楕円錐形状周りにおける極超音速流の全体安定性解析
Global Stability Analysis around an Elliptic Cone in Hypersonic Flow

○ 河端恭平，高知工科大学，高知県香美市土佐山田町宮ノ口 185, 215004g@gs.kochi-tech.ac.jp
荻野要介，高知工科大学，高知県香美市土佐山田町宮ノ口 185, ogino.yousuke@kochi-tech.ac.jp
Kyohei Kawabata, Kochi University of Technology, Tosayamada-cho, Kami, Kochi, 782-8502, JAPAN
Yousuke Ogino, Kochi University of Technology, Tosayamada-cho, Kami, Kochi, 782-8502, JAPAN

In this paper, numerical calculation of a perturbed hypersonic flow around an elliptic cone model is carried out. It is known that the heating rate increases as the flow field becomes turbulent in hypersonic flight, and the accurate prediction of turbulent transition is required. To predict the instability which is the cause of the turbulent transition, the global stability analysis is employed. Obtained results show that the same tendency as the wind tunnel test and DNS in the crossflow instability.

1．はじめに

近年，高高度を飛行することで，ソニックブームを低減し高速で飛行できる極超音速旅客機へ期待が高まっている．極超音速流中では飛行体前方に衝撃層が形成され，また壁面近傍には境界層が生じる．旅客機形状や飛行条件によっては，乱流化し，高温衝撃層内の流体が乱流輸送によって，壁面を著しく加熱する可能性が高い[1]．そのため乱流状態へ遷移する位置を知ることは極めて重要である．

極超音速機実現に向けて様々な研究が行われており，そのひとつに Hypersonic International Flight Research and Experimentation (HIFiRE) プロジェクトチームを中心に行われている研究がある[2]．HIFiRE プロジェクトでは，空力，燃焼，航法，材料，制御など次世代航空機の基礎技術を追求している．その中で楕円錐模型 (HIFiRE-5) を用いた研究では，極超音速境界層において主要な遷移現象である二次モード不安定性や三次元性によるクロスフロー不安定性のメカニズムを解明しようと様々な実験や数値計算が行われている[3,4]．T. J. Juliano と S. P. Schneider[5]による HIFiRE-5 を用いた極超音速風洞による実験において，レイノルズ数が低い場合では先端および境界層の薄い長径側のみで高い加熱量が計測された．一方レイノルズ数が高い場合では先端および長径側で高い加熱量が計測され，さらに乱流化したことにより HIFiRE-5 後方において，筋状に高い加熱量が計測された．また，D. J. Dinzl と G. V. Candler[6]による，上記の実験と同主流条件での DNS による数値計算においても実験と同等な筋状の熱流束分布を得ている．クロスフローによって正と負で対となった縦渦が周方向に何本も発生し，それらの縦渦が境界層外の高温流体を壁面まで巻き込むことによって，筋状の熱流束分布になると考えられている．その他にも P. Paredes[7]らによって，線形安定性解析も行われている．

本研究では，支配方程式を変化させず流れ場全体に対して擾乱を付加し安定性解析を行う全体安定性解析[8]を用いて，極超音速流における楕円錐周りの擾乱成長過程を解析し，クロスフロー不安定性を調査する．

2．数値計算法

2.1 支配方程式

楕円錐模型周りの流れ場計算の支配方程式には Navier-Stokes 方程式を用いる．

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\frac{\partial(\mathbf{E}-\mathbf{E}_v)}{\partial x}+\frac{\partial(\mathbf{F}-\mathbf{F}_v)}{\partial y}+\frac{\partial(\mathbf{G}-\mathbf{G}_v)}{\partial z}=0 \tag{1}$$

ここで，$\mathbf{Q}$ は保存量ベクトル，$\mathbf{E}$，$\mathbf{F}$，$\mathbf{G}$ は対流流束ベクトル，$\mathbf{E}_v$，$\mathbf{F}_v$，$\mathbf{G}_v$ は粘性流束ベクトルであり，以下のように与えられる．

