

水面波の横方向不安定性と砕波 Transverse instability of water wave and breaking

○ 片岡 武, 神戸大, 神戸市灘区六甲台町 1-1, E-mail: <kataoka@mech.kobe-u.ac.jp>
Takeshi KATAOKA, Kobe University, 1-1 Rokkodai Nada Kobe

The stability of finite-amplitude surface solitary waves with respect to transverse perturbations (three-dimensional perturbations) is studied on the basis of the Euler set of equations. The linear stability is numerically examined, and it is confirmed that there exist transversely unstable surface solitary waves for the amplitude-to-depth ratio of over 0.713. This critical ratio is well below that (=0.781) for the longitudinal instability obtained by Tanaka¹⁾. Time evolution of transversely distorted solitary wave is also simulated in order to give clear intuitive picture of unstable wave motion. In the lecture presentation we will suggest possible mechanism of wave breaking occurring in the ocean which is related to this transverse instability.

1. 問題設定と基礎方程式

一様な重力加速度 g が働く系において, 平らな底の上に横たわる平均深さ D , 密度一定の非圧縮性完全流体を考える. 以降, 変数はすべて g , D により無次元化したものを使う. 静止状態の自由表面が $z=0$ にあるものとしよう. つまり底が $z=-1$ となる (図 1). 水平方向に x , y 座標をとったときの $x-y-z$ 空間 3 次元流れを考えよう. 流れは渦なしであると仮定すれば, 速度ポテンシャル $\phi(x, y, z, t)$ (t は時間) を導入でき, 連続の式より Laplace 方程式:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{for } -1 < z < \eta, \quad (1)$$

を満たさなければならない. 境界条件は, $\eta(x, y, t)$ を界面の鉛直変位とすると,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{at } z = \eta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \eta = f(t) \quad \text{at } z = \eta, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = -1, \quad (4)$$

ただし, $f(t)$ は(3)の左辺を $x \rightarrow \infty$ で評価した値である.

方程式系(1)-(4)の解として次の形のもの考える:

$$\phi = -vx + \Phi(x, z), \quad \eta = \eta_1(x), \quad (5)$$

ただし $\partial \Phi / \partial x$, $\partial \Phi / \partial z$, η_1 はいずれも $x \rightarrow \pm \infty$ で零に近づく関数であり, v は正のパラメータである. この解は, 空間的に局所的な変動がその形を崩すことなく一定速さ v で伝播する現象を, その変動とともに動く座標系で眺めたものである. 局所的な変動

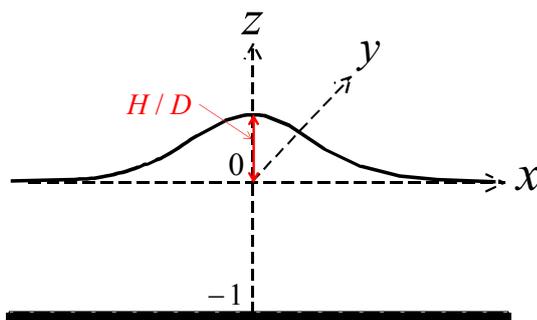


Fig.1 Geometry.

が伝播する現象を表す解(5)のことを, 孤立波解と呼ぼう. 孤立波解の存在は, その最大波高を H (無次元で H/D) とすれば, $0 < H/D < 0.833$ に対して数値的に示されている¹²⁾. この解が存在するとき, $x \rightarrow \pm \infty$ への減衰は指数関数的であり, 不等式:

$$v > 1, \quad (6)$$

が成り立つ.

いま, 孤立波解(5)の線形安定性を調べる. そのため(1)-(4)の解を孤立波解(5)と微小攪乱との和で

$$\phi = -vx + \Phi + \hat{\phi}(x, z) \exp(\lambda t + i \varepsilon y), \quad (7a)$$

$$\eta = \eta_1 + \hat{\eta}(x) \exp(\lambda t + i \varepsilon y), \quad (7b)$$

とあらわす. ここに λ は未知の複素定数, ε は与えられた正定数 (攪乱の y 方向波数). もし λ が正の実部をもつような解があれば, その孤立波は不安定である. y 方向に依存性のない攪乱 ($\varepsilon = 0$) に対する安定性 (進行方向安定性) は過去に数値的に調べられており, 次に示す孤立波のエネルギー $E(v)$:

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-1}^{\eta_1} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dz + \frac{\eta_1^2}{2} \right\} dx, \quad (8)$$

が

$$\frac{dE}{dv} > 0 \quad (9)$$

を満たすとき進行方向に安定である¹²⁾.

