

BVD 原理に基づいた高精度衝撃波捕獲スキームの開発

Development of high order shock capturing scheme based on BVD principle

○ 清水友哉, 東京工業大学, 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail : shimizu.y.ar@m.titech.ac.jp

Deng Xi, Aix Marseille University, E-mail : deng.xi98@gmail.com

肖 鋒, 東京工業大学, 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail : xiao@es.titech.ac.jp

Yuya Shimizu, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8550

Xi Deng, Aix Marseille University, CNRS, Centrale Marseille, M2P2, Marseille, France

Feng Xiao, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8550

We present a high order shock-capturing scheme based on BVD (Boundary Variation Diminishing) principle. The scheme uses the linear-weight high-order polynomials and THINC (Tangent of hyperbola for interface capturing) functions with different steepness level as the candidates for spatial reconstruction. A multi-stage (cascade) BVD algorithm has been devised to suppress both oscillation and dissipation errors in numerical solution. The scheme has been verified by Fourier analysis and benchmark tests in comparison with the WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) scheme, which shows that the present scheme is able to retrieve the highest possible accuracy of the upwind schemes that use linear-weight high-order polynomials, and effectively remove the spurious oscillations around discontinuous solutions.

1. 緒言

圧縮性流体では、衝撃波や接触不連続のような不連続分布と膨張波や渦のような滑らかな分布が混在し、これらを同時に取り扱わなくてはならない。有限体積法では、一般的にそれらの分布を関数によって再構築し、数値流束を求める。滑らかな分布に対しては、再構築関数にテイラー展開に基づいた高次多項式関数を用いて計算することにより高精度に解を求めることができる。しかし、不連続面を高次多項式関数を用いたスキームで計算を行うと数値振動が発生し、正確な解を得ることができない。よって、高精度スキームを用いて不連続分布を計算する際は工夫が必要であり、様々な研究がなされている。

広く用いられている例として、不連続部分による数値振動を流束制限関数の導入により抑える Total Variation Diminishing (TVD) スキーム⁽¹⁾がある。さらに高精度な手法として Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) スキーム^{(2),(3)}が挙げられる。この手法は非線形重み関数を用いて変動の少ないステンシルに対し重みを大きくし、滑らかなステンシルを選んで用いることで数値振動を抑えている。また、複数のスキームから数値散逸の少ないスキームを選んで用いる Boundary Variation Diminishing (BVD) スキーム^{(4),(5)}がある。この手法では従来のスキームに比べ、不連続面を明確に捉えることができおり、圧縮性流体の計算に有効である。しかし、BVD スキームでは既存スキームの組み合わせで計算するため、精度は使用するスキームが持つ精度に依存する。乱流のようなマルチスケールを有する流れなどの計算を考慮すると、スキームの高精度化は必須であり、かつ簡潔に行えることが望ましい。よって、本研究では、線形係数多項式関数と THINC 関数を用いて、高精度衝撃波捕獲スキームの開発を研究目的とする。

2. 計算手法

2.1 BVD 原理

本研究で用いる BVD スキームの概念について述べる。近似リーマン解法によって計算される数値流束は次式のようになる。

$$f^{\text{Riemann}} = \frac{1}{2} ((f^L + f^R) + |\alpha|(q^L - q^R)) \quad (1)$$

ここで q はセル境界における物理量の大きさを表し、上付き文字の L 及び R はそれぞれ左側と右側のセル境界値

であることを表している。また、 α は特性速度、 f は流束関数を表している。式 (1) からわかる様にこの式は中心差分に対して人工粘性を付加していると解釈することができる。よって、人工粘性にあたる右辺第二項の値を小さくすることにより、散逸を小さくできると考えられる。BVD スキームでは、この右辺第二項であるセル境界における物理量の差 (BV:Boundary Variation) を小さくするようにスキームを構築する。本研究では、複数の既存スキームを用いて計算領域を再構築し、セル境界における BV が小さくなるようにスキームを採用した。使用したスキームは線形係数多項式に基づく Upwind (Upwind-biased) スキーム^{(6),(7)} (以下 UW スキーム) 及び Tangent of hyperbola for interface capturing (THINC) スキーム⁽⁸⁾ である。以下に各スキームについて述べる。