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ e\end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ (e+p)u\end{pmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho vw\\ (e+p)v\end{pmatrix},\quad \mathbf{G}=\begin{pmatrix}\rho w\\ \rho uw\\ \rho vw\\ \rho w^2+p\\ (e+p)w\end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbf{E}_v=\begin{pmatrix}0\\ \tau_{xx}\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ u\tau_{xx}+v\tau_{xy}+w\tau_{xz}-q_x\end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{F}_v=\begin{pmatrix}0\\ \tau_{yx}\\ \tau_{yy}\\ \tau_{yz}\\ u\tau_{yx}+v\tau_{yy}+w\tau_{yz}-q_y\end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbf{G}_v=\begin{pmatrix}0\\ \tau_{zx}\\ \tau_{zy}\\ \tau_{zz}\\ u\tau_{zx}+v\tau_{zy}+w\tau_{zz}-q_z\end{pmatrix} \tag{6}$$

ここで，ρ は密度，u は速度の x 方向成分，v は速度の y 方向成分，w は速度の z 方向成分，e は単位体積あたりの全エネルギーを表し，p は圧力，τ は粘性応力，q は熱流束を表す．粘性応力 τ は Stokes の定理を用いて以下のように与えられる．

$$\tau_{xx}=\frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{7}$$

$$\tau_{yy}=\frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{8}$$

$$\tau_{zz}=\frac{2}{3}\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{9}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{10}$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{11}$$

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{12}$$

ここで，μ は粘性係数を表す．熱流束 q は Fourier の法則より以下

のように与えられる．

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}, q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y}, q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z} \tag{13}$$

ここで，T は温度，k は熱伝導係数を表す．

2.2 離散化手法

本研究では，空間の離散化には有限体積法を用いる．支配方程式 (1) を任意のセル V について積分を行う．

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathbf{E}-\mathbf{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{F}-\mathbf{F}_v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{G}-\mathbf{G}_v)}{\partial z}\right) dV = 0 \tag{14}$$

また，流束ベクトルに対してガウスの発散定理を用いると，

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \mathbf{Q}dV + \oint_{\partial V}\left\{(\mathbf{E}-\mathbf{E}_v)n_x + (\mathbf{F}-\mathbf{F}_v)n_y + (\mathbf{G}-\mathbf{G}_v)n_z\right\}dS = 0 \tag{15}$$

ここで，n_x，n_y，n_z はそれぞれセル境界面の法線ベクトルの x，y，z 成分を表す．各セルでの値は，そのセル自身の体積を用いて規格化し，以下のように与えられる．

$$\hat{\mathbf{Q}} = \frac{\iiint_V \mathbf{Q}dV}{\iiint_V dV} \tag{16}$$

離散化の際に，セルの体積 $\Delta V \left(= \iiint_V dV\right)$，セル境界の面積 ΔS （$= dS$），時間刻み幅 $\Delta t\ (= \partial t)$ をそれぞれ与え，離散化された式は以下のように表される．

$$\frac{\Delta\hat{\mathbf{Q}}}{\Delta t}\Delta V + \sum_{k=1}^{6}\left\{(\mathbf{E}-\mathbf{E}_v)n_x + (\mathbf{F}-\mathbf{F}_v)n_y + (\mathbf{G}-\mathbf{G}_v)n_z\right\}\Delta S_k = 0 \tag{17}$$

本研究では，時間積分にはオイラー陽解法を用いており，以下のように与えられる．

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{Q}}^{n+1} &= \hat{\mathbf{Q}}^n + \Delta\hat{\mathbf{Q}} \\ &= \hat{\mathbf{Q}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta V}\sum_{k=1}^{6}\left\{(\mathbf{E}-\mathbf{E}_v)n_x + (\mathbf{F}-\mathbf{F}_v)n_y + (\mathbf{G}-\mathbf{G}_v)n_z\right\}\Delta S_k\end{aligned} \tag{18}$$

また，数値流束には AUSM-DV 風上スキーム[9]を用い，空間精度は MUSCL 法[10]を用いて 2 次精度化する．

2.3 全体安定性解析

本研究で用いる全体安定性解析は，CFD と組み合わせることで流れ場全体に対して安定性解析を行う計算手法であり，擾乱の時間発展に対する固有値問題に帰着させ，得られた固有値から流れ場が安定であるかどうかを判断し，さらに，それらの固有ベクトルから流れ場の不安定モードを抽出する．

