

摂動法に基づくプラズマアクチュエータの推力評価

Thrust evaluation of plasma actuators based on a perturbation method

- 柴田寿一, 宇宙航空研究開発機構, 神奈川県相模原市中央区由野台 3-1-1, E-mail: shibata@flab.isas.jaxa.jp
高木亮治, 宇宙航空研究開発機構, 神奈川県相模原市中央区由野台 3-1-1, E-mail: ryo@isas.jaxa.jp

Hisaichi Shibata, JAXA/ISAS, 3-1-1 Yoshinodai, Sagamihara, Kanagawa, Japan, E-mail: shibata@flab.isas.jaxa.jp
Ryoji Takaki, JAXA/ISAS, 3-1-1 Yoshinodai, Sagamihara, Kanagawa, Japan, E-mail: ryo@isas.jaxa.jp

In this study, current voltage characteristics of two-dimensional electroaerodynamic thrusters which are kinds of plasma actuators were evaluated in order to estimate thrust as a function of applied voltage. The perturbation technique which was introduced in our previous paper with a certain limitation on electrodes geometry was extended to use for arbitrary electrodes geometries. Moreover, a three fluid model, in which negative ions density contribution in addition to that of electrons and positive ions is taken into account, is applied in this study. The technique has been benchmarked with experimental results acquired by Moreau et al, and the numerical results showed good agreements with the experimental results of corona onset voltage whereas qualitative agreements were not obtained regarding the proportional coefficient in Townsend's 2nd formula.

1. はじめに

空気電離加速型推進器 (Electroaerodynamic thruster: EADT) は電動モータとプロペラを組み合わせたシステムと比較し, 機械駆動部がない, 典型的には 40dB 以上も静音, 応答時間が一桁以上短いなどの利点を持つ, 大気圧非平衡プラズマを応用する推進装置であり, プラズマアクチュエータの一種として捉えることができる (1, 2, 3, 4, 5, 6).

1960 年代に初めてその性能を分析した学術論文が出版されたこと (7) を皮切りに, 2000 年代以降も, 米国 SANDIA 国立研究所 (8) や NASA (5) で EADT の実験的理論的研究が繰り返し行われている. 近年では, 米国 Massachusetts 工科大学 (MIT) 航空宇宙工学専攻が Lincoln 研究所, および MIT 電気工学専攻 (EECS) と少なくとも十数人規模の研究チームを組織し (9), 動力飛行試験を含む数多くの実験 (1, 3), 高高度での駆動も想定した理論解析 (2), そして数値解析 (6) を遂行している.

EADT は雰囲気気をイオン化し, 中性粒子との電荷交換反応 (CEX) によってプラズマの持つ運動量を気流に伝達し (10), その気流をジェットとして噴出することによって, 体積力を得る (Fig. 1. 参照). 効果的な EADT を設計するためには, 実験や理論による解析と併せて, 数値解析を援用した物理現象の洞察と理解が有効であると考えられる.

一般的な EADT が応用する物理現象は直流コロナ放電である. コロナ放電はドリフト拡散モデルによってよく再現できることが知られている. ここで, 直流コロナ放電を利用した EADT について, ほとんどの先行研究 (6, 2) では, ドリフト拡散モデルの一種である, 正イオンのダイナミクスのみを考慮した 1 流体モデルによって解析がなされているが, そのモデルでは以下に挙げる項目などをモデル内で閉じて解析できない:

- コロナ放電開始電圧
- 電子衝突電離反応, 電子付着反応, 壁面での二次電子放出 (α 効果, η 効果, γ 効果)
- 放電の安定性

このうち, コロナ放電開始電圧は 1 流体モデルでは境界条件として間接的に与えられる. 電子が関与する反応についても, 1 流体モデルでは電子のダイナミクスが考慮されないため, これらを扱うことはできない. また, 1 流体モデルでは, シース領域の物理もモデル化され, 計算空間で解られないことを強調しておく. 最後に記載した放電の安定性は EADT に印加できる電圧範囲を知るために重要である. 本稿の範囲を超えるが, これは 1 流体モデルではコロナ放電からストリーマ放電やスパーク放電などへの遷移を扱えないことを意味する. しかしながら, これら項目は電子のダイナミクスを考慮したモデル (2 流体モデルや 3 流体モデル) の導入によって扱えるようになる.

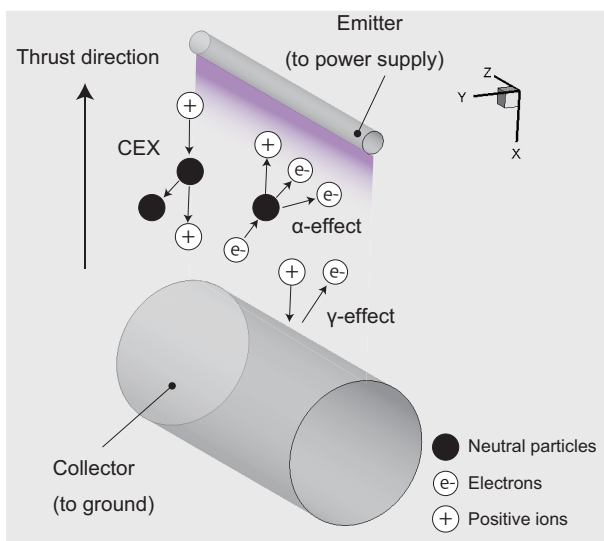


Fig. 1: Overview and physics of electroaerodynamic thrusters.