2.2 UW スキーム

UW スキームは求めたいセル境界値の風上側の情報を用いて再構築関数を決定するスキームであり、ここでは再構築関数に線形係数を持つ多項式関数を用いたものをさす。 n 次近似多項式は以下ようになる。

$$\tilde{q}^U(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \quad (2)$$

$n = 4$ の時、この関数は 4 次多項式関数となり、隣接する 5 つのセル平均値を用いて再構築関数を求める。

有限体積法ではセル平均値を用いるため、再構築関数 $\tilde{q}^U(x)$ の積分を行い、セル平均値 $\bar{q}(x)$ との関係式を求める。

$$\bar{q}(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \tilde{q}^U(x) dx \quad (3)$$

上式に (2) を代入し、計算するとセル平均値と各係数の関係式が得られる。そしてその関係式に $x = x_i + 2\Delta x, x_i + \Delta x, x_i, x_i - \Delta x, x_i - 2\Delta x$ をそれぞれ代入し、それらの式を連立させて係数を求める。その際、それぞれのセル平均値を $\bar{q}_{i-2}, \bar{q}_{i-1}, \bar{q}_i, \bar{q}_{i+1}, \bar{q}_{i+2}$ と表し、 $x_i = 0$ とすると、セル境界 ($i + 1/2$) における値は次式のようになる。

$$\tilde{q}_i^U(x_{i+1/2}) = \frac{1}{60} (2\bar{q}_{i-2} - 13\bar{q}_{i-1} + 47\bar{q}_i + 27\bar{q}_{i+1} - 3\bar{q}_{i+2}) \quad (4)$$

多項式関数を高次数にする場合 ($n = 6, 8, 10, \dots$) も同様の手順で算出することができる。

2.3 THINC スキーム

THINC スキームはシグモイド関数を用いて再構築を行う手法である。シグモイド関数を用いて再構築することにより、再構築された分布の最大値及び最小値は隣接するセルの値となるため、数値振動を発生させにくく、安定して計算を行うことができる。\$i\$ 番目のセルにおける THINC スキームの再構築関数は次式のように表される。

$$\tilde{q}_i^T(x_i) = \bar{q}_{\min} + \frac{\bar{q}_{\max} - \bar{q}_{\min}}{2} (1 + \theta \tanh(\beta(X_i - d_i))) \quad (5)$$

ここで、

$$\bar{q}_{\min} = \min(\bar{q}_{i-1}, \bar{q}_{i+1}) \quad (6)$$

$$\bar{q}_{\max} = \max(\bar{q}_{i-1}, \bar{q}_{i+1}) - \bar{q}_{\min} \quad (7)$$

$$\theta = \text{sgn}(\bar{q}_{i+1} - \bar{q}_{i-1}) \quad (8)$$

$$X_i = \frac{x_i - x_{i-1/2}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \quad (9)$$

\$\beta\$ は再構築関数の界面幅を調節するパラメータであり、この値に応じてスキームの特性が変化する。文献 (5) より、\$\beta = 1.1\$ の時にこのスキームは TVD スキームと同程度の特性を示し、散逸は大きい安定して計算を行うことができる。また、\$\beta\$ の値を大きくすることで低波数領域で振幅を増大させる（分布を変形させてしまう）が、不連続面を明確に捉えることができる。よって、不連続面を捉えるときは大きい \$\beta\$ を使用し、安定して計算を行いたいときは小さい \$\beta\$ を用いるなど、分布に応じて \$\beta\$ の値を切り替えることで計算を行うことができる。

また、\$d_i\$ はジャンプの中心座標を示しており、この値は次式で表される物理量のセル平均値を用いることで計算することができる。

$$\bar{q}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{q}_i^T(x) dx \quad (10)$$

2.4 再構築関数の決定方法

2.1 で述べた様に BVD スキームでは左右のセル境界値の差が小さくなるようにスキームを選択する。本研究では文献 (5) と同様にセル境界値の差の和 (TBV: Total Boundary Variation) 比較することでスキームの選択を行った。従来の研究では WENO スキームなどの数値振動が発生しにくいスキームと THINC スキームとの組み合わせで計算を行い、衝撃波捕獲（不連続面の捕捉）のために BVD 原理を用いていた。しかし、本研究で用いる UW スキームをそのまま用いると不連続近傍で数値振動が生じてしまう問題が生じた。よって、今回提案するスキームでは数値振動を抑えるプロセスを加え、衝撃波捕獲を行うプロセスとの 2 段階の手順を踏むことによって、再構築関数を決定した。