Navier-Stokes 方程式に支配される離散点の解の時間発展は以下のように記述できる．

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{Q}) \tag{19}$$

$$\mathbf{Q} = (\rho_1, (\rho\mathbf{u})_1, e_1, \cdots, \rho_{\mathrm{N}}, (\rho\mathbf{u})_{\mathrm{N}}, e_{\mathrm{N}}) \tag{20}$$

$$\mathbf{u} = (u, v, w) \tag{21}$$

ここで N は総格子点数であり，$\mathbf{Q}$ は各格子点上の保存量ベクトルを示す．また，保存量 $\mathbf{Q}$ は先の CFD 計算により得られた定常解を基本量 $\bar{\mathbf{Q}}$ とし，微小擾乱項を $\tilde{\mathbf{Q}}$ とすることで，以下のように分解できる．

$$\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}} + \tilde{\mathbf{Q}} \tag{22}$$

基本量は時間変化せず，微小擾乱よりはるかに大きいとすると式(19)を線形化することができ，微小擾乱 $\tilde{\mathbf{Q}}$ に対して以下の方程式を得る．

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{Q}}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}}\right)_{\mathbf{Q}=\bar{\mathbf{Q}}}\tilde{\mathbf{Q}} \equiv \mathbf{A}\tilde{\mathbf{Q}} \tag{23}$$

この係数行列 $\mathbf{A}$ の固有値問題を解くことで流れ場の安定性解析を行う．ここで得られた固有値 λ の実部 $\mathrm{Re}(\lambda)$ から流れ場の安定性が分かり，流れ場の安定性は次のように分類することができる．

$$\mathrm{Re}(\lambda)\begin{cases} > 0 & \text{不安定} \\ = 0 & \text{中立安定} \\ < 0 & \text{安定}\end{cases} \tag{24}$$

本研究では不安定性に興味があるため固有値の実部が大きいものに着目する．ここで行列 $\mathbf{A}$ の固有値問題を扱うが，行列の大きさは $\mathbf{Q}$ の成分の数に依存するため，多次元計算では大規模な計算となり，直接固有値問題を扱うのは難しい．そこで本研究では，大規模行列の固有値問題を陽に扱わない Arnoldi 法[11]を用いる．Arnoldi 法では大規模行列に対して部分空間を用いることで，近似行列で表現し，反復的な方法により絶対値が比較的大きな固有値とその固有ベクトルのみを求めることができるため，計算コストを削減することができる．以下に Arnoldi 法を用いて行列 $\mathbf{A}$ の固有値と固有ベクトルを求める手順を説明する．

まず，任意の擾乱ベクトル $\tilde{\mathbf{Q}}_1$ を与え，そのベクトルを正規化し，反復操作を行うことで，近似行列の成分を集める．以下にアルゴリズムを示す．

$\tilde{\mathbf{Q}}_1$: arbitrary initial vector

$$\zeta_1 = \left(\tilde{\mathbf{Q}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_1\right)^{-1/2}\tilde{\mathbf{Q}}_1 \tag{25}$$

for $k = 1$ to M

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{k+1} = \mathbf{A}\zeta_k - \textstyle\sum_{j=1}^{k} h_{j,k}\zeta_j \tag{26}$$

$$h_{j,k} = \zeta_j \cdot \mathbf{A}\zeta_k \tag{27}$$

$$h_{k+1,k} = \left(\tilde{\mathbf{Q}}_{k+1} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_{k+1}\right)^{1/2} \tag{28}$$

$$\zeta_{k+1} = \tilde{\mathbf{Q}}_{k+1}/h_{k+1,k} \tag{29}$$

next k

ここで，M は反復回数であり，本計算では，反復回数 M を 20 回とした．また，$h_{j,k}$ は近似行列の成分を表す．$h_{j,k}$ によって作られる近似行列は $M\times M$ サイズの Hessenberg 行列となる．Hessenberg 行列を $\mathbf{H}$ と表記する．行列 $\mathbf{A}$ の固有値 $\lambda^{\mathbf{A}}$ は行列 $\mathbf{H}$ の近似固有値として求まり，行列 $\mathbf{A}$ の固有値 $\lambda^{\mathbf{A}}$ に対応する固有ベクトル ϕ は行列 $\mathbf{H}$ の固有値 $\lambda^{\mathbf{H}}$，固有ベクトル ψ を用いて以下のように与えられる．