その一方で、これら電子のダイナミクスを考慮した多流体モデルにおいては、高い計算コストの問題が存在する。EADT の代表長さは cm 程度であるのに対して、シース領域を解像する大気圧雰囲気下での解析に必要な最小格子幅は $10\mu\text{m}$ 程度と見積られる。加え、もし時間進行法によって解く場合は、Maxwell の緩和時間が持つタイムスケールが 10^{-12} s 程度と短いのに対し、電極間を正イオンがドリフトするために要する時間は 10^{-2} s のオーダーと非常に長い。すなわち、時間スケールと空間スケールの双方に大きなギャップがある。このため、陽解法を要請すると、おおよそ 10^{10} ステップの時間進行回数が必要であり、その計算量が膨大となり計算の実行が現実的でない。近年では、計算コストを低減する目的で、準陰解法⁽¹¹⁾による Poisson 方程式の取り扱い手法や、電子密度を凍結した状態で正イオン密度の変化を追跡する手法⁽¹²⁾(Simplified Physical Model: SPM)などが開発されてきた。典型的な誘電体バリア放電プラズマアクチュエータの解析に際しては、前者は再現できる物理現象をほぼ維持した上で、時間刻み幅 Δt の上限を 100 倍程度に取ることができる。SPM はより忠実度の低い、1 流体モデルと比較しても高速に問題を解くことができる点は注目に値する。SPM が高速である主な理由は、1 流体モデルにしばしば適用される Kaptsov の仮説⁽¹³⁾から生じる収束の遅い反復計算を含む境界条件が不要なこと、そしてタイムスケールの短い、電子密度の式に対して定常解法が適用されるためである。しかしながら、SPM を用い高密度プラズマ放電を解析するには注意が必要である。この理由は SPM が初めて提案された論文⁽¹²⁾では、概ね正イオン密度が 10^{10} cm^{-3} 以下の条件が設定されているため、Maxwell の緩和時間が持つタイムスケールに起因する時間刻み幅の制限が表面化しないためである。本研究では、筆者らによる先行研究⁽¹⁴⁾をベースとした摂動法によるアプローチにより、電子を考慮した 3 流体モデルを用いて直流駆動の EADT を現実的な時間と計算コストで解析するための解法を構成する。

本論文の構成は以下のようになっている。Sec. 2 では EADT の推力の推算に関する基礎理論を簡単に解説する。Sec. 3 では本研究で扱う 3 流体モデルを導入する。Sec. 4 では本研究で開発した摂動法による推力の推算方法の理論を解説する。Sec. 5 では提案手法を用いて現実の EADT を解くための問題設定を提示する。Sec. 6 では Sec. 5 を受けて、数値解析結果を実験結果と比較することで、提案手法の妥当性を議論する。Sec. 7 では本稿をまとめる。

2. 基礎理論

EADT の基礎理論を導出するにあたり先行研究^(3, 1, 2, 15)ではいくつかの仮定が、時には暗黙の内に置かれていることに注意しながら、簡単にそれを解説する。

初めに、EADT における推力の推算式を導く。推力 T

を x 方向に働く体積力と定義する。体積力は Coulomb 力の体積積分と考えられるため、推力は

$$T = \int_{\Omega} \rho E_x dV \quad (1)$$

$$= \int_{\Omega} \frac{J_{p,x}}{\mu_p} dV \quad (2)$$

$$= \frac{J_{p,x}}{\mu_p} \int_{\Omega} dV \quad (3)$$

$$= \frac{J_{p,x}}{\mu_p} \cdot A \cdot d \quad (4)$$

$$= \frac{I_p}{\mu_p} \cdot d \quad (5)$$

$$\approx C_{\eta} \cdot I \quad (6)$$

と表現できる。ここで Ω は推進器を囲む十分に広い領域、 dV は微小体積要素、 ρ は空間電荷密度、 E_x は電場ベクトルの x 方向成分、 $J_{p,x}$ は正イオン電流密度ベクトルの x 方向成分、 I は全電流、 I_p は正イオン電流、 μ_p は正イオン移動度、 d は電極間距離、 A は電極断面積、そして C_{η} は推力電流比⁽⁴⁾である。上記推力の式を導くにあたり、いくつかの仮定が置かれている。

仮定 1

電子密度と負イオン密度の空間分布は零と置いてよく、正イオンのみを考慮する。(Eq. 1 から Eq. 2 への変形で使用)

仮定 2

正イオンの空間電流密度及び移動度は Ω 内部で一定である。(Eq. 2 から Eq. 3 への変形で使用)

仮定 3

拡散電流密度は無視できる。(Eq. 1 から Eq. 2 への変形で使用)

仮定 4

一次元の推進器を考える。(Eq. 3 から Eq. 5 への変形で使用)

得られた推力の式 (Eq. 5) が誘電体バリア放電プラズマアクチュエータにおける体積力の推算式⁽¹¹⁾と類似していることは偶然ではなく、それは Coulomb 力を応用するデバイスに普遍的なものであると考えられる。さて、ここでもし電流駆動の EADT であれば、全電流 I が直接与えられるため直ちに推力を求めることができる。本研究では、ほとんどの先行研究に当てはまる電圧駆動された EADT を扱う。このことから、EADT の推力を求めるためには、ある電圧が与えられたときの電流、すなわち電流電圧特性 (Current Voltage Characteristics: CVCs)