まず安定して計算を行うことができる \$\beta = 1.1\$ に設定した THINC(small) 関数と多項式関数の TBV を比較する。滑らかな分布の場合、多項式関数の方が散逸が小さくなるため、TBV の値は小さい値になる。THINC(small) 関数の方が多項式関数より TBV が小さくなった場合、それは滑らかな分布ではなく、数値振動が発生していると考えられる。従って、その場合 THINC(small) 関数を用いてそのセルとその周辺のセルを再構築し、数値振動を抑える。その後、\$\beta\$ の値が大きい THINC(large) 関数と 1 段階目で選ばれた再構築関数の TBV を比較し、衝撃波捕獲を行う。これらの手順を以下に示す。また、このプロセスによってできるスキームを P4-THINC-BVD(4th degree polynomial and THINC reconstruction based on BVD algorithm) スキームと呼ぶものとする。

- (1) 前の時間ステップにおける物理量から、\$\beta = 1.1\$ の THINC(small) 関数及び多項式関数で再構築を行う。

- (2) 各関数で \$i\$ 番目のセルにおいて以下に示す TBV を求める。ここで上付き文字はそれぞれ Ts : THINC(small), U : UW, Tl : THINC(large), I : 1 段階目で選択されたスキームをさす。

$$\text{TBV}_i^U = |\tilde{q}_{i-1}^U(x_{i-1/2}) - \tilde{q}_i^U(x_{i-1/2})| + |\tilde{q}_i^U(x_{i+1/2}) - \tilde{q}_{i+1}^U(x_{i+1/2})| \quad (11)$$

$$\text{TBV}_i^{Ts} = |\tilde{q}_{i-1}^{Ts}(x_{i-1/2}) - \tilde{q}_i^{Ts}(x_{i-1/2})| + |\tilde{q}_i^{Ts}(x_{i+1/2}) - \tilde{q}_{i+1}^{Ts}(x_{i+1/2})| \quad (12)$$

- (3) 求めた TBV の値が小さい方を 1 段階目の再構築関数とする。

$$\tilde{q}_i^I = \begin{cases} \tilde{q}_i^{Ts} & \text{if } \text{TBV}_i^{Ts} < \text{TBV}_i^U \\ \tilde{q}_i^U & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

この時、THINC(small) 関数が採用された場合、周辺のセルも THINC(small) 関数とする。

$$\tilde{q}_j^I = \tilde{q}_j^{Ts} \quad j = i-1, i, i+1 \quad (14)$$

- (4) 1 段階目で決定した再構築関数と \$\beta\$ の値が大きい THINC(large) 関数で再度 TBV を求める。

$$\text{TBV}_i^I = |\tilde{q}_{i-1}^I(x_{i-1/2}) - \tilde{q}_i^I(x_{i-1/2})| + |\tilde{q}_i^I(x_{i+1/2}) - \tilde{q}_{i+1}^I(x_{i+1/2})| \quad (15)$$

$$\text{TBV}_i^{Tl} = |\tilde{q}_{i-1}^{Tl}(x_{i-1/2}) - \tilde{q}_i^{Tl}(x_{i-1/2})| + |\tilde{q}_i^{Tl}(x_{i+1/2}) - \tilde{q}_{i+1}^{Tl}(x_{i+1/2})| \quad (16)$$

- (5) 求めた TBV の値が小さい方を再構築関数とする。

$$\tilde{q}_i = \begin{cases} \tilde{q}_i^{Tl} & \text{if } \text{TBV}_i^{Tl} < \text{TBV}_i^I \\ \tilde{q}_i^I & \text{otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

3. 各スキームにおける特性解析

提案手法の分散及び散逸特性を調べるために、フーリエ解析を行った。各特性は Pirozzoli が提案した ADR(Approximate Dispersion Relation)⁽⁹⁾ を用いて算出した。この手法は特定の波数における正弦波の移流計算を行い、その結果から各波数における特性を調べる方法であり、理論的に算出することが難しい非線形スキームの特性解析に用いられている^{(10),(11)}。また、正弦波の移流計算から求めるため、この結果は滑らかな分布における各特性を示している。Fig.1 に分散特性、Fig.2 に散逸特性を示す。図の横軸はそれぞれ波数に格子間隔を掛けることで無次元化した波数 \$\phi\$ を表し、縦軸は modified wavenumber \$\Phi(\phi)\$ の実部及び虚部を示している。