$$\mathbf{H}\psi_j = \lambda_j^{\mathbf{H}}\psi_j \tag{30}$$

$$\phi = \textstyle\sum_{k=1}^{M}\left(\psi_j\right)_k\zeta_k \tag{31}$$

ここで，$\left(\psi_j\right)_k$ は j 番目の固有ベクトルの k 番目の成分を表す．

さらに，時間発展法を用い，基本流れ場に擾乱を付加し，その流れ場の時間積分をとることで，固有値の実部が正に対応するモードは成長し，負に対応するモードは減衰することを利用して不安定モードと安定モードを区別することができる．擾乱を与えた時の時刻を t，積分時間を T とすると，時刻 t と時刻 $t+T$ における微小擾乱 $\tilde{\mathbf{Q}}$ の関係は以下のように表せる．

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t+T) = \exp(\mathbf{A}T)\tilde{\mathbf{Q}}(t) \tag{32}$$

また，

$$\mathbf{B} \equiv \exp(\mathbf{A}T) \tag{33}$$

とすると，行列 $\mathbf{A}$ の固有値 $\lambda^{\mathbf{A}}$ と行列 $\mathbf{B}$ の固有値 $\lambda^{\mathbf{B}}$ の関係は以下のように表せる．

$$\lambda^{\mathbf{B}} = \exp(\lambda^{\mathbf{A}} T) \tag{34}$$

Arnoldi 法を用いる際，$\mathbf{A}\zeta$ は直接用いず，以下の近似式を用いて計算する．

$$\mathbf{B}\zeta_k = \frac{\mathbf{Q}(t+T)-\bar{\mathbf{Q}}}{\epsilon} \tag{34}$$

ここで，初期擾乱を付加した流れ場を以下のように表す．

$$\mathbf{Q}(t) = \bar{\mathbf{Q}} + \epsilon\zeta_k \tag{35}$$

従って，$\mathbf{Q}(t+T)$ はこの式を時刻 T だけ積分することで得られる．本計算では，積分時間 T は 1.0×10^{-6} s とした．また，ϵ は微小定数であり，以下のように定義し，擾乱の大きさを調節する．

$$\epsilon = \frac{\|\bar{\mathbf{Q}}\|}{\|\zeta_k\|_N}\epsilon_0 \tag{36}$$

ここで，ϵ_0 は調節パラメータであり，本計算では，ϵ_0 を 1.0×10^3 とし，微小擾乱の大きさが主流に対して約 0.06%となるように設定した．

３．計算条件

計算には Juliano と Schneider[5]の実験で用いられた楕円錐模型と主流条件を使用する．本計算で用いた計算格子を Fig. 1 に示す．断面アスペクト比が 2:1 となっており，楕円錐底面の長軸半径が 82mm，短軸半径が 41mm である．軸方向長さは 328mm で，先端は半径 0.95mm の球状である．迎角を付けないため，楕円錐の 1/4 部分を計算する．その際の計算格子として 129×129×129 の構造格子を用いた．流れ場の主流条件を Table 1 に示す．また，Fig. 2 に流出面における計算格子を示す．最小格子幅は $y^+ = 1$ と設定し，1.0×10^{-3}mm である．

