

二重解像度格子法を用いた保存型レベルセット法の有効性

Effectiveness of a conservative Level set method using dual-resolution grid

- 竹内 一貴, 京工織大院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町,, E-mail : m7623019@edu.kit.ac.jp
 田中 満, 京工織大, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町,, E-mail : mtanaka@kit.ac.jp
 田尻 恭平, 京工織大, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町,, E-mail : tajiri@kit.ac.jp
 西田 秀利, 京工織大, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町,, E-mail : nisida@kit.ac.jp

Kazuki TAKEUCHI Dept.of Mechanophysics,Kyoto Inst., Matsugasaki,kyoto,606-8585,JAPAN

Mitsuru Tanaka Dept.of Mechanophysics,Kyoto Inst., Matsugasaki,kyoto,606-8585,JAPAN

Kyohei Tajiri Dept.of Mechanophysics,Kyoto Inst., Matsugasaki,kyoto,606-8585,JAPAN

Hidetoshi Nishida Dept.of Mechanophysics,Kyoto Inst., Matsugasaki,kyoto,606-8585,JAPAN

We present an efficient conservative level set (CLS) method using dual-resolution grid for numerical simulations of two-phase flows. We adopt the dual-resolution Cartesian grid on which a finer resolution is applied only to the CLS function. The result obtained on the dual-resolution grid using a coarser grid for the velocity and pressure fields is compared with that on the single-resolution grid.

1. 緒言

二相流とは、気体、液体、固体の内、二つが混在している流れでのことであり、自然現象や工業装置に多く見られる。例えば、加熱器や熱交換器の蒸発部、化学反応層の攪拌などが挙げられる。二相流の数値モデリングとシミュレーションについて多くの研究が行われてきた。二相流は、界面を追跡または捕捉する手法を用いて、Navier-stokes 方程式を解くことによって計算される。その中でフロントトラッキング法⁽¹⁾、Volume of fluid (VOF) 法^{(2),(3)}、レベルセット法^{(4),(5)}が広く用いられる。レベルセット法では、界面を、符号付き距離関数で表現することによって捕捉する。この方法では、滑らかな距離関数を使用して界面の法線と曲率を正確に計算できる。しかし、距離関数の移動および再構築においては、体積減少がおこる。体積誤差を減らすために、Olsson と Kreiss⁽⁶⁾は距離関数の代わりに保存型レベルセット関数 (CLS 関数) を提案した。保存型レベルセット法の最初期化方程式により、体積保存性が大幅に改善された。しかしながら、界面が厚い場合、界面の余分な動きが生じる。従って界面を薄くする必要があり、その分計算時間が長くなる。このような状況を改善するために、CLS 関数のみに高い解像度が適用される二重解像度格子に焦点を当てる。本研究では、二重解像度格子上の保存型レベルセット法を使用し、その効率を調べるためにいくつかの試験を行った。また CLS 最初期化方程式を最近提案された方程式に変更することによって、固定界面の余分な変形が減少するかどうかが調べる。

2. 基礎方程式

非圧縮粘性流体の運動を考える。基礎方程式は連続の式および非圧縮性 Navier-stokes 方程式 (NS 方程式) であり、それぞれ次式で表される。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\rho(\psi) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu(\psi)(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] + \mathbf{SF} + \rho(\psi) \mathbf{g} \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{u} は流速、 p は圧力、 $\rho(\psi)$ は密度、 $\mu(\psi)$ は粘性係数、 \mathbf{SF} は界面張力項、 \mathbf{g} は重力加速度である。

密度および粘性係数は以下のように計算をする。

$$\rho = \psi \mu_1 + (1 - \psi) \mu_2 \quad (3)$$

$$\mu = \psi \mu_1 + (1 - \psi) \mu_2 \quad (4)$$

1 は分散相、2 は連続相を表すものとする。

2.1 保存型レベルセット法 (CLS 法)

レベルセット関数の不連続性は数値解の不安定性の原因になるため、実際には

$$\psi(\phi) = \frac{1}{2} \left(\tanh \left(\frac{\phi}{2\epsilon} \right) + 1 \right) \quad (5)$$

のような双曲線正接関数が保存型レベルセット法のレベルセット関数として用いられる。ここで、 ϵ は界面幅である。それを以下の式に従って移流させる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \psi) = 0 \quad (6)$$