Fig.1,2 より P4-THINC-BVD スキームは線形スキームとほぼ同様の特性を示し、既存スキームに比べ分散、散逸特性が共に優れていることがわかる。しかし、高波数成分においてわずかに線形スキームとの差異が生じた。これは高波数成分を不連続分布と判断し、THINC スキームを選択したためと考えられる。これらの結果から、P4-THINC-BVD スキームは、低波数の滑らかな分布に対し、多項式関数を用いて再構築を行うと考えられる。

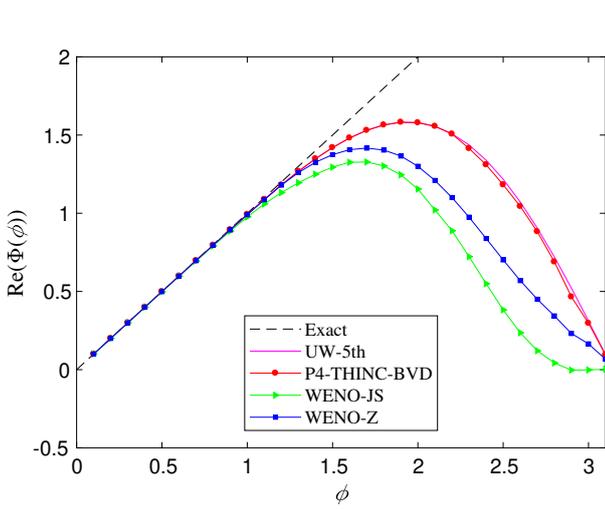


Fig. 1: Dispersion properties.

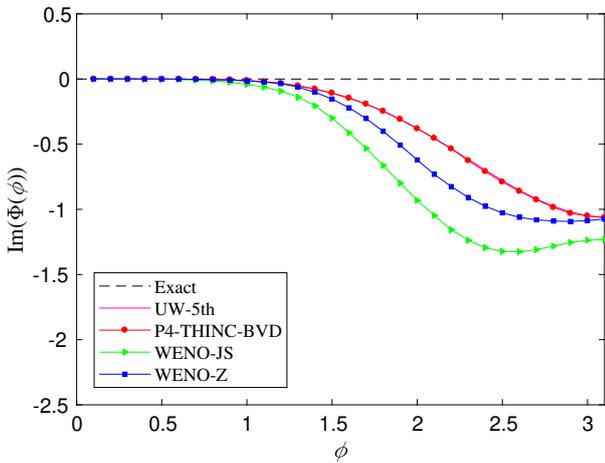


Fig. 2: Dissipation properties.

4. 計算結果

4.1 各スキームにおける精度検証

2次元の Euler 方程式における数値計算を行い、その精度を検証した。Huら⁽¹²⁾が行ったテストを参考に初期値は以下のように与えた。

$$(\rho_0, u_0, v_0, p_0) = (1.0 + 0.5 \sin(2\pi(x+y)), 1.0, 1.0, 1.0) \quad (18)$$

計算領域は x, y 方向ともに $[-1.0, 1.0]$ とし、境界条件は各方向において周期境界条件を課した。この分布が初期位置に戻る時間 ($t = 2.0$) まで計算を行い、初期値と比較した。CFL は 0.4, リーマンソルバーは HLLC リーマンソルバー⁽¹³⁾, 時間積分法は 5 段 4 次ルンゲクッタ法⁽¹⁴⁾を用いた。計算結果を Tab.1 に示す。

Tab.1 から P4-THINC-BVD スキームが UW スキームと同じ値のエラーとなり、5th オーダーの収束率となっていることがわかる。このことから滑らかな分布に対して BVD スキームは多項式関数を選択することが確認できる。

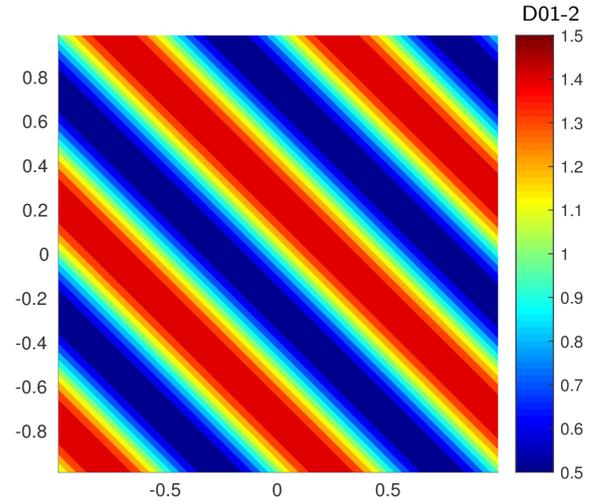


Fig. 3: Initial profile of the accuracy verification.