Table 1　Freestream condition

Parameters	
Re, /m	1.18×10^7
M	6.0
U_∞, m/s	869.7
T_∞, K	52.3
T_{Wall}, K	300.0

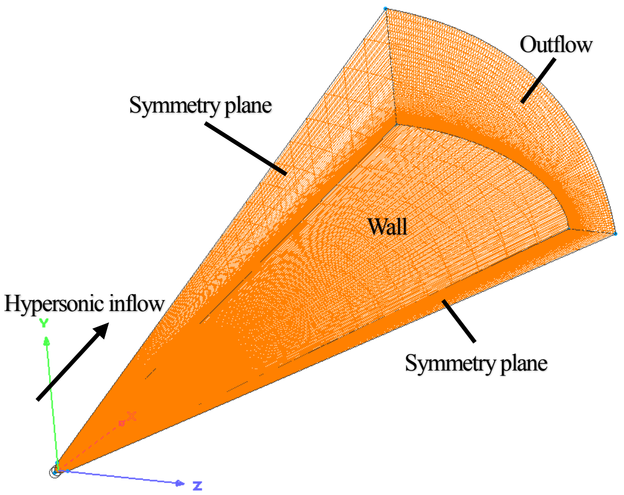

Fig. 1　Computational domain with mesh around elliptic cone

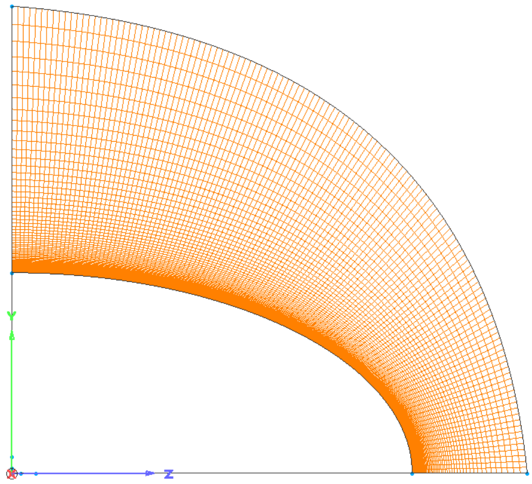

Fig. 2　The outflow boundary mesh

４．計算結果および考察

4.1　基本流計算

流れ場のマッハ数分布を Fig. 3 に示す．また，流出面のマッハ数分布を Fig. 4 に，短径側壁面付近の拡大図を Fig. 5 に示す．物体周りに衝撃波が発生していることが分かる．楕円錐で非軸対称であるため，衝撃波および境界層は長径側で薄く，短径側で比較的厚くなっている．境界層には約 65 点の格子点が入っており，境界層をある程度解像できていると考える．Fig. 4,5 から短径側の対称面付近において，境界層の外縁から上方にかけてキノコ状の縦渦断面が確認できる．また，Fig. 6 に圧力分布および流線を示す．長径側から短径側に発生する圧力勾配によって流れが曲げられていることが分かる．このクロスフローによって Fig. 3 - 5 に示したように短径側に縦渦が発生する．

Fig. 7 に壁面熱流束の分布を示す．先端および長径側で熱流束が高くなっており，短径側へ向かって低くなっていることが分かる．Dinzl と Candler による DNS の結果[6]と比較すると，DNS では見られている筋状の分布は本計算では見られていないが，先端や長径側では同程度な値を得ることができた．

