

せん断流中の密度非一様粒子の運動に関する数値シミュレーション

Numerical simulation of the motion of a spherical particle with a non-uniform density distribution in shear flows

- 松浦 亮, 京工繊大院, 〒 606-8585 京都府京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : akr.m.0727.0712.0220@gmail.com
 田中 満, 京工繊大, 〒 606-8585 京都府京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : mtanaka@kit.ac.jp
 田尻 恭平, 京工繊大, 〒 606-8585 京都府京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : tajiri@kit.ac.jp
 西田 秀利, 京工繊大, 〒 606-8585 京都府京都市左京区松ヶ崎御所海道町, E-mail : nishida@kit.ac.jp
 Akira MATSUURA, Dept.of Mechanophysics,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki,kyoto,606-8585,JAPAN
 Mitsuru TANAKA, Dept.of Mechanophysics,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki,kyoto,606-8585,JAPAN
 Kyohei TAJIRI, Dept.of Mechanophysics,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki,kyoto,606-8585,JAPAN
 Hidetoshi NISHIDA, Dept.of Mechanophysics,Kyoto Inst.Tech., Matsugasaki,kyoto,606-8585,JAPAN

Particle-laden flows are frequently seen in many natural phenomenon and industrial plants such as debris flows, sediment transportations, mixing tanks and fluidized reactors. Most of them contain spherical particles not only with a uniform density but also with non-uniform ones. In this paper, a direct numerical simulation of homogeneous shear flows laden with a finite-size spherical particle is performed by using an immersed boundary method to investigate how the difference between uniform density and non-uniform density influences on the flow.

1. 諸言

固体粒子を含む乱流は、多くの自然現象や工業装置において見られる。例えば、製紙、バイオマス燃焼、雲の内部での氷結晶形成、海洋でのプランクトンの運動などがある。近年、多くの数値計算が行われ、密度一様粒子を含んだ流れの計算手法として、Uhlmann の埋め込み境界法⁽¹⁾が挙げられる。この手法では粒子境界上に Lagrangian Force Point と呼ばれるマーカー点となる格子点を配置し、その格子と計算格子との関係から粒子と流体の境界における速度条件を満足するように外力項を Navier-Stokes 方程式に付加することにより、有限サイズの粒子を表現することが可能である。なお、Navier-Stokes 方程式の外力項の評価は粒子境界上の Lagrangian Force Point 上の速度を用いて計算する。一般的な粒子を含む流れは密度一様粒子だけでなく、密度非一様粒子も含まれている。しかし、この Uhlmann の埋め込み境界法は、密度一様粒子には多くの適用例があるが、密度非一様粒子に対して十分な検証が行われていない。そのため、Uhlmann の埋め込み境界法をより多くの流れ場に適用させるために密度非一様粒子に対しても適用が望まれる。そこで本研究では、密度非一様粒子と密度一様粒子との運動の違いについて解析するため、埋め込み境界法を用いた直接数値シミュレーションを行い、密度非一様粒子を含んだ一様せん断流のシミュレーションを行い、密度非一様粒子の挙動を調査及び考察する。

2. 基礎方程式

2.1 流体の方程式

以下に流れの支配方程式である連続の式および Navier-Stokes 方程式 (NS 式) を示す。

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \quad (2)$$

ここで、 $i = 1, 2, 3$ は各方向を表し、 u_i は流速の各成分、 t は時間、 ρ_f は流体の密度、 p は圧力、 ν は動粘性係数、 f_i は相間相互作用を表す外力の各成分である。