の計算が必要となる．コロナ放電を扱う EADT の場合は誘電体バリア放電プラズマアクチュエータの場合と違い、弱電流領域を仮定すれば、その CVC を Townsend の第二公式⁽¹⁶⁾を用いることで明示的に表現できる．ここに Townsend の第二公式は以下で与えられる．任意の印加電圧 V に対して：

$$I = \begin{cases} C \cdot V \cdot (V - V_c) & (V \geq V_c) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (7)$$

この中で C は電極形状や配置、及びガス組成に依存する比例定数、そして V_c はコロナ放電開始電圧である．これらから、印加電圧に対する推力の応答を調査するためには、二つの比例係数とコロナ放電開始電圧、すなわち C_η と C 、そして V_c を何らかの手法で求める必要が生じることが分かる．本研究では、Eq. 5 から得られる $C_\eta = d/\mu_p$ を前者の解析的表現として利用し、コロナ放電開始電圧は先行研究⁽¹⁴⁾ で用いた手法によって数値的に求める．本研究では、これまで摂動法による求め方が確立されていなかった比例係数 (C) の数値的な評価方法を確立する．

3. 支配方程式

プラズマアクチュエータの物理を数値的によく表現できることで知られる、Boltzmann 方程式から導かれたドリフト拡散方程式を採用する．本研究では、Boltzmann 方程式の高次モーメントを取り得られる電子平均エネルギーの式は解かず、局所場近似 (Local Field Approximation: LFA) モデル⁽¹¹⁾を用いる．LFA モデルでは、輸送係数が換算電界 (E/N) から一意に与えられる．ここで E は局所的な電場強さで位置の関数、 N は中性粒子の数密度である．

LFA モデルを適用した、電子密度、正負イオン密度に関するドリフト拡散方程式 (3 流体モデル)、そしてスカラー電位に関するポアソン方程式は以下で与えられる：

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J}_e + (\alpha - \eta) |\mu_e \mathbf{E}| \rho_e, \quad (8)$$

$$\mathbf{J}_e = \mu_e \mathbf{E} \rho_e + D_e \nabla \rho_e, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_p + \alpha |\mu_e \mathbf{E}| \rho_e, \quad (10)$$

$$\mathbf{J}_p = \mu_p \mathbf{E} \rho_p - D_p \nabla \rho_p, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J}_n + \eta |\mu_e \mathbf{E}| \rho_e, \quad (12)$$

$$\mathbf{J}_n = \mu_n \mathbf{E} \rho_n + D_n \nabla \rho_n, \quad (13)$$

$$0 = \epsilon_0 \nabla (\epsilon_r \nabla \phi) + (\rho_p - \rho_n - \rho_e). \quad (14)$$

ここで ρ_e と $\rho_{p/n}$ はそれぞれ電子及び正負イオンの電荷密度、 ϕ はスカラー電位、 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ は電場ベクトル、 \mathbf{J} は電流密度ベクトル、 $\alpha = \alpha(|\mathbf{E}|/N)$ は衝突電離係数、

$\eta = \eta(|\mathbf{E}|/N)$ は電子附着係数、 μ_e と $\mu_{p/n}$ は電子及び正負イオンの移動度、 D_e と $D_{p/n}$ は電子及び正負イオンの拡散係数、 ϵ_0 は真空の誘電率、 ϵ_r は比誘電率である．これら輸送係数は湿った常温空気のもの⁽¹⁷⁾を用いる．

LFA モデルにおけるドリフト拡散方程式の境界条件は、電極の種類によらず、電極表面に対する電場ベクトルの向きで整理できる．ここで電極表面の単位外向き法線ベクトルを $\hat{\mathbf{n}}$ と記述する．

$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \geq 0$ のとき：

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \rho_e = 0, \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}_p = 0, \quad (16)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \rho_n = 0. \quad (17)$$

$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0$ のとき：

このとき、電極表面に正イオンが衝突し、二次電子が放出される物理は以下の境界条件で与えられる．

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}_e = \gamma_i \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}_p, \quad (18)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \rho_p = 0, \quad (19)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}_n = 0. \quad (20)$$

本研究では、二次電子放出係数 (γ_i) を 0.1 と与える．

次に、スカラー電位に関する Poisson 方程式の境界条件を与える．電極上では、以下のように電位を固定する (Dirichlet 境界)：

$$\phi = V. \quad (21)$$

その他の開境界では、無限遠方を近似的に再現する場合には物理量に勾配がないと仮定して (Neumann 境界)、

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (22)$$

を与える．ただし Faraday ケージなど、電気力線を完全に遮蔽する場合には、開境界に対して上記の Dirichlet 境界条件を与える．

4. 摂動展開法

以下のように、支配方程式の自明な解である無電荷平衡解、つまり $\rho_e = \rho_p = \rho_n = 0$ の周囲に電荷密度とスカラー電位を展開する：

$$\rho_e = 0 + \epsilon \hat{\rho}_e, \quad (23)$$

$$\rho_p = 0 + \epsilon \hat{\rho}_p, \quad (24)$$

$$\rho_n = 0 + \epsilon \hat{\rho}_n, \quad (25)$$

$$\phi = \bar{\phi} + \epsilon \hat{\phi} \quad (26)$$

ここで ϵ は Laplace 場の仮定を強く破綻させない程度の定数である。これらの式を時間偏微分項を落とした定常状態の支配方程式に代入し、 ϵ^2 以上の高次項を無視することで、以下の式を得る：