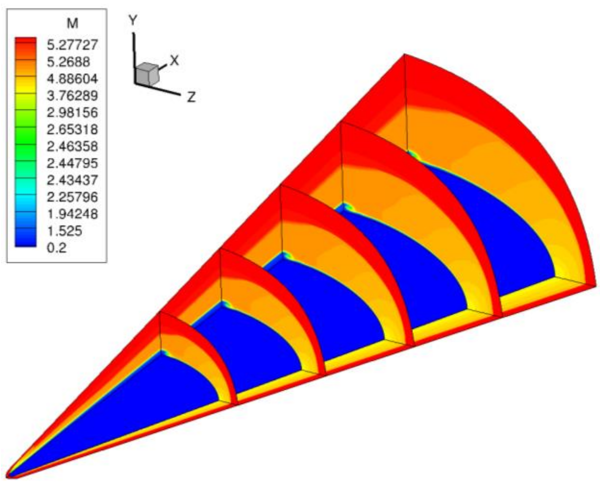

Fig. 3　Mach number distribution

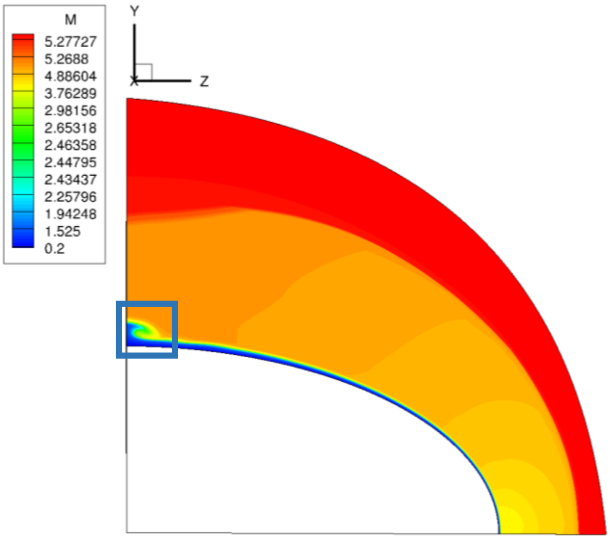

Fig. 4　Mach number distribution at outflow boundary

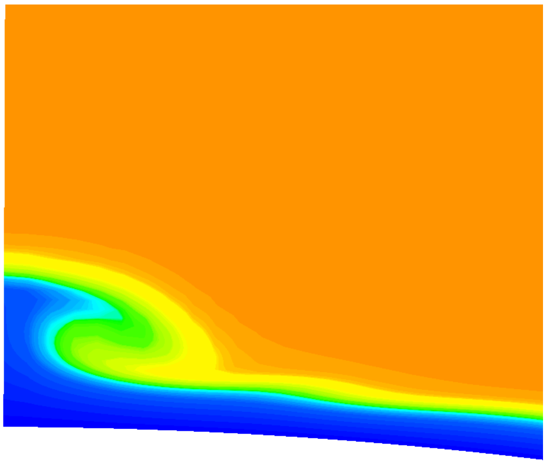

Fig. 5　Enlarged view near the center line

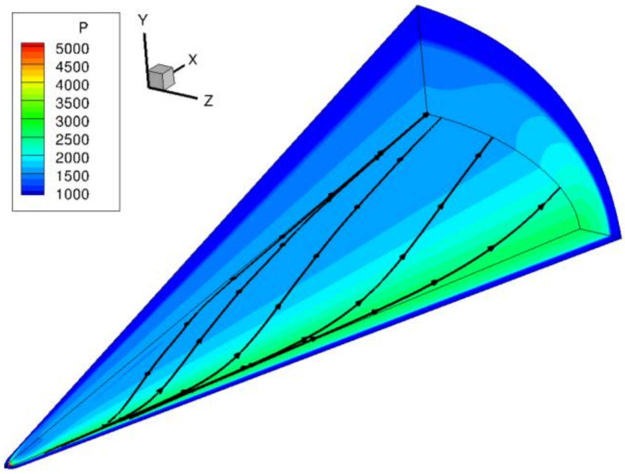

Fig. 6　Pressure distribution and streamline

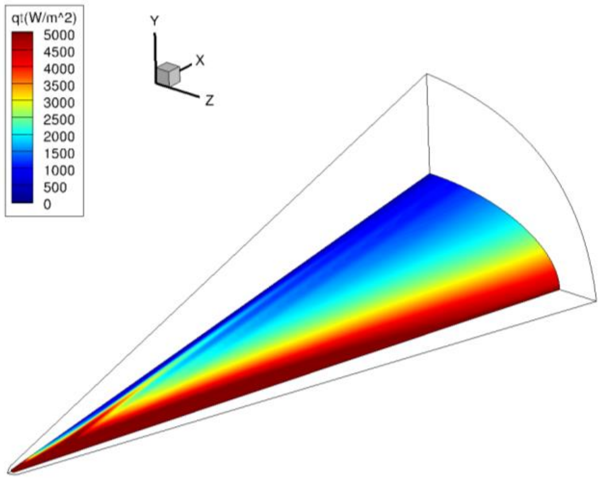

Fig. 7　Wall heat flux distribution

4.2　全体安定性解析

全体安定性解析を行った結果を Fig. 8 に示す．また，流出面における密度の固有モードを Fig. 9 に示す．まず，衝撃波面に擾乱の強め合いが確認できるが，これは Fig. 2 からも分かるように，衝撃波付近の格子が粗くなっており，衝撃波面からは小さな擾乱が生まれやすいため，数値的な誤差であると考える．次に，壁面付近の境界層外縁($y = 0.03$m – 0.04m, $z = 0.02$m – 0.06m)に見られる分布に着目する．密度の振幅の正負が周方向に交互に現れていることが分かる．そして，この分布が見られるレイヤー(境界層厚さ約 50%, 75%, 100%の位置)の分布をそれぞれ Fig. 10 - 12 に示す．先端から伸びる短径側対称面付近のキノコ状縦渦まわりに擾乱成長が見られる．またその一方で，例えば Fig. 11 を見ると，先端から 0.1m 以降の領域で，後流に向かう筋状の分布が見える．実験や DNS では，複数の縦渦による筋状の加熱分布を得ており，全体安定性解析において確認できた分布は，同様の傾向の結果を得ることができた．