2.2 運動方程式

粒子の運動は、剛体の運動量と角運動量に対するニュートンの運動方程式に従い、相互作用力を用いると以下の式で表される。

$$\begin{aligned} m_p \frac{d\mathbf{u}_c}{dt} &= \rho_p V_p \frac{d\mathbf{u}_c}{dt} \\ &= -\rho_f \int_{\Omega} \mathbf{f} dV + \rho_f \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \mathbf{u} dV \right) + (\rho_p - \rho_f) V_p \mathbf{g} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{I}_p \cdot \boldsymbol{\omega}_c)}{dt} &= -\rho_f \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \times \mathbf{f} dV + \rho_f \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \times \mathbf{u} dV \right) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 m_p , ρ_p , V_p , 及び $\mathbf{I}_p$ はそれぞれ粒子の質量、密度、体積、慣性テンソルである。 $\mathbf{u}_c$, $\boldsymbol{\omega}_c$, $\mathbf{x}_c$ はそれぞれ粒子の重心の速度、角速度、位置を表している。また、剛体近似が利用できる場合には式 (3), (4) はそれぞれ

$$(\rho_p - \rho_f) V_p \frac{d\mathbf{u}_c}{dt} = -\rho_f \int_{\Omega} \mathbf{f} dV + (\rho_p - \rho_f) V_p \mathbf{g} \quad (5)$$

$$\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \frac{d(\mathbf{I}_p \cdot \boldsymbol{\omega}_c)}{dt} = -\rho_f \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \times \mathbf{f} dV \quad (6)$$

のように書き換えられる。

3. 計算手法

3.1 Uhlmann の埋め込み境界法

埋め込み境界法は、以下の Fig.1 のように物体の内外ともに同種の非圧縮性流体で満たされているとみなし、境界近傍の格子点に適切な体積力を加えることで、滑りなし条件を満足させる方法である。境界上に Lagrangian force points と呼ばれるマーカー点を配置し、デカルト格子点上で定義された値と、マーカー点上で定義された値

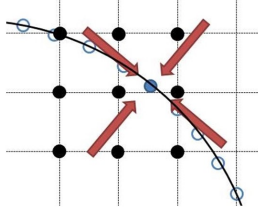


Fig. 1: Schematic of the immersed boundary.

を用いて計算を行う。図において、黒丸がデカルト格子点を表し青丸がLagrangian force pointsを表している。

速度場と圧力場のカップリングには部分段階法を用いる。時間積分には、対流項、粘性項に2次精度 Adams-Bashforth 法を適応させる。NS 式の時間微分項を離散化すると、

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^n + \Delta t \left(-\frac{1}{\rho_f} \nabla p^{n-1/2} + \frac{3}{2} \mathbf{rhs}^n - \frac{1}{2} \mathbf{rhs}^{n-1} \right) \quad (7)$$

のように予測速度を求めることができる。ここで、

$$\mathbf{rhs} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (8)$$

であり、 Δt は時間間隔である。次に、部分段階速度 $\mathbf{u}^*$ を

$$\mathbf{u}^* = \tilde{\mathbf{u}} + \Delta t \mathbf{f}^{n+1/2} \quad (9)$$

のように求める。ここで、 $\mathbf{f}$ は相関相互作用力に伴う体積力であり、

$$\mathbf{f}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{u}^{(d)} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} \quad (10)$$

と表される。 $\mathbf{u}^{(d)}$ はこの体積力が作用したときの想定速度である。Uhlmann の手法では、相互作用力は物体境界上に分布させたマーカー一点上で評価する。m 番目の物体上にある1個目のマーカー一点の位置ベクトルを $\mathbf{X}_l^{(m)}$ と表し、マーカー一点上で定義される値を大文字で表すと、マーカー一点上での体積力は、

$$\mathbf{F}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{U}^{(d)} - \tilde{\mathbf{U}}}{\Delta t} \quad (11)$$

のように表される。流れの基礎方程式を解く際に用いるのはデカルト格子点での値であるので、デカルト格子点での値をマーカー一点上での値から補間する必要がある。具体的には、IBM から体積力を計算するためにデカルト格子点での予測速度 $\tilde{\mathbf{u}}$ を $\tilde{\mathbf{U}}$ に変換する操作と、求められた