2.2 CLS 関数の再初期化

CLS 関数の再初期化に用いられる一般的な式として、Olsson と Kreiss⁽⁶⁾によって提案された式がある。

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \nabla \cdot [\epsilon (\nabla \psi \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \psi (1 - \psi) \mathbf{n}] \quad (7)$$

ここで、 \mathbf{n} は界面法線ベクトルであり、以下のように CLS 関数を用いて求められる。

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|} \quad (8)$$

CLS 関数は移流後に再初期化方程式により再初期化を行うことで双曲線正接関数の性質が維持されるが、再初期化を繰り返していくと、界面が変形してしまうという問題がある。Waclawczyk⁽⁷⁾は ψ の関数変換より求められる距離関数を以下のように定義する。

$$\phi_{map} = \ln \left(\frac{\psi}{1 - \psi} \right) \quad (9)$$

ϕ_{map} を用いて式 (7) を以下のように修正した。

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \nabla \cdot [\psi (1 - \psi) (\nabla \phi_{map} \cdot \mathbf{n} - 1) \mathbf{n}] \quad (10)$$

式 (10) の導出には以下の関係が用いられる.

$$\epsilon \nabla \psi = \psi(1 - \psi) \nabla \phi_{map} \quad (11)$$

ϕ_{map} は ψ よりも滑らかな関数であるため, $\nabla \psi$ を直接計算するよりも $\nabla \phi_{map}$ を計算した方が誤差が小さい. そのため, 再初期化の計算誤差が相対的に小さくなり, 界面の変形が抑制される. 式 (10) の法線ベクトルは ϕ_{map} を用いて式 (12) のように求められる.

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \phi_{map}}{|\nabla \phi_{map}|} \quad (12)$$

さらに, Chiodi と Desjardings⁽⁸⁾ は式 (10) 中の $\psi(1 - \psi)$ を

$$\psi(1 - \psi) = \frac{1}{4 \cosh^2 \frac{\phi_{map}}{2\epsilon}} \quad (13)$$

のように置き換え, 式 (10) を

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \nabla \cdot \left[\frac{1}{4 \cosh^2 \frac{\phi_{map}}{2\epsilon}} (\nabla \phi_{map} \cdot \mathbf{n} - 1) \mathbf{n} \right] \quad (14)$$

とした最初期化方程式を提案している. 二重解像度格子法での安定性の向上させるため, さらに我々は式 (7) および, 式 (14) の二つを線形結合した以下の式を提案する.

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \nabla \cdot \left[(1 - \beta) \epsilon \nabla \psi + \frac{1}{4 \cosh^2 \left(\frac{\phi_{map}}{2\epsilon} \right)} (\beta \phi_{map} \cdot \mathbf{n}_\phi - 1) \cdot \mathbf{n}_\phi \right] \quad (15)$$

ここで, β は二つの式の割合を表しており, $\beta = 0.0$ の時, 式 (7) となり, $\beta = 1.0$ の時, 式 (14) となる.

2.3 界面張力項

界面張力 SF に関しては CSF(a continuum surface force) モデルを使用する.

$$\mathbf{SF} = \sigma \kappa \nabla \psi \quad (16)$$

曲率 κ の計算は以下のように行う.

$$\kappa = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi_{map}}{|\nabla \phi_{map}|} \right) \quad (17)$$

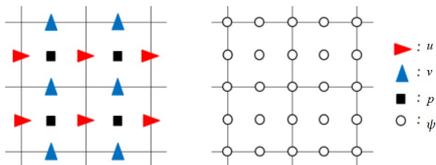


Fig. 1: Configuration of the dual-resolution grid.

2.3.1 二重解像度格子 (dual-resolution grid)

二重解像度格子法 (dual-resolution grid) は Gada and Sharma⁽⁹⁾ と Ding and Yuan⁽¹⁰⁾ らによって提案された. この手法は上図のように格子はスタaggerド格子を用いて, 圧力はセル中心, 速度はセル表面で定義される. また CLS 関数をセル中心, セル表面, セル頂点で定義し, 速度場や圧力場に用いる解像度の 2 倍の解像度を得ることができする方法である. NS 方程式に関するものを coarse grid, CLS 関数に使用するものを Fine grid とする. Coarse grid に使う格子幅を Δx^c , Fine grid に使う格子幅を Δx^f と

定義する. また CLS 関数の移流に必要な速度は以下の式を用いて求める.