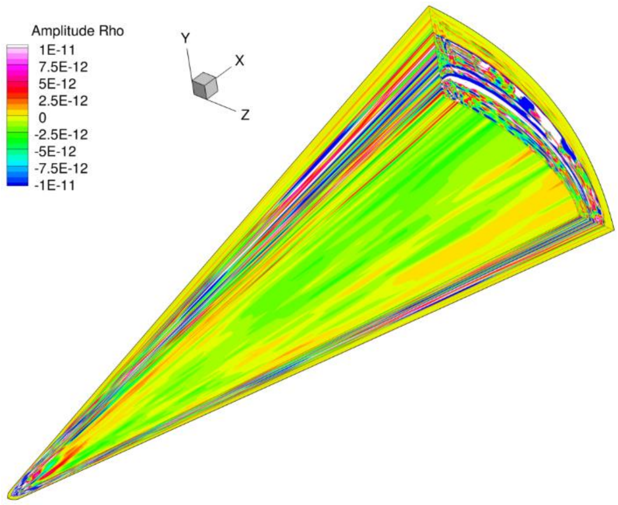

Fig. 8　Eigen mode of density corresponding to maximum real eigenvalue

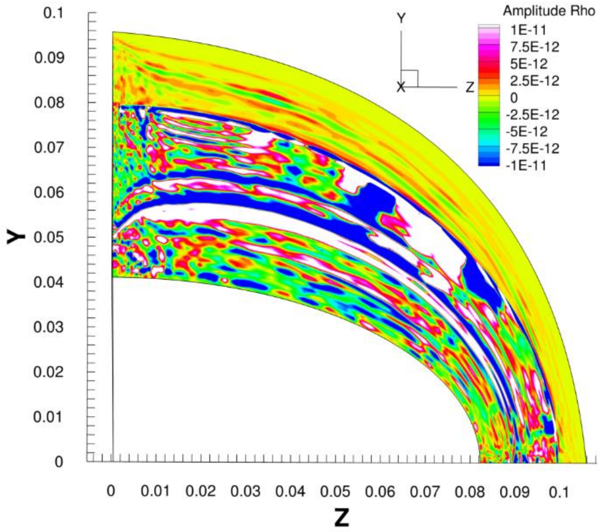

Fig. 9　Eigen mode of the density corresponding to maximum real eigenvalue at the outflow surface

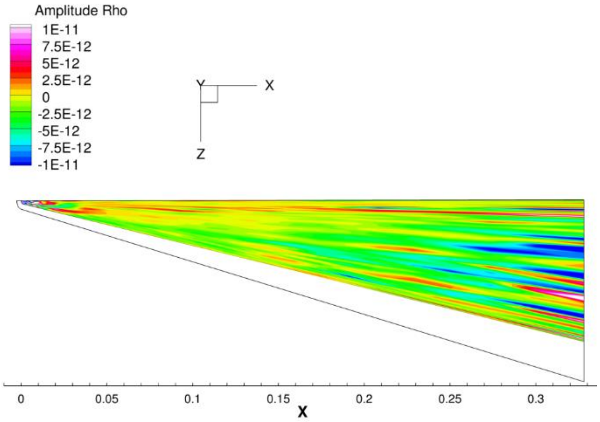

Fig. 10　Eigen mode of density corresponding to maximum real eigenvalue at boundary layer thickness of 50%

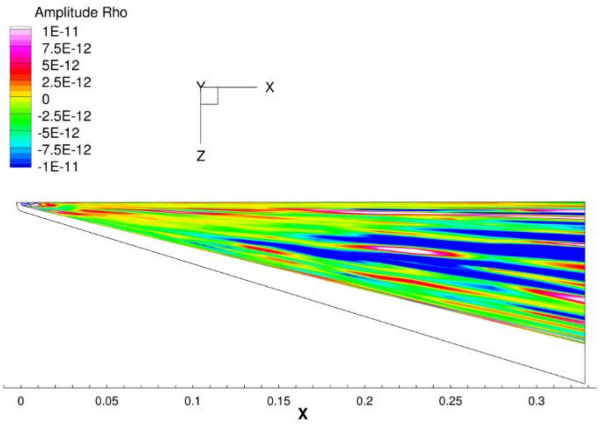

Fig. 11　Eigen mode of density corresponding to maximum real eigenvalue at boundary layer thickness of 75%

