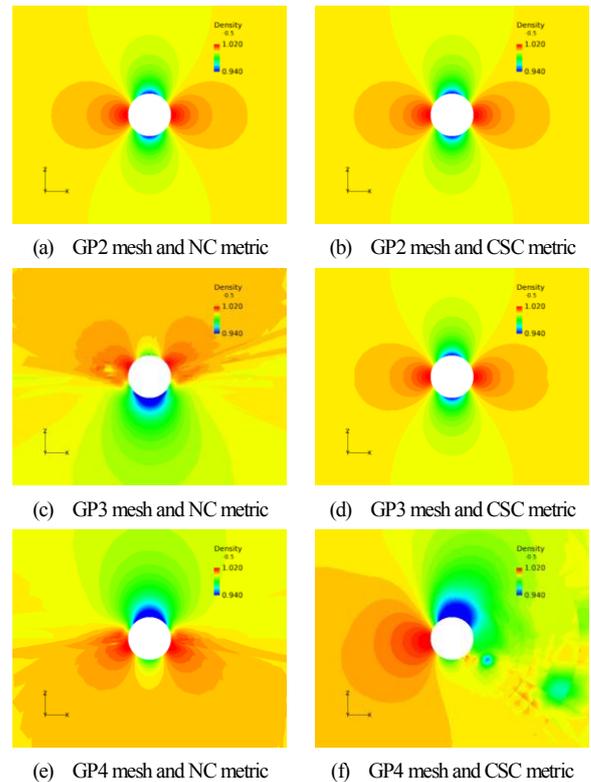


Figure 4: Instantaneous Contours of density on 3rd-order (P2) computation

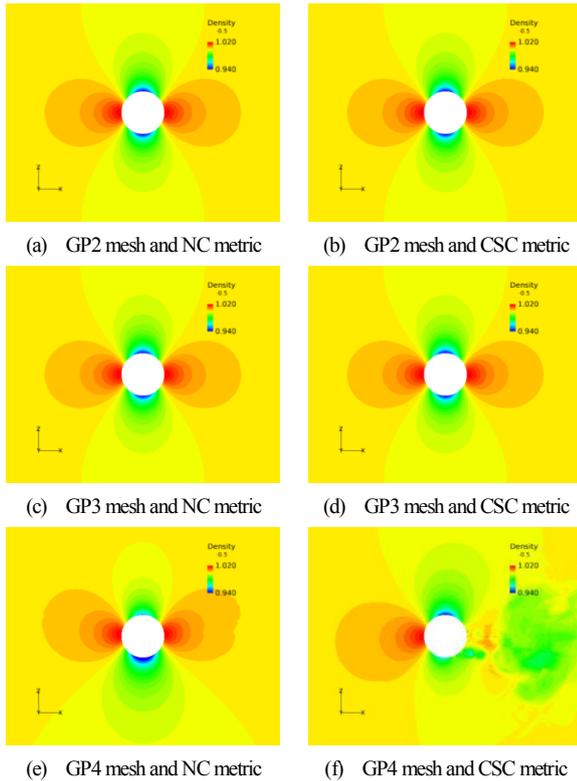


Figure 5: Instantaneous Contours of density on 4th-order (P3) computation

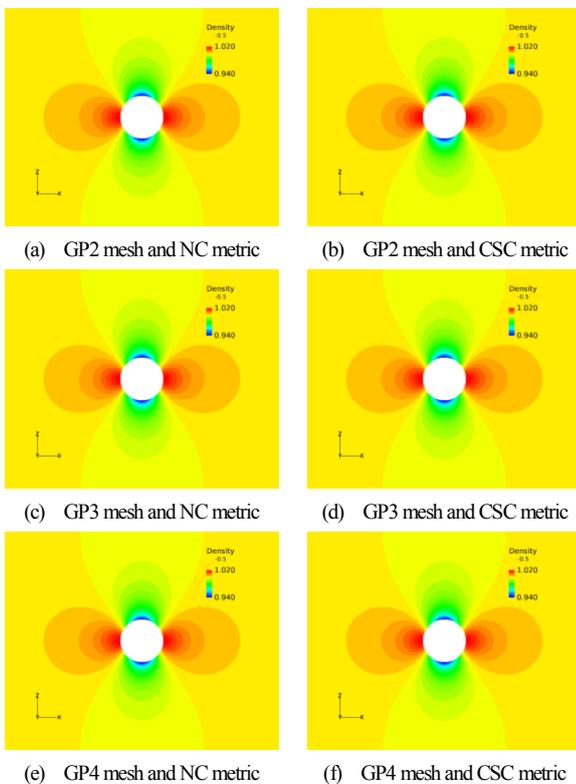


Figure 6: Instantaneous Contours of density on 5th-order (P4) computation

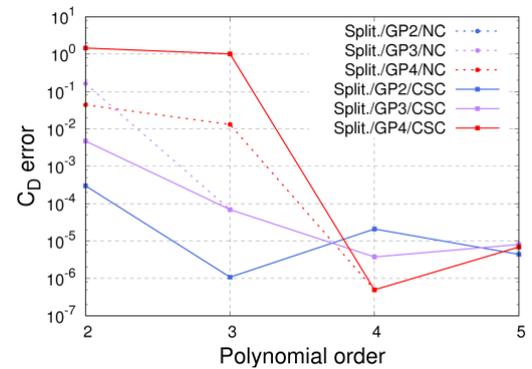


Figure 7: Comparison of error of drag coefficient

このことから、NC 型を用いる場合も、CSC 型を用いる場合も、計算手法の多項式次数  $P$  が High-order mesh の形状関数の次数  $GP$  以上である、つまり  $P \geq GP$  の関係を満たすときは、精度良い解を得られることが、この計算結果から考察される。加えて、 $P \geq GP$  の関係を満たさないときは誤差の大きい解を得ることも考察される。