Tab. 1: Numerical errors and convergence rates.

Scheme	Mesh	L_1 error	Order
P4-THINC-BVD	10×10	1.292×10^{-1}	-
	20×20	1.077×10^{-2}	3.59
	40×40	3.917×10^{-4}	4.78
	80×80	1.267×10^{-5}	4.95
UW (5th order)	10×10	1.292×10^{-1}	-
	20×20	1.077×10^{-2}	3.59
	80×80	1.267×10^{-5}	4.95
WENO-Z	10×10	1.385×10^{-1}	-
	20×20	1.325×10^{-2}	3.39
	40×40	4.223×10^{-4}	4.97
	80×80	1.271×10^{-5}	5.05

4.2 Double Mach Reflection

Double Mach Reflection は、計算領域の左側から水平方向に 60° 傾いた衝撃波を計算領域の右下方にある固体壁に衝突させる圧縮性流体の解析によく用いられるベンチマークテストの一つである。文献 (15) を参考に 2 次元の Euler 方程式に対して以下のような初期条件を与えた。

- ・ 衝撃波前

$$(\rho_0, u_0, v_0, p_0) = (8.0, 8.25 \cos(\pi/6), -8.25 \sin(\pi/6), 116.5) \quad (19)$$

- ・ 衝撃波後

$$(\rho_0, u_0, v_0, p_0) = (1.4, 0.0, 0.0, 1.0) \quad (20)$$

計算領域は $[0.0, 3.2] \times [0.0, 1.0]$ とし、格子数はそれぞれ 800 及び 250 とした。CFL は 0.2 とし、HLLC リーマンソルバー, 5 段 4 次ルンゲクッタ法を用いて、 $t = 0.2$ まで計算を行った。

Fig.4,5 にそれぞれ WENOZ スキームと P4-THINC-BVD スキームの $t = 0.2$ における結果を示す。 $2.2 < x < 2.8$ に着目すると、KHI(Kelvin-Helmholz Instability) による渦構造に違いが生じ、P4-THINC-BVD スキームの方が明確に表れている。これは不連続面における数値散逸が小さく、より高波数成分まで計算ができたためと考えられる。

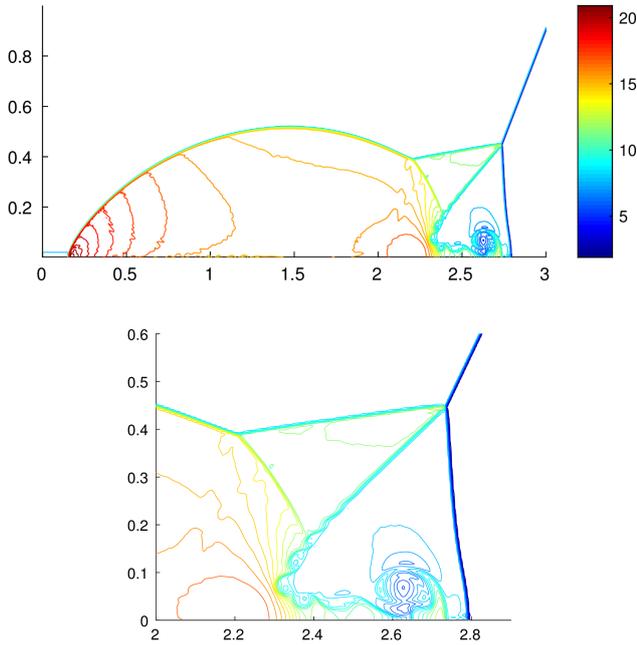


Fig. 4: Density of Double Mach Reflection computed by WENOZ scheme.