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2},j}^F &= \frac{1}{4}(u_{i-1,j}^C + 3u_{i+1,j}^C) \\ u_{i+\frac{1}{2},j-1}^F &= \frac{1}{8}(u_{i-1,j}^C + 3u_{i+1,j}^C + u_{i-1,j-2}^C + 3u_{i+1,j-2}^C) \\ v_{i,j-\frac{1}{2}}^F &= \frac{1}{4}(v_{i,j+1}^C + 3v_{i,j-1}^C) \\ v_{i+1,j-\frac{1}{2}}^F &= \frac{1}{8}(v_{i,j+1}^C + 3v_{i,j-1}^C + v_{i+2,j+1}^C + 3v_{i+2,j-1}^C) \end{aligned} \quad (18)$$

本研究では, 二重解像度格子法の有効性を検証するために, 二重解像度格子法を用いない場合においても計算を行う. その場合, 速度場や圧力場は同じスタaggerド格子を使用し, CLS 関数はセルの中心に定義する.

2.4 計算手法

CLS 関数の移流には MP5 法⁽¹¹⁾ を用いる. レベルセット関数の移流項と拡散項には三次精度のルンゲクッタ法を用いる. NS 方程式の対流項には二次精度保存型中心差分法, 拡散項には二次精度中心差分法を用いる. NS 方程式の時間積分には, フラクショナルステップ法を用いる. NS 方程式の対流項, 拡散項や重力項には 2 次精度 Adams-Bashforth 法を用いる. 密度の違う流れの圧力を計算するために, Dodd and Ferrante⁽¹²⁾ の手法を用いて圧力補正を行う. 圧力ポアソン方程式の解法には高速フーリエ変換 (FFT) を用いる.

3. 計算結果及び考察

保存型レベルセット法における二重解像度格子法の有効性を検証するために, capillary wave test と rising bubble test を行った. capillary wave test では界面張力の強い状況での検証を, rising drop test では界面が変形する状況での検証を想定している. 二重解像度格子を用いた場合で, 結合した式 (15) の有効性を示す.

3.1 capillary wave test

CLS 関数の初期分布を Fig.2 に示す. 今回用いるパラメータは Table1 に記載する,

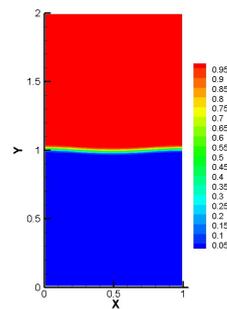


Fig. 2: Initial distribution of CLS function.

Tab. 1: Parameters used for the capillary wave test

Laplace number La	3000
Cahn number Cn	0.03125
Density ratio	1.0
Viscosity ratio	1.0

3.1.1 case1 まず初めに二重解像度格子法を用いる場合と用いない場合の差を比べる。Table2 には解像度の異なる 3 つのケースを記載する。またその三つの振幅の時間発展を表したものを Fig.3 に記載する。

Tab. 2: Number of grid points

case	Course grid	Fine grid
Single16	16	32
Single32	32	32
Dual16-32	16	32

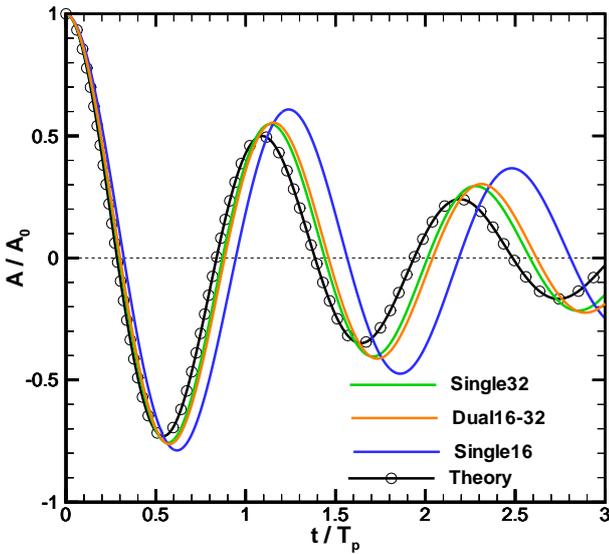


Fig. 3: Time evolution of wave amplitude.