体積力 $\mathbf{F}$ を $\mathbf{f}$ へ変換する操作の二つである。これらの補間に使用する式はそれぞれ、

$$\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{X}_l^{(m)}) = \sum \mathbf{u}^*(x) D(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l^{(m)}) \Delta x^3 \quad (12)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{N_p} \sum_{l=1}^{N_L} \mathbf{F}(\mathbf{X}_l^{(m)}) D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l^{(m)}) \Delta V_l^{(m)} \quad (13)$$

である。ここで、 Δx は格子間隔である。また、 ΔV はラグランジュ格子セルの体積である。 N_p , N_L はそれぞれ、球および球の境界上のマーカー一点の数である。また、 $D(x)$ はデルタ関数を平滑化したものであり、今回使用するのは、

$$D(\mathbf{x} - \mathbf{X}_l^{(m)}) = \frac{1}{\Delta x^3} \delta_h \left(\frac{x - X_l^{(m)}}{\Delta x} \right) \delta_h \left(\frac{y - Y_l^{(m)}}{\Delta x} \right) \delta_h \left(\frac{z - Z_l^{(m)}}{\Delta x} \right) \quad (14)$$

$$\delta_h(r) = \begin{cases} \frac{1}{3}(1 + \sqrt{1 - 3r^2}) & (0 \leq |r| < 0.5) \\ \frac{1}{6}(5 - 3|r| - \sqrt{-3(1 - |r|)^2 + 1}) & (0.5 \leq |r| < 1.5) \\ 0 & (1.5 \leq |r|) \end{cases} \quad (15)$$

である。これらの式を用いて式 (13) より相互作用力 $\mathbf{f}$ を求める。

3.2 マーカー一点の配置

粒子の境界上のマーカー一点の配置には、Saff and Kuijilaars⁽²⁾ によって提案された球に対する式を用いる。マーカー一点の球座標はマーカー一点の個数を N_L とすると以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \theta_k &= \arccos(h_k), h_k = -1 + \frac{2(k-1)}{(N_L-1)} \\ &\quad (1 \leq k \leq N_L) \\ \phi_1 &= \phi_{N_L} = 0, \phi_k = \phi_{k-1} + \frac{3.6}{\sqrt{N_L}} \frac{1}{\sqrt{1-h_k^2}} \\ &\quad (2 \leq k \leq N_L - 1) \end{aligned} \quad (16)$$

球の半径を r_p とするとマーカー一点の個数 N_L は、

$$N_L = \frac{(r_p + \Delta x/2)^3 - (r_p - \Delta x/2)^3}{3\Delta x^3/(4\pi)} \quad (17)$$

で求められる。

3.3 粒子の重心移動による各物理量の求め方の変更

Fig.2 に示すように内部が空洞の粒子の内部表面に半径が $r/2$ で密度比 8 の小さい球形粒子を接着する．この粒子の平均密度は流体と同一である．重心 G は粒子の中心 C から $r/2$ 離れている．

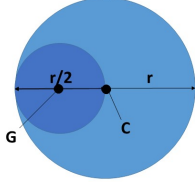


Fig. 2: A spherical particle with a non-uniform density distribution.

並進運動の重心の運動方程式より $\mathbf{u}$ を求め、その後以下の式を用いて $\mathbf{u}_C$ を求める．

$$\mathbf{u}_C = \mathbf{u}_G + \boldsymbol{\omega} \times \vec{GC} \quad (18)$$

3.4 GC の角速度、角度を求める方法

角運動量と角速度の関係式とその時間微分は以下のようにして表せる．

中心に相対的な速度より求められる中心周りの角運動量を $\mathbf{L}_{Crel}$ とし、 $\mathbf{I}_C$ を C 周りの質量慣性テンソルとすると、式 (19) の関係が成り立つ．

$$\mathbf{L}_{Crel} = \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} \quad (19)$$

これを時間微分すると

$$\frac{d\mathbf{L}_{Crel}}{dt} = \mathbf{N}_C + \vec{GC} \times m\mathbf{a}_C \quad (20)$$

の関係が成り立つ．ここで $\mathbf{N}_C$ は中心 C 周りのトルクを表す．

粒子に働くトルクより式 (20) を用いて $\mathbf{L}_{Crel}$ を求め、式 (19) より $\boldsymbol{\omega}$ を求める．そして、四元数を利用して $\vec{GC}$ の方向を求める．