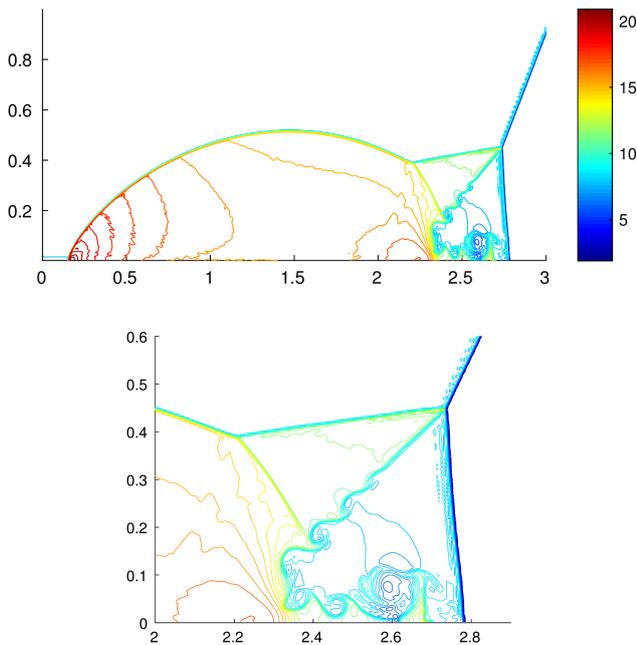


Fig. 5: Density of Double Mach Reflection computed by P4-THINC-BVD scheme.

5. 多項式関数の高次数化

UW スキームで用いる多項式関数の次数を大きくすることによって、高精度化を行った。精度向上に伴い、数値散逸が小さくなるため TBV は小さくなる。それにより、UW スキームが採用されやすくなり、数値振動が生じてしまう問題が発生した。そのため、数値振動を抑えるプロセスをもう 1 段階加え、3 段階のプロセスによって関数を決定した。 $\beta = 1.1$ よりも散逸が小さい $\beta = 1.2$ もしくは $\beta = 1.4$ の THINC(middle) 関数と多項式による比較を 1 段階目で行う。そして、2 段階目で $\beta = 1.1$ の THINC(small) 関数と 1 段階目に採用された関数との比較を行い、最後に $\beta = 1.8$ の THINC(large) 関数との比較を行い、衝撃波捕獲を行う。また、このスキームを多項式の次数 n に合わせて Pn-THINC-BVD スキームと呼ぶものとし、今回は $n = 8, 14$ における結果を示す。

6. Pn-THINC-BVD における特性解析

前述 3. と同様に特性解析を行い、それぞれのスキームにおける分散及び散逸特性を求めた。それぞれの結果を Fig.5,6 に示す。また比較のため、P4-THINC-BVD スキームの結果も示した。

Fig.6.7 より多項式の次数を大きくすることで、分散及び散逸特性が改善されており、高波数成分においても少ない数値散逸で計算できることが期待できる。

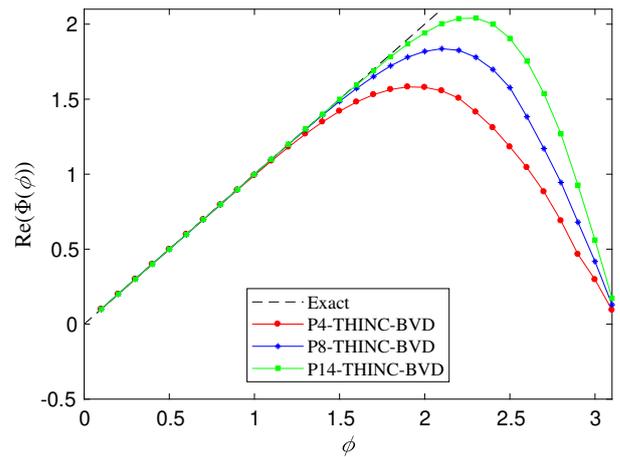


Fig. 6: Dispersion properties of high order schemes.

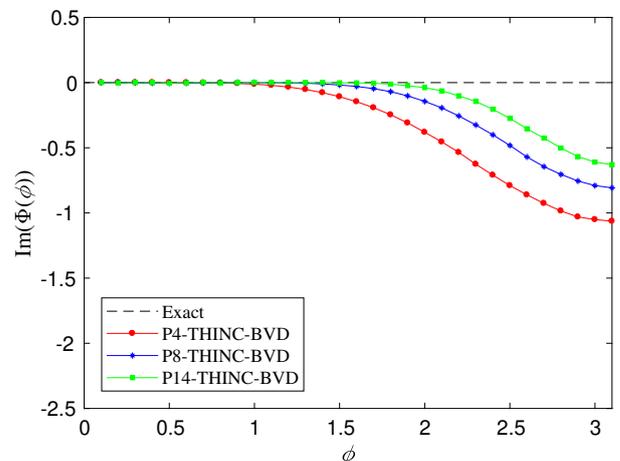


Fig. 7: Dissipation properties of high order schemes.