本研究では(9)を満たす進行方向に安定な孤立波を対象にして, その横方向安定性, つまり y 方向に依存性をもつ攪乱 ($\varepsilon > 0$) に対する安定性を調べる. (7a,b)を(1)-(4)に代入し, $(\hat{\phi}, \hat{\eta})$ に関して線形化し, x に関して局所的であるという条件を課すと, $(\hat{\phi}, \hat{\eta})$ に対する以下の線形方程式系が得られる:

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z^2} = \varepsilon^2 \hat{\phi} \quad \text{for } -1 < z < \eta_1, \quad (10)$$

$$L_L[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = -\lambda \hat{\eta} \quad \text{at } z = \eta_1, \quad (11)$$

$$L_I[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = -\lambda \hat{\phi} \quad \text{at } z = \eta_1, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = -1, \quad (13)$$

$$\hat{\phi}(x, z) \rightarrow 0, \quad \hat{\eta}(x) \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \pm \infty. \quad (14)$$

ここに L_L , L_I は次式で定義される線形作用素である.

$$L_L[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = \left(-\frac{\partial}{\partial z} + \frac{d\eta_l}{dx} \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\phi} + \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \frac{d\eta_l}{dx} \right) + \left(-v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{d}{dx} \right] \hat{\eta}, \quad (15a)$$

$$L_I[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = \left[\left(-v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{\phi} + \left[\left(-v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 1 \right] \hat{\eta}. \quad (15b)$$

方程式系(10)-(14)は、 λ を固有値とする固有値問題である。もし、零でない ε に対して λ が正の実部をもつような解が 1 つでもあれば、その孤立波は横方向に不安定である。

2. 安定性解析結果

固有値問題を構成する方程式系(10)-(14)を数値的に解き、任意の ε に対する線形安定性を調べる。ここでは数値計算法は省略し、結果のみを示す。計算は $H/D = 0.71, 0.72, 0.74, 0.76, 0.78, 0.785$ のケースでおこなった。 $H/D = 0.71$ のケースのみ、任意の ε に対して実部が正の固有値 λ は得られなかった。つまりこの孤立波は横方向に安定である。他の 5 ケースについて結果を示す。

図 2 は不安定攪乱モードの固有値 λ の実部 $\text{Re}[\lambda]$ を、 ε の関数としてプロットしたものである。○印が数値計算結果を表し、実線は $\varepsilon \rightarrow 0$ の漸近解析の結果³⁾である。図 2 より、 ε の小さいところで数値結果と解析結果がよく一致している。一方、 ε が大きくなるときの $\text{Re}[\lambda]$ の分布を見てみよう。すると最初 ε とともに増加していた $\text{Re}[\lambda]$ は、あるところで頭打ちとなり、ついには再び零に戻ってしまう。つまり横方向に不安定な孤立波は、ある臨界の波数よりも小さい攪乱に対しては不安定であるが、それよりも大きな波数の攪乱に対しては安定である。

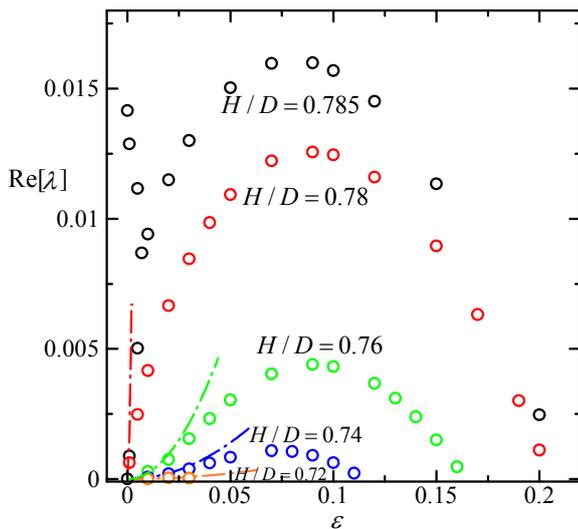


Fig. 2 $\text{Re}[\lambda]$ versus ε . The circles are numerical results. The solid lines are results from the asymptotic analysis for small ε ³⁾.

3. 数値シミュレーション

水面波に対する元の基礎方程式系(1)-(4)を数値的に解き、峰方向に攪乱を受けた孤立波の時間発展を数値シミュレーションする。数値計算法は省略し、結果のみを示す。

初期条件は、孤立波解(5)の峰の位置を x 方向に平行移動させたものを使う。つまり初期条件は、

$$\phi = -vx + \Phi(x - p(y), z), \quad \eta = \eta_l(x - p(y)). \quad (16)$$

ただし平行移動の距離 $p(y)$ は次の周期関数で与える：

$$p = -P_{\max} \cos(\pi y / Y_{\max}). \quad (17)$$

ここに P_{\max} , Y_{\max} は与えられた正の定数であり、それぞれ平行移動の最大値およびその y 方向周期の半波長を表す (図 3)。

Y_{\max} は ε と次の関係にある：

$$Y_{\max} = \pi / \varepsilon. \quad (18)$$

図 3 に、この初期条件となる孤立波の峰の位置を示してある。数値シミュレーションによる時間発展の結果は、図 4 に示した。表示したケースのパラメータは $H/D = 0.76$, $P_{\max} = 0.03$, $Y_{\max} = 10, 20, 30$ ($\varepsilon = 0.314, 0.157, 0.105$ に対応) の 3 ケースである。上記初期条件(16)から時間発展させると、孤立波は峰の位置、および表面変位について、時間とともに周期振動する。図 4 は、 $y = 0$ の断面における自由表面の分布を次の 3 種類の時間について示したものである：初期、1 周目の $y = 0$ での表面変位が最大に達する時間、2 周目の $y = 0$ での表面変位が最大に達する時間、である。