$$0 = \nabla \cdot (\bar{\mu}_e \bar{\mathbf{E}} \hat{\rho}_e + \bar{D}_e \nabla \hat{\rho}_e) + (\bar{\alpha} - \bar{\eta}) |\bar{\mu}_e \bar{\mathbf{E}}| \hat{\rho}_e, \quad (27)$$

$$0 = \nabla \cdot (-\bar{\mu}_p \bar{\mathbf{E}} \hat{\rho}_p + \bar{D}_p \nabla \hat{\rho}_p) + \bar{\alpha} |\bar{\mu}_e \bar{\mathbf{E}}| \hat{\rho}_e, \quad (28)$$

$$0 = \nabla \cdot (\bar{\mu}_n \bar{\mathbf{E}} \hat{\rho}_n + \bar{D}_n \nabla \hat{\rho}_n) + \bar{\eta} |\bar{\mu}_e \bar{\mathbf{E}}| \hat{\rho}_e, \quad (29)$$

$$0 = \epsilon_0 \nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \hat{\phi}) + (\hat{\rho}_p - \hat{\rho}_n - \hat{\rho}_e) \quad (30)$$

ここでバー付きの量は Laplace 場 ($\hat{\phi}$) で評価された量を意味する。対応する境界条件も摂動量で表現でき、それら境界条件を埋め込んだ摂動量についての方程式は形式的に以下のように書ける：

$$\mathcal{J} \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (31)$$

ここに $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{\rho}_e, \hat{\rho}_p, \hat{\rho}_n, \hat{\phi})^T$ である。Jacobian 行列 \mathcal{J} は印加電圧 V の関数であることに留意されたい。このパラメータ (V) を変化させることによって、非自明な摂動量を持つようにその行列の性質を変えることができる。また、そのときの対応するパラメータは放電開始電圧と捉えることができる (詳細について先行研究⁽¹⁴⁾を参照)。ここで、明らかにこれら摂動量 ($\hat{\mathbf{q}}$) には定数倍の自由度がある。しかし、物理的には負のプラズマ密度は許容されず、かつ放電開始直後の非自明な解を扱うため、任意の密度摂動成分は正であることと $\epsilon > 0$ を要請できる。

上記固有値問題の次元は無限であり、コンピュータで扱うためにはなんらかの空間離散化手法によって行列次元を有限次元に落とす必要がある。本研究では、試行関数と試験関数に異なる形状関数を用いる Petrov-Galerkin 有限要素法の一つである、Galerkin/Least-Squares Finite Element Method (GLS-FEM)⁽¹⁸⁾ を用いて空間離散化を行う。ただし、楕円形方程式である Poisson 方程式については Bubnov-Galerkin 有限要素法を適用する。両者とも形状関数に四節点四辺形アイソパラメトリック要素を用い、その数値積分には二次精度の Gauss-Legendre 法を用いた。

さて本研究では、Laplace 場を基本流に仮定した場合の Eq. 31 の非自明な解に興味がある。このとき、その Jacobian 行列は以下を満たす：

摂動量が初期擾乱であるための必要条件

非自明な摂動量を系が持つための必要条件は、Jacobian 行列のある固有値の実部と虚部が共に零であることである。

証明は背理法による。もし、条件が満たされない場合、

determinant は非零であるため、Eq. 31 には逆行列が存在する。このため自明な摂動解のみが許される。これは矛盾である。

ここで、摂動の空間分布は数学的に定義でき、かつ計算機を用いて機械的に求めることができるが、その摂動を現実の系で実現できるかどうかは別の問題であることに留意されたい。例えば、系に電子雪崩の種となる電子が供給されない状態では、コロナ放電は決して生じない。

典型的な EADT に関する二次元問題では、離散化された Jacobian 行列の次元は $N_{\text{dof}} \approx 400,000$ である。この場合は約 40 万円の大規模固有値問題 (右辺ベクトルが零であるため、連立一次方程式問題に帰着できないことに注意) を解く必要が生じると考えるのがストレートである。しかしながら、このような一般に計算コストが高いアルゴリズムの適用を回避する手法が筆者らによって既に開発されている。詳細については先行研究⁽⁴⁾を参照されたい。加え、先行研究⁽¹⁴⁾から上の問題はさらに次元の小さな問題へと分解できることが分かっている。詳細については補遺 A を参照されたい。

4.1 推力の計算

この節では、推力を計算するために、Eq. 7 に現れた定数係数 C を求めることに焦点を絞る。これまで、筆者らによって、空間対称性が強い場合における限られた状況下で定数係数 C を求める研究⁽¹⁹⁾がなされてきた。本研究ではこの対称性に関する制約を取り除く。

コロナ活性電極上、つまりエミッター電極において、電位 V を $V = V_c + \delta V$ とコロナ放電開始電圧の周りで微小量 $\delta V > 0$ だけ増加させる。この間、電流 I は $I = \bar{I} + \delta I = \delta I > 0$ と線形応答すると仮定する。Townsend の第二公式にこれら変動量を代入し、 C について解くと：

$$C = \frac{1}{V_c} \cdot \frac{\delta I}{\delta V}. \quad (32)$$

ここで δI はコロナ活性電極表面の電流密度摂動を積分することによって形式的に求めることができる。ただし、その求めた量には定数倍の任意性があることに注意されたい。 δV を求めるためには摂動成分に関する Poisson 方程式を解く。境界条件はゲージ自由度からカソード電極で：

$$\hat{\phi} = 0 \quad (33)$$

と置くことができる。コロナ活性電極では、Kaptsov の仮説⁽¹³⁾を適用する：

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \hat{\phi} = 0. \quad (34)$$