Fig.3 は縦軸は初期からの界面の振幅比を表す。まず Single16 と Single32 を比較する。そうすると格子解像度を上げると理論値と近くなるのがわかる。次に single32 と Dual16-32 を比較すると、両者の結果は近い値をとっていることがわかる。このことより二重解像度格子法が有効であるといえる。

3.1.2 case2 次に従来の二つの式と今回提案した式を比較する。まず、Original equation(式 (7))と式 (15)の式を使用した式の最初期化の強さを変えて、比較をおこなった。Fig.4 は式 (7)を使用した場合の結果を示し、Fig.5 は式 (15)の結果を示したものである。ここで図の中にある 1,2,5 は界面の再構築の強さを表しており、数字が大きくなるにつれて再構築の強さが増している。

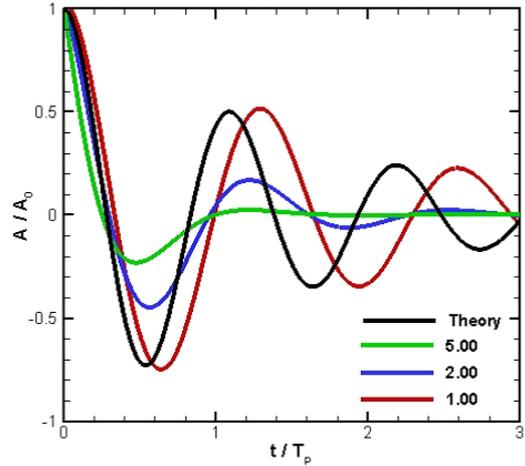


Fig. 4: Time evolution of wave amplitude for eq(7).

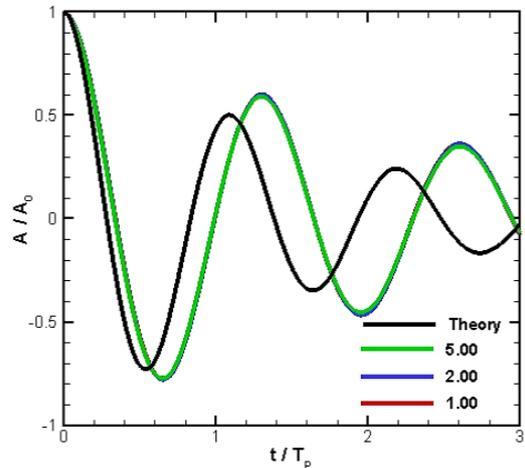


Fig. 5: Time evolution of wave amplitude for eq(15).

二つの結果を比較すると、Original equation を用いた場合 (Fig.(4)) では、再構築の強さによって結果が変化しているのに対し、提案した式を用いた場合 (fig.(5)) では、界面の再構築の強さを変えた場合でも結果の差が見られないことがわかる。

3.1.3 case3 次に式 (14) および式 (15) を再構築の式として、用いた場合の長時間計算をおこなった。Fig.6 は式 (14) を使用した場合の結果を示し、Fig.7 は式 (15) の結果を示したものである。

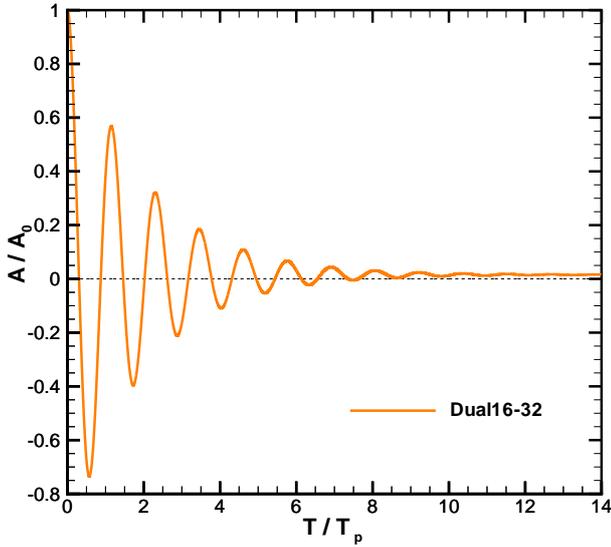


Fig. 6: Long-time behavior of wave amplitude for eq(10).