図 4 より、 $Y_{\max} = 10$ ($\varepsilon = 0.314$) のケースでは、1 周目よりも 2 周目の方が $y = 0$ での表面変位が小さくなっている。つまり孤立波はこの攪乱に対して安定である。一方、 $Y_{\max} = 20$ ($\varepsilon = 0.157$) のケースでは 1 周目と 2 周目で同程度であり、孤立波は中立安定である。最後に $Y_{\max} = 30$ ($\varepsilon = 0.105$) のケースでは 1 周目よりも 2 周目の方がより大きくなっている。つまり孤立波は不安定である。これらの結果は、2 節で示した線形安定性解析の結果 (図 2 の $H/D = 0.76$ の結果を見よ) と一致する。

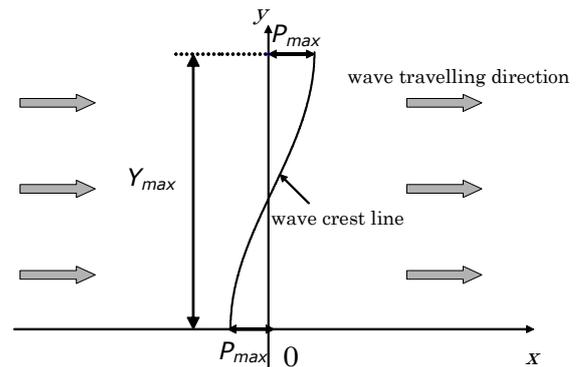
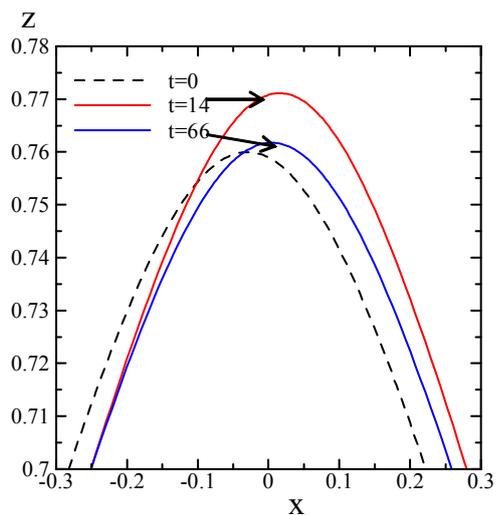


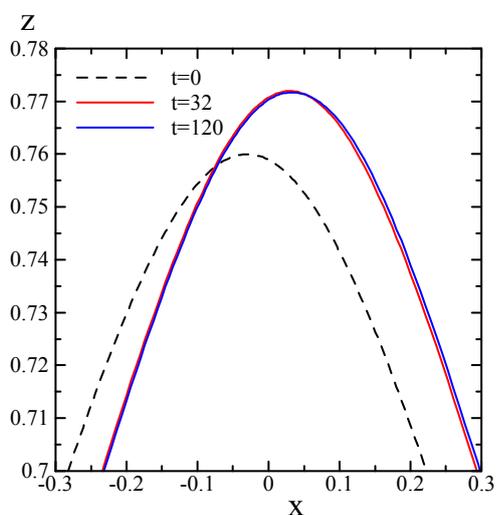
Fig. 3 Initial condition.

参考文献

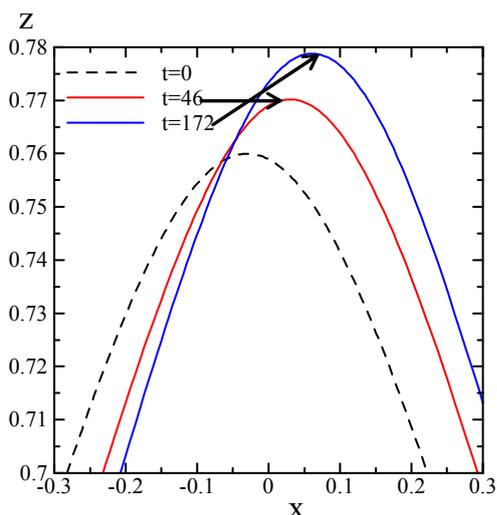
- (1) Tanaka, M., "The stability of solitary waves," *Phys. Fluids* **29** (1986) pp. 650-655.
- (2) Longuet-Higgins, M. S. & Tanaka, M., "On the crest instabilities of steep surface waves," *J. Fluid Mech.* **336** (1997) pp. 51-68.
- (3) Kataoka, T. & Tsutahara, M., "Transverse instability of surface solitary waves," *J. Fluid Mech.* **512** (2004) pp. 211-221.



(a)



(b)



(c)

Fig. 4 Time development of a disturbed solitary wave whose initial condition is given by (16) with (17) for $H/D = 0.76$ and $P_{\max} = 0.03$: (a) $Y_{\max} = 10$ ($\varepsilon = 0.314$); (b) $Y_{\max} = 20$ ($\varepsilon = 0.157$); (c) $Y_{\max} = 30$ ($\varepsilon = 0.105$).