この式は近似を含み、電極上で電位が一定とする物理を明示的に表していないことに注意されたい。なお、Kaptsov の仮説は Townsend の第二公式と線形領域で等価である。詳細は補遺 B を参照されたい。

これらの境界条件の下で Eq. 30 を解くと、コロナ活性電極上での $\hat{\phi}$ の分布、すなわち δV の近似値が得られる。ここで求めた δI と δV は共に ϵ に比例する。このため、これら二つの量の比を取ることで ϵ の影響を相殺することができる。つまり、 ϵ を直接に求めることなく、 C の計算が可能となる。

5. 問題設定

本研究では、数値解析によって Moreau らによる実験⁽¹⁵⁾ を再現する。Fig. 2 に解析に用いる典型的な格子を示

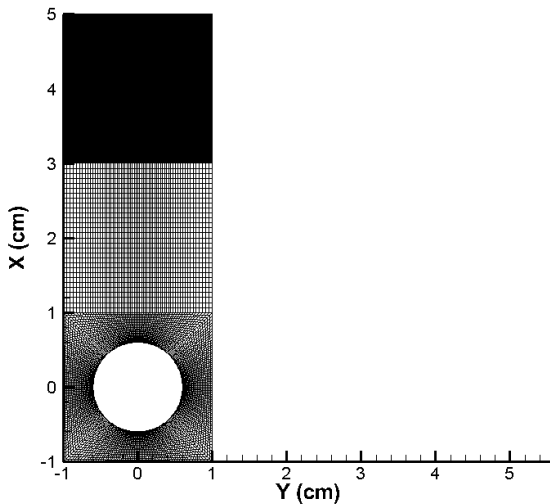


Fig. 2: The computational mesh in the case of $d = 3.4\text{cm}$ EADT.

す。また Fig. 3 にエミッター電極の近傍の拡大図を示す。エミッター電極の直径は $25\ \mu\text{m}$ であり、コレクター電極のそれは 12mm である。また、電極中心間距離 (ギャップ) を d と置く。示した格子は $d = 3.4\text{cm}$ のときのジオメトリである。コレクター電極の電位は $0\ \text{V}$ に落とし、エミッター電極の電位を変化させる。開境界に関しては、Faraday ケージの役割を果たすグラウンドを模擬するため、コレクター側の境界 ($x = -1\text{cm}$ に対応) を意図的に狭く取りグラウンドへと電位を落とした。それ以外の開境界では、物理量の勾配が零になるように設定した。

6. 結果と議論

以下、電極間ギャップ d をスイープし、コロナ放電開始電圧 V_c 、Townsend の第二公式に含まれる比例係数 C を数値的に取得した。解析には上記アルゴリズムをスト

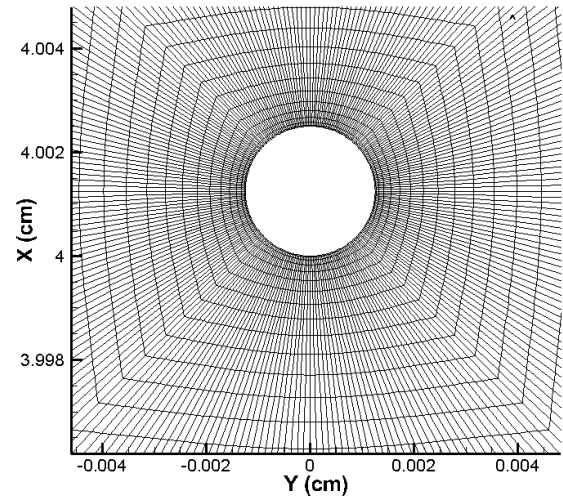


Fig. 3: The computational mesh near the emitter electrode in the case of $d = 3.4\text{cm}$ EADT (enlarged).

レートに実装可能な、“DreamLifter version 1.0” を利用した。なお、“DreamLifter” は MIT ライセンスの下でそのソースコードが一部公開されている⁽²⁰⁾。

まず Townsend の第二公式に含まれる比例係数 (C) を比較した¹。Moreau らの実験においては、電極ギャップが電極中心間距離として定義されているのか、電極表面間の距離として定義されているのかが不明である。本研究では、論文中の図などを参考に、前者の定義を採用した。ここで Tab. 1 において括弧の中の量は負イオン分布を無視した場合の C である。負イオンは 10% 程度の影響を C の推定結果に及ぼすことが分かる。つまり、その存在を無視することで、比例係数 C は過小評価される。また、 C はおおむね d^{-2} に比例しており、先行研究の実験結果や理論^(15, 2) とも定性的な整合性が取れている。

次に、コロナ放電開始電圧 (V_c) を比較した。両者の結果の差はおおむね 10% 以内に収まっており、湿度や電極アライメントの不確実性がもたらす影響を考えると、誤差の範囲であると言える。二次電子放出係数の調整によって推定結果を実験結果に近づけることは可能かもしれないが、実験条件として二次電子放出係数が明示的に与えられていないため、厳密な比較は難しい。

¹比較する論文⁽¹⁵⁾ の表 (Tab. 1) に明らかな誤りを認めたため、その単位を修正している。

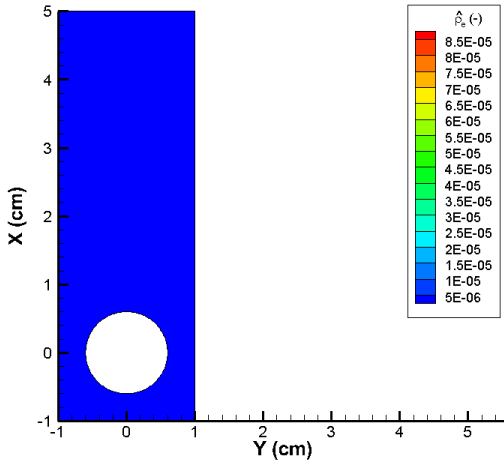


Fig. 4: The distribution of electrons density perturbation in the case of $d = 3.4$ cm EADT.