Figure 7 には参考として、準定常状態において時間平均化することで得られた抗力係数の誤差を示す。非粘性計算であることから、抗力係数の真値は 0 として算出した。

#### 4. 3 bump 有り非粘性 channel 流計算

計算手法の多項式次数  $P$  と high-order mesh の形状関数の次数  $GP$  の関係を、他の検証ケースでも考察するために、2次元の bump 有り非粘性 channel 流計算を行った。用いる high-order mesh は前項の円柱周り非粘性流計算と同様の 3 種類 (GP2 mesh と GP3 mesh, GP4 mesh) である。メトリックも前項と同様の 2 種類 (NC 型と CSC 型) を用いた。

検証に用いた流れ条件は 1 通りのみで、マッハ数が 0.5、迎角 0 度の非粘性流である。計算格子数は 48 である。境界条件として、壁表面には slip 条件を課した。bump は式(26)で定義し、計算領域は  $-1.5 \leq x \leq 1.5$ ,  $Bump(x) \leq y \leq 0.8$  である。

$$Bump(x) = 0.0625e^{-25x^2} \quad (26)$$

計算条件の設定は、前項で用いた計算手法と同様である。

Figure 8, Figure 9 にそれぞれ 3 次精度 (P2) 計算, 6 次精度 (P5) 計算による結果を示す。いずれも密度の等高線図 (瞬時場) である。Figure 10 には、準定常状態において時間平均化することで得られたエントロピーの誤差を示す。非粘性 (等エントロピー) であることを利用し、式(27)により算出した。

$$Error(s) = \sqrt{\frac{\int \left( \frac{p}{p_\infty} \left( \frac{\rho_\infty}{\rho} \right)^\gamma - 1 \right)^2 dV}{V}} \quad (27)$$

ここで、 $Error(s)$  はエントロピー誤差、 $p$  は圧力、 $\rho$  は密度、 $V$  は体積、 $\gamma$  は比熱比、添え字  $\infty$  は無限遠を表す。