7. 計算結果

7.1 Pn-THINC-BVD における精度検証

4.1 と同様に 2 次元の Euler 方程式における数値計算を行い、その精度を検証した。ほとんどの計算条件は 4.1 と同様であるが、時間積分法は m 段 $m-1$ 次ルンゲクッタ法⁽¹⁴⁾ を用いて行った (m はそれぞれ P8-THINC-BVD : $m = 9$, P14-THINC-BVD : $m = 15$ とした)。それぞれの結果を Tab.2 に示す。

Tab.2 により、それぞれ 9th 及び 15th オーダーの収束率になっていることが確認できる。よって、多項式関数の次数を高めても、本スキームは滑らかな分布に対しては多項式関数を用いて再構築を行うことがわかる。

Tab. 2: Numerical errors and convergence rates for high order schemes.

Scheme	Mesh	L_1 error	Order
P8-THINC-BVD	10×10	1.702×10^{-2}	-
	20×20	7.627×10^{-5}	7.80
	40×40	1.783×10^{-7}	8.74
	80×80	3.642×10^{-10}	8.94
P14-THINC-BVD	5×5	4.577×10^{-2}	-
	10×10	5.725×10^{-4}	6.32
	20×20	5.219×10^{-8}	13.42
	40×40	2.050×10^{-12}	14.64

7.2 Shock-Turbulence Problem

高精度スキームにおいて Shock-Turbulence Problem の計算を行った。これは衝撃波と乱流の相互作用を表す簡単なモデルの一つであり、不連続分布と複雑な分布が混在するテストである。そのため、スキームの数値振動及び数値散逸を確認することができる。文献 (16) を参考に 2 次元の Euler 方程式に対して以下のような初期値を与えた。

$$(\rho_0, u_0, v_0, p_0) = \begin{cases} (3.85714, 2.62936, 0, 10.33333) & x \leq -4.0 \\ (1 + 0.2 \sin(10x \cos \theta + 10y \sin \theta), 0, 0, 1) & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (21)$$

ここで $\theta = \pi/6$ 、計算領域は $[-5.0, 5.0] \times [-1.0, 1.0]$ とし、格子数はそれぞれの方向に対し 251 及び 51 とした。CFL は 0.2 とし、リーマンソルバーは HLLC リーマンソルバー、時間積分法は m 段 $m-1$ 次ルンゲクッタ法を用いて、 $t = 1.8$ まで計算を行った。Fig.8,9 に計算結果を示す。ここでも比較のため、P4-THINC-BVD スキームの結果も示す。

図から、不連続部分が存在していても計算が安定してきている。また、多項式関数が高次数になるにつれて reference への追随性が良くなっていることがわかる。よって、高次数多項式関数を用いた高精度化を行うことにより、より数値散逸を抑えたスキームになることが確認できる。

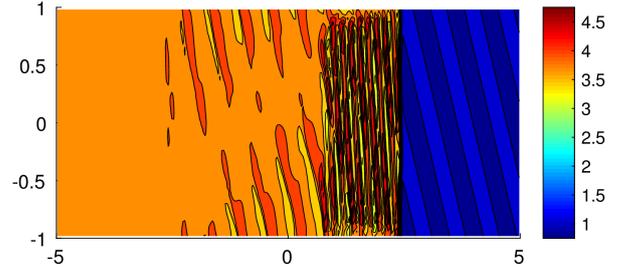


Fig. 8: Density of 2D shock-turbulence problem computed by P14-THINC BVD.

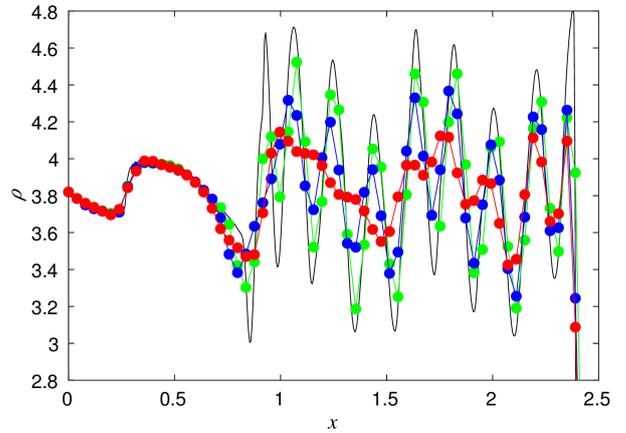
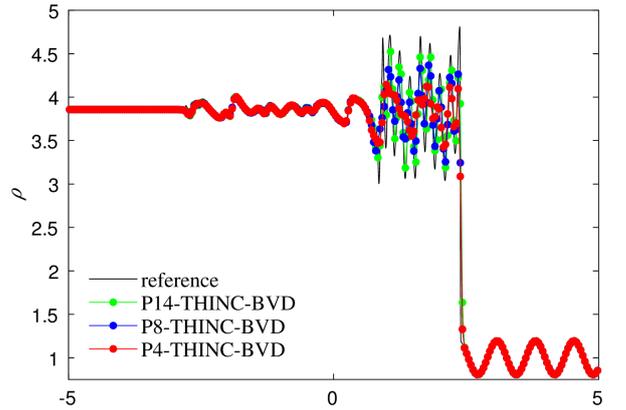