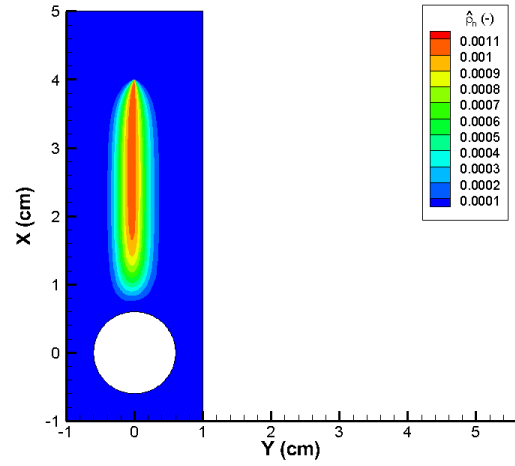


Fig. 6: The distribution of negative ions density perturbation in the case of $d = 3.4$ cm EADT.

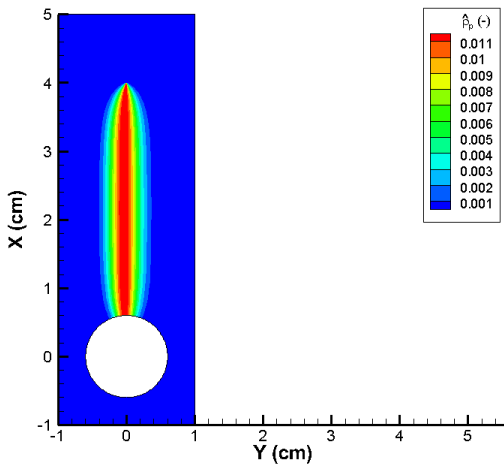


Fig. 5: The distribution of positive ions density perturbation in the case of $d = 3.4$ cm EADT.

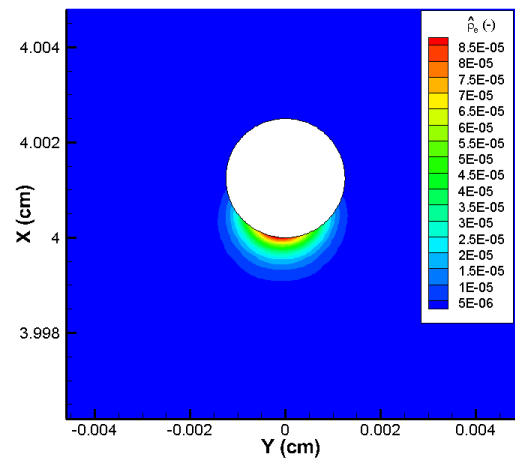


Fig. 7: The distribution of electrons density perturbation near the emitter electrode in the case of $d = 3.4$ cm EADT (enlarged).

Tab. 1: Results of numerically computed C versus experimental ones ⁽¹⁵⁾ ($\gamma_i = 0.1$)

Gap (cm)	$C_{\text{num.}}$	$C_{\text{exp.}} (\times 10^{-12} \text{A V}^{-2})$
2.6	7.45(6.13)	—
2.7	6.57(5.39)	—
2.8	5.81(4.77)	—
2.9	5.15(4.23)	—
3.0	4.59(3.77)	3.4
3.1	4.13(3.39)	—
3.2	3.71(3.05)	—
3.3	3.36(2.75)	—
3.4	3.03(2.49)	—
3.5	2.77(2.27)	—
3.6	2.52(2.07)	—
3.7	2.30(1.89)	—
3.8	2.11(1.73)	—
3.9	1.93(1.59)	—
4.0	1.78(1.45)	1.8

次に電子密度摂動, 正負イオン密度摂動の空間分布を比較した. Fig. 4 に示すように, 電子密度摂動はそのオーダーが, Fig. 5 に示す正イオン密度摂動の 1/100 程度である. これは, 電子移動度が正イオン移動度と比較し, 100 倍程度大きいことと関係していると考えられる. つまり, 軽い電子は系から速く流出する. 加え, Fig. 7 に示すように, 電子の分布はエミッター電極のごく近傍に集中している. この理由の一つとして, エミッター電極の曲率がコレクター電極のそれに比べて 100 倍以上も大きく, 電流密度が集中しやすいことを挙げられる. 一方で, 負イオン密度摂動のオーダーは, Fig. 6 に示す通り, 正イオンのその 1/10 程度であり, 大きく異なる. 正負イオンの移動度は類似するが, 負イオン密度摂動は電子密度摂動から二次的に生じるものであり, その生成メカニズムは大きく異なると言える. このケースでは, 衝突電離反応により生成された電子かつ系に残存した電子が付着反応により負イオンを生成したと考えるのが自然である.