4. 境界条件

主流方向、スパン方向は周期境界条件とする．せん断方向では境界が無次元時間 St で距離 StL_2 だけ x_1 方向にずれるため、速度については、

$$u_i(x_1 + L_1, x_2, x_3) = u_i(x_1, x_2, x_3) \quad (21)$$

$$u_i(x_1, x_2 + L_2, x_3) = u_i(x_1 - StL_2, x_2, x_3) + SL_2 \delta_{i1} \quad (22)$$

$$u_i(x_1, x_2, x_3 + L_3) = u_i(x_1, x_2, x_3) \quad (23)$$

圧力については、

$$p(x_1 + L_1, x_2, x_3) = p(x_1, x_2, x_3) \quad (24)$$

$$p(x_1, x_2 + L_2, x_3) = p(x_1 - StL_2, x_2, x_3) \quad (25)$$

$$p(x_1, x_2, x_3 + L_3) = p(x_1, x_2, x_3) \quad (26)$$

となるようなせん断周期境界条件を設定する．

5. 密度非一様粒子を含んだ一様せん断流

5.1 初期条件

初期条件として一様せん断流を与える．粒子は中心で一様せん断流の速度が 0 となる位置に配置する．

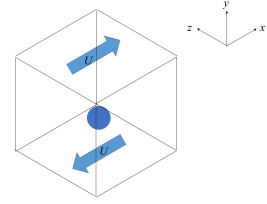


Fig. 3: Computational domain.

計算領域を Fig.3 に示す．計算領域 $L_1 \times L_2 \times L_3$ は $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ ，格子点数 $N_1 \times N_2 \times N_3$ は $192 \times 96 \times 96$ とした．球の半径は $6.4\Delta x$ マーカー点の個数は 469 点に設定した．詳細な計算条件を Tab.1 に示す．

Tab. 1: Computational conditions.

Grid spacing	Δx	4.91×10^{-2}
Time increment	Δt	1.66×10^{-3}
Density ratio	ρ_p/ρ_f	1.0
Kinematic viscosity	ν	3.03×10^{-3}
Shear rate	S	8/17

5.2 結果

Fig.2 に粒子の重心位置の時間変化, Fig.2 粒子の中心の時間変化を示す.

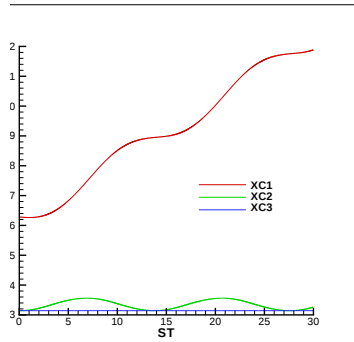


Fig. 4: Time evolution of the position of the particle centroid.

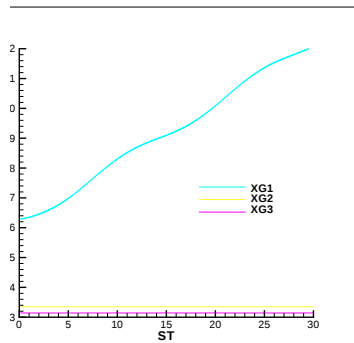


Fig. 5: Time evolution of the position of the particle center.

以上より密度非一様粒子の場合は重心を中心に一定の周期で回転していることが分かる.

6. 結言

密度非一様粒子を含んだ一様せん断流において, 粒子の動きに周期性が見られたことが分かった. 今後は粒子の密度非一様粒子において, 密度比や粒子の大きさによってどういった運動の違いが見られるかを検証していく.

7. 参考文献

- (1) Markus Uhlmann, An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows, Journal of Computational Physics 209, (2005), 451-455.
- (2) E. B. Saff, A. B. Kuijlaars, Distributing many points on a sphere, The mathematical intelligencer, 19-1, (1997), 5-11.