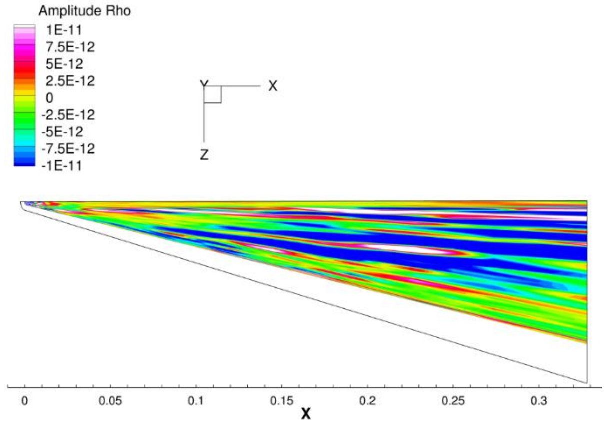

Fig. 12　Eigen mode of density corresponding to maximum real eigenvalue at boundary layer thickness of 100%

５．まとめ

本研究では，まず，全体安定性解析を行うにあたり必要な楕円錐周りの流れ場を求めるため，流体計算を行った．衝撃波面の形成や短径側対称面付近に先端から伸びるキノコ状縦渦，そしてクロスフローを確認できた．

次に, 楕円錐周りの流れ場に対して, 全体安定性解析を行った．密度の固有モードを確認すると，壁面付近および壁面と衝撃波の間で擾乱が強め合っていることが分かった．境界層外縁付近で見られる筋状の分布においては, 実験や DNS と同様の傾向の結果が全体安定性解析でも得られた．筋状の加熱分布が流体計算では得られなくても，全体安定性解析によって，同傾向の結果が得られることが分かった. 壁面と衝撃波の間に見られる分布については, 周方向に分布を持っているため，クロスフローが影響を与えているのではないかと考えられるが，明確な原因の解明には至っていない.

参考文献

(1) T. J. Juliano, D. Adamczak and R. L. Kimmel, “HIFiRE-5 Flight Test Results,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 52, (2015), pp. 650-663.

(2) D. J. Dolvint, “Hypersonic International Flight Research and Experimentation (HIFiRE) Fundamental Science and Technology Development Strategy,” AIAA Paper 2008-2581, (2008).

(3) J. B. Edelman and S. P. Schneider, “Secondary Instabilities of Hypersonic Stationary Crossflow Waves,” *AIAA J.*, Vol. 56, (2018), pp. 182-192

(4) D. J. Dinzl and G. V. Candler, “Analysis of Crossflow Instability on HIFiRE-5 using Direct Numerical Simulation,” AIAA Paper 2015-0279, (2015)

(5) T. J. Juliano and S. P. Schneider, “Instability and Transition on the HIFiRE-5 in a Mach-6 Quiet Tunnel,” AIAA Paper 2010-5004, (2010).

(6) D. J. Dinzl and G. V. Candler, “Direct Simulation of Hypersonic Crossflow Instability on an Elliptic Cone,” *AIAA J.,* Vol. 55, (2017), pp. 1769-1782.

(7) P. Paredes, R. Gosse, V. Theofilis and R. Kimmel, “Linear modal instabilities of hypersonic flow over an elliptic cone,” *J. Fluid Mech.*, (2016), pp. 442-466.

(8) F. Gomez, S. L. Clainche, P. Paredes, M. Hermanns and V. Theofilis, “Four Decades of Studying Global Linear Instability: Problems and Challenges,” *AIAA J.*, Vol. 50, (2012), pp. 2731-2743.

(9) Y. Wada and M. S. Liou, "A Flux Splitting Scheme with High-Resolution and Robustness for Discontinuities," AIAA Paper 94-0083, (1994).
(10) B. van Leer, "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method," *Journal of Computational Physics*, Vol. 32, (1979), pp. 101-136.
(11) W. E. Arnoldi, "The Principle of Minimized Iterations in the Solution of the Matrix Eigenvalue Problem," *Quarterly of Applied Mathmatics*, Vol. 9, (1951), pp. 17-29.