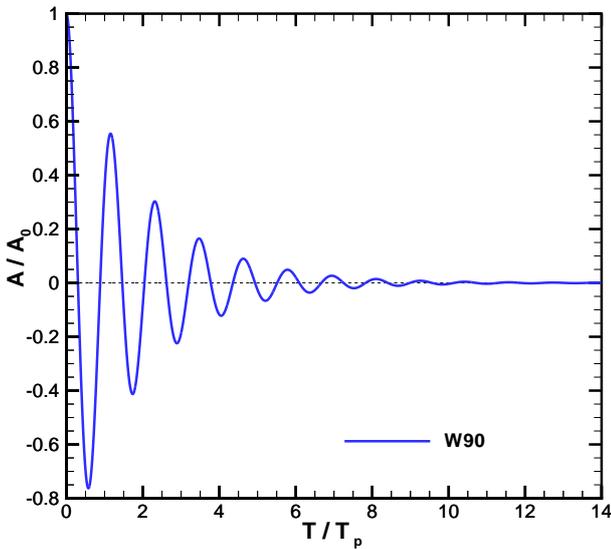


Fig. 7: Long-time behavior of wave amplitude for eq(15).

式 (14) を用いた結果では 0 から離れた値に収束していることがわかる。一方、式 (15) を用いると計算結果が 0 の近くで収束していることがわかる。

3.2 rising drop test

次に並進運動に対して二重解像度格子が有効であるかの検証を行う。静止流体中を浮力による上昇する気泡の終端速度を、Tryggvason⁽¹³⁾ らによる Front tracking 法の計算結果と比較する。気泡上昇速度 u_b 、気泡直径 d に基づく気泡レイノルズ数 $Re_b = u_b d / \nu$ で評価を行う。今回用いるパラメータは Table3 と Table4 に記載する。気泡上昇速度に基づく気泡レイノルズ数の時間発展を Fig.8 に示す。

Tab. 3: Parameters for rising bubble test

Density ratio	0.1
Viscosity ratio	0.1
Eötvös number Eo	2.0
Morton number Mo	1.0×10^{-5}
Archimedes number Ar	894.427
void fraction of bubble α	0.126

Tab. 4: Number of grid points

case	Course grid	Fine grid
Single32	$32 \times 32 \times 32$	$32 \times 32 \times 32$
Single64	$64 \times 64 \times 64$	$64 \times 64 \times 64$
Dual3264	$32 \times 32 \times 32$	$64 \times 64 \times 64$

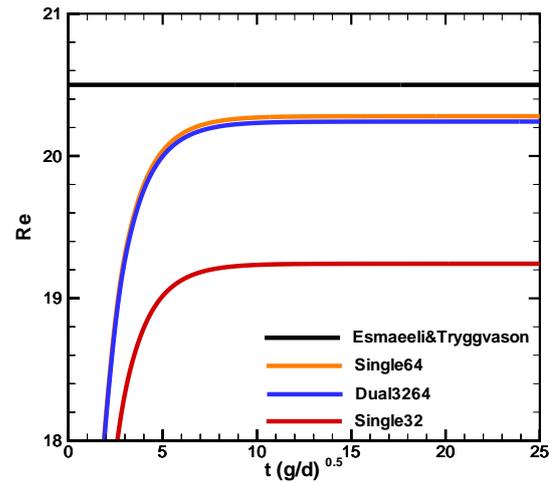


Fig. 8: Time evolution of the bubble Reynolds number.

Fig.8 では、Table4 に記載した 3 つのパターンの結果を示している。capillary wave test の結果同様、まず Single32 と Single64 を比較する。そうすると格子解像度を上げると

理論値と近くなることがわかる。次に Single64 と Dual32-64 を比較すると、両者の結果は近い値をとっていることがわかる。Dual32-64 では、Single64 に比べて計算時間が4分の1となっている。このことにより、Dual32-64 の計算コストは single64 の場合と比べて計算コストが削減されていることが言える。

3.3 大変形をする気泡

上昇気泡の中でも、気泡が大きく変形する場合、どのようになるのか検証をおこなった。今回、Eötvös number $Eo = 116$, Morton number $Mo = 41$ として、検証を行い、各種パラメータは Table.5 および 6 のとおりであり、結果を Fig9 に記載する。

今回比較する実験結果は, Bhaga, and, weber⁽¹⁴⁾ より、実験値 ($Re = 7.16$) と比較する。

Tab. 5: Parameters for rising bubble test

Density ratio	0.1
Viscosity ratio	0.1
Eötvös Eo	116
Morton number Mo	41
Archimedes number Ar	195

Tab. 6: Number of grid points

case	Course grid	Fine grid	$D/\Delta x^F$
Single32	$32 \times 32 \times 128$	$32 \times 32 \times 128$	9.936
Single64	$64 \times 64 \times 256$	$64 \times 64 \times 256$	19.87
Dual3264	$32 \times 32 \times 128$	$64 \times 64 \times 256$	19.87