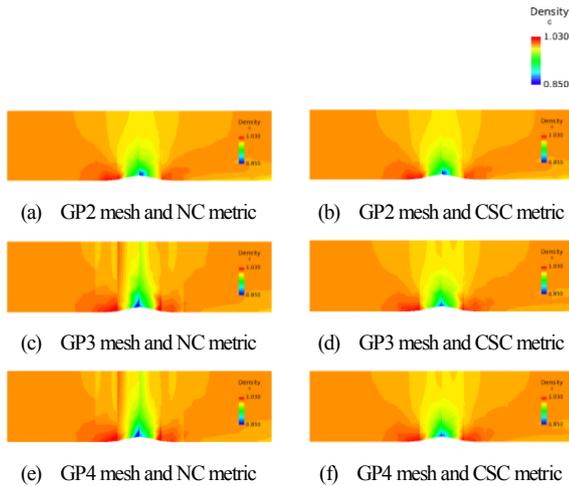


Figure 8: Contours of density on 3rd-order (P2) computation

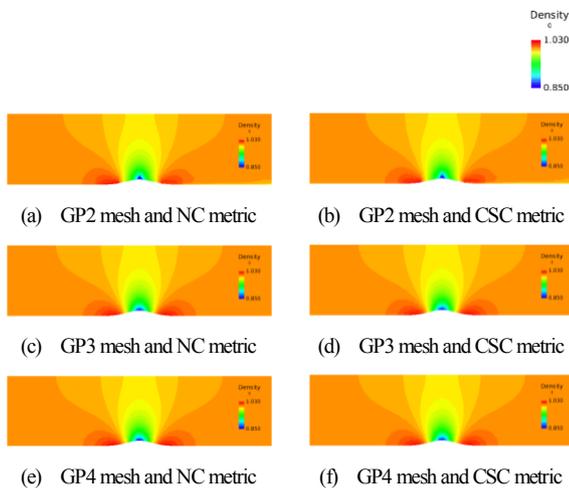


Figure 9: Contours of density on 6th-order (P5) computation

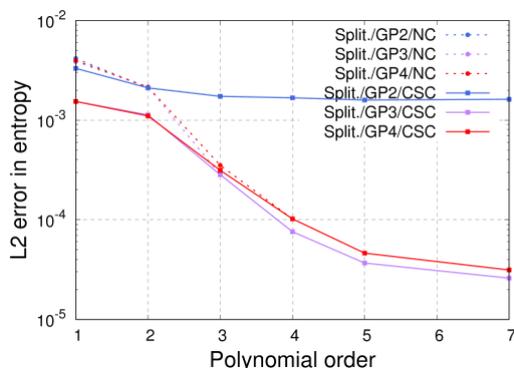


Figure 10: Comparison of error of entropy

前項で考えた  $P \geq GP$  の関係に注目して、計算結果を考察する。まず、Figure 8 に示す 3 次精度 (P2) 計算の結果に着目する。

$P \geq GP$  の関係を満たす GP2 mesh を用いた場合と、 $P \geq GP$  の関係

を満たさない GP3 mesh, GP4 mesh を用いた場合を比較すると、前者は連続的な解が得られているのに対して、後者は不連続的な解が得られた。特に NC 型を用いたときは、流れ場はより不連続的である。 $P \geq GP$  の関係を満たす前者も誤差があるような流れ場であるが、これは総自由度数が 432 (格子数 48, 1 個の格子に含む solution point の数 9) と少なく、非常に粗いためであると考えている。

次に、Figure 9 に示す 6 次精度 (P5) 計算の結果に着目する。6 次精度 (P5) 計算では、どの high-order mesh も  $P \geq GP$  の関係を満たす。流れ場はいずれも連続的であり、対称的である。

よって、この Bump 有り非粘性 channel 流計算においても、 $P \geq GP$  の関係を満たすときは解を精度良く計算でき、一方で  $P < GP$  の関係を満たさないときは誤差の大きい解を得ることを、示唆する結果が得られた。

また、Figure 10 も考慮して、3 種類の high-order mesh の効果を比較する。GP2 を用いた場合に注目すると、GP3 や GP4 を用いた場合に比較して、エントロピー誤差は大きい。Figure 9 に示した 6 次精度 (P5) 計算の流れ場を見ると、GP2 mesh を用いたときに、wake 側に非物理的な剥離が生じていることが確認できる。この非物理的な剥離がエントロピー誤差の大きい原因と考えられる。

ところで、GP3 mesh を用いた場合と GP4 mesh を用いた場合とでは、誤差の大きさに違いが見られない。GP4 mesh を用いたときは GP3 mesh を用いたときよりも誤差が小さくなると期待していたが、そうではない計算結果が得られた。この事象については、マトリクスの値などを確認することで、今後原因を探りたいと考えている。

## 5. まとめ

本研究では流束再構築法を用いて NACA0012 翼周り層流計算や円柱周り非粘性流計算などの曲面をもつ壁ありの実用的な計算に取り組んだ。検証計算により分かったことは以下の通りである。

- (1) 発散型を用いると数値的に不安定である計算条件でも、分割型を用いれば安定的に解くことが可能であり、分割型は発散型に比較して、より数値的に安定な計算を行えること。
- (2) high-order mesh を用いれば、今回検証を行った 8 次精度までの超高次精度計算においても、曲率の大きな曲面を持つ壁表面の圧力分布を正確に表現できること。ただし、 $P \geq GP$  の関係を満たさないときは誤差の大きい解を得る。

## 参考文献

- (1) H.T. Huynh. A flux reconstruction approach to high-order schemes including discontinuous Galerkin methods. AIAA 2007-4079, 2007.
- (2) Youhei Morinishi “Skew-symmetric form of convective terms and fully conservative finite difference schemes for variable density low-Mach number flows” Journal of Computational Physics, 229:276-300, 2015
- (3) G.J. Gassner. A kinetic energy preserving nodal discontinuous Galerkin spectral element method. Int. J. Numer. Methods Fluids, 76, 28–50, 2014.
- (4) Y. Abe, I. Morinaka, T. Haga, T. Nonomura, H. Shibata and K. Miyaji. Stable, non-dissipative, and conservative flux-reconstruction schemes in split forms. J. Comput. Phys. 353, 193-227, 2018.
- (5) W.J. Feiereisen, W.C. Reynolds and J.H. Ferziger. Numerical simulation of a compressible homogeneous, turbulent shear flow. Technical report, Report TF-13, Standard University, No.9, 1981.
- (6) Y. Abe, T. Haga, T. Nonomura and K. Fujii. On the freestream preservation of high-order conservative flux-reconstruction schemes.

- J. Comput. Phys. 281, 28-54, 2015
- (7) E. Shima and K. Kitamura. On New Simple Low-Dissipation Scheme of AUSM-Family for All Speeds, AIAA Paper 2009-136, 2009.
  - (8) F. Bassi and S. Rebay. Numerical evaluation of two discontinuous Galerkin methods for the compressible Navier-Stokes equations. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 197-207, 2002.
  - (9) 芳賀臣紀, 嶋英志, Matrix-free defect correction を用いた陰的・高次精度 FR ソルバーの構築, 第 29 回数值流体力学シンポジウム B05-3, 2015.
  - (10) R. Swanson and S. Langer. Comparison of NACA 0012 Laminar Flow Solutions: Structured and Unstructured Grid Methods. NASA/TM-2016-219003, 2016