Fig. 9: Density profile along $y = 0.0$ cross section. (top:the whole region, bottom:the enlarged region)

8. 結言

BVD 原理に基づき、高精度衝撃波捕獲スキームの開発を行った。本スキームでは、滑らかな分布には線形係数多項式関数を用いることで、従来のスキームより数値散逸を抑えることができた。さらに、このスキームの考えを発展させ、より高次数の多項式関数を再構築関数に用いることで、より高精度な結果を得ることができた。しかし、現状ではオイラー方程式での計算結果のみであり、実問題への適応ができていない。よって、今後は粘性等を考慮した計算を行い、圧縮性乱流などの問題における数値解析での本スキームの有用性を示す必要がある。

参考文献

- (1) A. Harten, “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws”, *J. Comput. Phys.*, 49, (1983), pp. 357-393.
- (2) G. Jiang, C. W. Shu, “Efficient implementation of weighted ENO schemes”, *J. Comput. Phys.*, 126, (1996), pp. 202-228.
- (3) R. Borges, M. Carmona, B. Costa, W. S. Don, “An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws”, *J. Comput. Phys.*, 227, (2008), pp. 3191-3211.
- (4) Z. Sun, S. Inaba, F. Xiao, “Boundary Variation Diminishing (BVD) reconstruction : A new approach to improve Godunov schemes”, *J. Comput. Phys.*, 322, (2016), pp. 309-325.
- (5) Xi Deng, Bin Xie, Raphaël Loubère, Yuya Shimizu, Feng Xiao, “Limiter-free discontinuity-capturing scheme for compressible gas dynamics with reactive fronts”, *Computers and Fluids*, 171, (2018), pp. 1-14.
- (6) G.A.Gerolymos, D.Sénéchal, I.Vallet, “Very-high-order WENO schemes”, *J. Comput. Phys.*, 228, (2009), pp. 8481-8524.
- (7) A.K.Henrick, T.D.Asiam, J.M.Powers, “Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points”, *J. Comput. Phys.*, 207, (2005), pp. 542-567.
- (8) F. Xiao, Y. Honma, T. Kono, “A simple algebra interface capturing scheme using hyperbolic tangent function”, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 48, (2005), pp. 1023-1040.
- (9) S. Pirozzoli, “On the spectral properties of shock-capturing schemes”, *J. Comput.Phys.*, 219, (2006), pp. 489-497.
- (10) F. Jia, Z. Gao, W. S. Don, “A spectral study on the Dissipation and dispersion of the WENO schemes”, *J. Sci. Comput.*, 63, (2015), pp. 49-77.
- (11) L. Fu, Y. Hu, N. A. Adams, “A family of high-order targeted ENO schemes for compressible-fluid simulations”, *J. Comput. Phys.*, 305, (2016), pp. 333-359.
- (12) C. Hu, C. W. Shu, “Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes on Triangular Meshes”, *J. Comput. Phys.*, 150, (1999), pp. 97-127.
- (13) E.F.Toro, “Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1997).
- (14) S. Gottlieb, “On High Order Strong Stability Preserving Runge-Kutta and Multi Step Time Discretization”, *Journal of Scientific Computing*, 25, (2005), pp. 105-128.
- (15) L. J. Xuan, K. Xu, “An efficient high-order finite difference gas-kinetic scheme for the Euler and Navier-Stokes equations”, *Computers and Fluids*, 166, (2018), pp. 243-252.
- (16) F. Acker, R. Borges, B. Costa, “An improved WENO-Z scheme”, *J. Comput. Phys.*, 313, (2016), pp. 726-753.