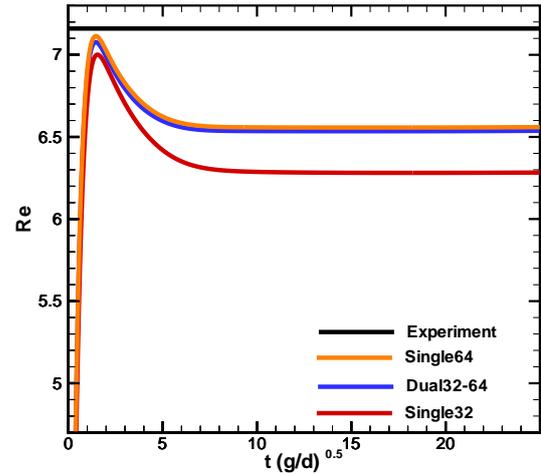


Fig. 9: Time evolution of the bubble Reynolds number.

変形する場合でも Single64 と Dual32-64 を比較した時、近い値になったので計算結果が良好になっていることがわかる。

4. 結言

本研究では、保存型レベルセット法を用いて、検証をおこなったが、二重解像度格子法を用いた場合と用いていない場合では結果が良好に一致することがわかった。また二重解像度格子法を用いると結果的に計算コストが75%抑えることが出来ることがわかった。また、結合した式を用いれば式 (7), 式 (14) の式での利点を取り入れて安定的な計算が出来るようになったことがわかった。

- (1) Tryggvason, G., Bunner, B., Esmaeeli, A., Juric, D., Al-Rawahi, N., Tauber, W., Han, J., Nas, S., Jan Y.-J., "A Front-Tracking Method for the Computations of Multiphase Flow", Journal of Computational Physics, 169, pp. 708-759 (2001).
- (2) Hirt, C., Nichols, B., "Volume of Fluid Method for the Dynamics of Free Boundaries", Journal of Computational Physics, 39, pp. 201-225 (1981).
- (3) Rider, W., Kothe, D., "Reconstructing Volume Tracking", Journal of Computational Physics, 141, pp. 112-152 (1998).
- (4) Osher, S., Sethian, J. A., "Fronts Propagating with Curvature-Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations", Journal of Computational Physics, 79, pp. 12-49 (1988).
- (5) Sussman, M., Fatemi, E., Smerekc, P., Osher, S., "An Improved level Set Method for Incompressible Two-Phase Flows", Computers & Fluids, 27, pp.663-680 (1998).
- (6) Olsson, E., Kreiss, G., "A Conservative Level Set Method for Two Phase Flow," Journal of Computational Physics, 210, pp. 225-246 (2005).
- (7) Waclawczyk, T., "A Consistent Solution of the Re-Initialization Equation in the Conservative Level-Set Method," Journal of Computational Physics, 299, pp. 487-525 (2015).

- (8) Chiodi, R., Desjardins, O., “A Reformulation of the Conservative Level Set Reinitialization Equation for Accurate and Robust Simulation of Complex Multiphase Flows,” *Journal of Computational Physics*, 343, pp. 186-200 (2017).
- (9) Gada, V. H., Sharma, A., “On a Novel Dual-Grid Level-Set Method for Two-Phase Flow Simulation, Numerical Heat Transfer”, Part B: Fundamentals, 59, pp. 26-57 (2011).
- (10) Ding, H., Yuan, C., “On the Diffuse Interface Method Using a Dual-Resolution Cartesian Grid,” *Journal of Computational Physics*, 273, pp. 243-254 (2014).
- (11) Suresh, A., Huynh, H. T., “Accurate Monotonicity-Preserving Schemes with Runge-Kutta Time Stepping”, *Journal of Computational Physics*, 136, pp. 83-99 (1997).
- (12) Dodd, M. S., and Ferrante, A., “A Fast Pressure-Correction Method for Incompressible Two-Fluid Flows,” *Journal of Computational Physics*, 273, pp. 416-434 (2014).
- (13) Esmaeeli A., Tryggvason G., “Direct Numerical Simulations of Bubbly Flows Part 2. Moderate Reynolds Number Arrays,” *Journal of Fluid Mechanics*, 385, pp.325-358 (1999).
- (14) D.Bhada, M.E.Weber, “Bubble in viscous liquids :shapes, wakes and velocities” *Journal of Fluid Mechanics*, 105, pp61-85(1981)