Fig. 8 に求めたスカラー電位摂動の空間分布を示す. 注意すべき点は, 全ての空間領域で符号がマイナスである点である. これはストリーマの数値解析 ⁽¹⁷⁾ などによく知られているように, 空間電荷による Laplace 場の緩和が生じること, つまり自己安定化作用により安定な放電が実現できることを意味している. その摂動の絶対値は 10^{11} のオーダーであり, 電荷密度摂動のそれと比較して大きいように見えるが, $10^{-2} \text{ C cm}^{-3}$ 程度の空間電荷を与えられた場合の静電場の自然な応答であると考えられる.

Tab. 2: Results of numerically computed corona inception voltages versus that of experimental ones ⁽¹⁵⁾ ($\gamma_i = 0.1$)

Gap (cm)	$(V_c)_{\text{num.}}$ (kV)	$(V_c)_{\text{exp.}}$ (kV)
2.6	6.098	—
2.7	6.354	—
2.8	6.612	—
2.9	6.874	—
3.0	7.139	7.5
3.1	7.393	—
3.2	7.651	—
3.3	7.908	—
3.4	8.163	—
3.5	8.423	—
3.6	8.681	—
3.7	8.940	—
3.8	9.198	—
3.9	9.456	—
4.0	9.711	8.8

7. まとめ

プラズマアクチュエータの一種である空気電離加速型推進器 (EADT) の推力を求めるために, これまで対称性のある放電路, つまり同軸円筒座標系にのみ適用されてきた電流電圧特性 (CVCs) を摂動法によって求める手法 ⁽¹⁹⁾ を, 一般形状, 特にワイヤと円柱電極から構成される電極配置の場合へと拡張した. これにより, 現実的な時間内で数値的に EADT の推力を堅牢に計算する手法を確立できた. 併せて, 計算アルゴリズムの妥当性が Moreau らの実験結果 ⁽¹⁵⁾ との比較によって検証され, その結果, 予測誤差 10% 程度のよい一致を見た. このことから, 提案手法は実用問題を解くうえで強力なツールとなり得ると結論される.

補遺 A: Jacobian 行列方程式の解き方

本文中の Jacobian 行列 \mathcal{J} は以下のように小行列を用いて書ける:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{ee} & \mathcal{J}_{ep} & 0 & 0 \\ \mathcal{J}_{pe} & \mathcal{J}_{pp} & 0 & 0 \\ \mathcal{J}_{ne} & 0 & \mathcal{J}_{nn} & 0 \\ \mathcal{J}_{\phi e} & \mathcal{J}_{\phi p} & \mathcal{J}_{\phi n} & \mathcal{J}_{\phi\phi} \end{pmatrix} \quad (35)$$

ここで \mathcal{J}_{ep} は電子密度が正イオン密度から受ける影響で, ここでは境界条件に含まれる二次電子放出効果を表す. \mathcal{J}_{pe} は正イオン密度が電子密度から受ける影響で, ここでは正イオン密度の式に含まれる衝突電離反応の効果を表す. このように, 電子密度摂動と正イオン密度摂動に

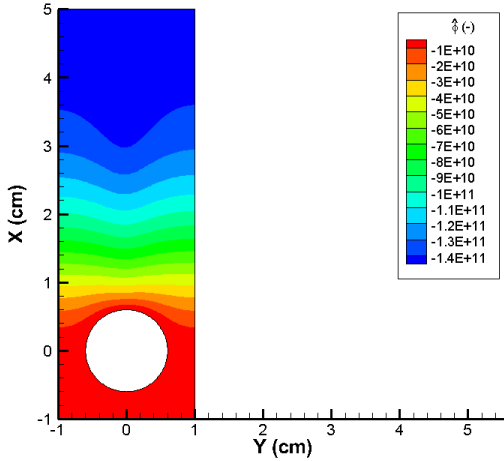


Fig. 8: The distribution of electric potential perturbation in the case of $d = 3.4$ cm EADT.

は相互作用があり、かつそれらの中で閉じている。この物理的な洞察から、小行列方程式 $\mathcal{J}_2 \hat{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{0}$ を初めに解き、併せて放電開始電圧 V_c も得る。ここに、 $\hat{\mathbf{q}}_2 = (\hat{\rho}_e, \hat{\rho}_p)^T$,

$$\mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{ee} & \mathcal{J}_{ep} \\ \mathcal{J}_{pe} & \mathcal{J}_{pp} \end{pmatrix} \quad (36)$$

である。電子密度摂動と正イオン密度摂動が得られたため、次に負イオン密度摂動を計算する。このためには、線形方程式 $\mathcal{J}_{nn} \hat{\rho}_n = -\mathcal{J}_{ne} \hat{\rho}_e$ を負イオン密度の摂動について解く。最後に、スカラ電位の摂動は離散化された以下の Poisson 方程式 (線形方程式) :

$$\mathcal{J}_{\phi\phi} \hat{\phi} = -\mathcal{J}_{\phi e} \hat{\rho}_e - \mathcal{J}_{\phi p} \hat{\rho}_p - \mathcal{J}_{\phi n} \hat{\rho}_n \quad (37)$$

をスカラ電位の摂動について解けばよい。

補遺 B: Townsend の第二公式と Kaptsov の仮説の等価性

Townsend の第二公式と Kaptsov の仮説⁽¹³⁾ の線形領域での等価性について証明する。ここでは正コロナの場合を証明するが、負コロナの場合の証明も同様に行える。

ここに、Kaptsov の仮説は :

Kaptsov の仮説
コロナ放電開始後もコロナ活性電極表面の電場強度は変化しない。

Townsend の第二公式に含まれる量は以下のように分解できる。電流について :

$$I = \oint_{\text{anode}} \mathbf{J}_e(l) \cdot \mathbf{n} dl. \quad (38)$$

比例係数について :

$$C = \oint_{\text{anode}} c(l) dl. \quad (39)$$

それゆえ、積分記号を外し、直ちに以下の式を得る。

$$\mathbf{J}_e(l) \cdot \hat{\mathbf{n}} = c(l) \cdot V \cdot (V - V_c) \quad (40)$$

ここで $V = \phi_{\text{anode}} - \phi_{\text{cathode}} > 0$ である。放電開始直後の状態量で展開すると以下の式を得る :

$$\hat{\mathbf{J}}_e(l) \cdot \mathbf{n} = c(l) \cdot V_c \cdot (\hat{\phi}_{\text{anode}} - \hat{\phi}_{\text{cathode}}) \quad (41)$$

ここで Gauge 自由度から $\hat{\phi}_{\text{cathode}} = 0$ とできる。

次に、Laplace 場に沿った電流管⁽¹⁾を考える。そして、コロナ活性電極の境界でスカラ電位の勾配を取る :

$$c \cdot V_c \cdot \nabla \hat{\phi}_{\text{anode}} = -c V_c \hat{\mathbf{E}} \quad (42)$$

$$= \nabla \cdot \hat{\mathbf{J}}_e \quad (43)$$

$$= \nabla \cdot (\mu_e \hat{\rho}_e \hat{\mathbf{E}}) \quad (44)$$

$$= \mu_e \hat{\rho}_e \nabla \cdot \hat{\mathbf{E}} \quad (45)$$

$$= \mathbf{0}. \quad (46)$$

ここで $V > V_c$ について $c \neq 0$ が成立するため、直ちに以下を得る。

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{0}. \quad (47)$$

上式は線形領域における Kaptsov の仮説を数学的に表したものである。

参考文献

- (1) C. K. Gilmore and S. R. H. Barrett. Electrohydrodynamic thrust density using positive corona-induced ionic winds for in-atmosphere propulsion. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 471(2175):20140912–20140912, 2015.
- (2) C. K. Gilmore and S. R. H. Barrett. Electroaerodynamic thruster performance as a function of altitude and flight speed. *AIAA Journal*, 56(3):1105–1117, 2017.
- (3) K. Masuyama and S. R. H. Barrett. On the performance of electrohydrodynamic propulsion. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 469(2154):20120623–20120623, 2013.

- (4) H. Shibata, Y. Watanabe, and K. Suzuki. Performance prediction of electrohydrodynamic thrusters by the perturbation method. *Physics of Plasmas*, 23(5):053512, 2016.
- (5) J. Wilson, H. Perkins, and W. Thompson. An investigation of ionic wind propulsion. *NASA Report NASA/TM*, (215822):1–36, 2009.
- (6) A. Dexter. A hybridized discontinuous Galerkin formulation for modeling electrohydrodynamic thrusters. 2015.
- (7) E. A. Christenson and P. S. Moller. Ion-neutral propulsion in atmospheric media. *AIAA Journal*, 5(10):1768–1773, 1967.
- (8) M. G. Millis and E. W. Davis. *Frontiers of propulsion science*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2009.
- (9) MIT electric aircraft initiative. <http://electricaircraft.mit.edu/>. Accessed: 2018-10-15.
- (10) S. Park, U. Cvelbar, W. Choe, and S. Y. Moon. The creation of electric wind due to the electrohydrodynamic force. *Nature Communications*, 9(1), 2018.
- (11) J. P. Boeuf, Y. Lagmich, Th. Unfer, Th. Callegari, and L. C. Pitchford. Electrohydrodynamic force in dielectric barrier discharge plasma actuators. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 40(3):652–662, 2007.
- (12) L. Liu and M. Becerra. An efficient model to simulate stable glow corona discharges and their transition into streamers. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 50(10):105204, 2017.
- (13) N. A. Kaptsov. Corona discharge and its application in electric filters. *Gostekhizdat, Moscow*, 1947.
- (14) H. Shibata, Y. Ohmichi, Y. Watanabe, and K. Suzuki. Global stability analysis method to numerically predict precursor of breakdown voltage. *Plasma Sources Science and Technology*, 24(5), 2015.
- (15) E. Moreau, B. Nicolas, L. Jean-Daniel, and C Jean-Pierre. Electrohydrodynamic force produced by a wire-to-cylinder dc corona discharge in air at atmospheric pressure. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 46(47):475204, 2013.
- (16) J. S. Townsend and P. J. Edmunds. The discharge of electricity from cylinders and points. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 27(161):789–801, 1914.
- (17) R. Morrow and J. J. Lowke. Streamer propagation in air. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 30(4):614–627, 1999.
- (18) T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and G. M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. the Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 73(2):173–189, 1989.
- (19) H. Shibata and R. Takaki. A novel method to predict current voltage characteristics of positive corona discharges based on a perturbation technique. I. local analysis. *AIP Advances*, 7(11):115026, 2017.
- (20) DreamLifter Software. <https://github.com/Shibatar/DreamLifter/>. Accessed: 2018-10-15.