

## 直交格子法の課題；連続の式を満たすための技法あれこれ，ほか

### Tasks for Cartesian grid method; Some techniques to satisfy the continuity equation, and others

○ 今村純也, *imi* 計算工学研究室, 351-0114 和光市本町 31-9-803, E-mail: jimamura@ra2.so-net.ne.jp  
Junya Imamura, *imi* Computational Engineering Laboratory, 351-0114 Wako-shi, Honcho 31-9-803

The Cartesian grid method has several merits other than simple geometrical handling; however, these merits do not need to be discussed. As known, this method contains two tasks. One is it includes distortion and another one is low compatibility to boundary shapes. The distortion terms appear in  $\nabla \text{div} \mathbf{U}$ . Assume an incompressible flow field, and some techniques are proposed for satisfying the continuity equation. Further, two techniques are proposed to ensure the latter task.

#### 1. 背景と目的

直交格子法は幾何学的取り扱いが容易で，そのメリットは今さら論じるまでもない。ただ，三角形要素・四面体要素に比べての課題は，ゆがみ項を含むことへの対応と境界形状への適合法の 2 点に在ると言えよう。

ゆがみ項の問題への対処法として，いわゆる非適合要素を加えてせん断ロックングに対応する技法が知られている。

境界値問題は，ラプラス方程式に関して数学的に整理されている。既報<sup>(1)</sup>で重調和関数問題の数値解法を，板曲げを例として示した。

その結論として，2 階のラプラシアン  $\nabla^2 f$  のほか，4 階のラプラシアン  $\nabla^4 f$  ( $=f^{(400)}+f^{(040)}+f^{(004)}$ ) を示し，板曲げは 4 階のラプラス方程式 ( $D\nabla^2 \nabla^2 w=q \rightarrow D\nabla^4 w=q$ ) として解くべし，とした。

その数値計算技法として， $\nabla^4 w$  に含まれない導関数項は最小化 (最小 2 乗) すべし，とした。

翻ってその技法は， $\nabla^2 f$  で記述される調和関数問題にも適用すべき，とした。

よって，板曲げでは面外せん断変形式 ( $D_s \nabla^2 w=q$ ) にも条件式 ( $w^{(11)} \Rightarrow 0$ ) を付帯させる。

上述の技法は板曲げに限らず，調和関数問題・重調和関数問題に共通して適用する。そこで，3D のすべてのゆがみ項を最小化する付帯条件も ( $f^{(11)} \Rightarrow 0$ ) で代替して，簡潔に指示することとした。 ( $\Rightarrow 0$  は最小化を表す。)

よって流れ場では，圧力ポアソン方程式に ( $P^{(11)} \Rightarrow 0$ ) を付帯させることを，同様に必須とする。

$\nabla \text{div} \mathbf{U}=0$  は  $\text{div} \mathbf{U}=0$  の必要条件である。ただ， $\text{div} \mathbf{U}=0$  は数値的にしか満たせないなので， $\nabla \text{div} \mathbf{U}=0$  を数値的に満たして境界から積分すると解釈すれば，数値的十分条件とも言えよう。

そこで本稿は， $\nabla \text{div} \mathbf{U} \Rightarrow 0$  を満たす方法を検討することを目的とする。

なお，( $f^{(11)} \Rightarrow 0$ ) はいずれの変数にも必須とし，付帯条件として記すことを省略する。

本稿は Helmholtz 分解表示法の，計算工学への適用法研究の一環であり，数値計算向きの修正 Helmholtz 分解表示法も提案している。それらに関しては別報<sup>(2)(3)</sup>を参照されたい。

#### 2. 直交格子補綴技法

##### (1) 基礎方程式

速度を  $\mathbf{U}$  で表すとし，密度を  $\rho$ ，圧力を  $P$ ，粘性係数を  $\mu$  とし，Navier-Stokes (N.S.) 方程式を式(1)に，連続の式を式(2)に，Bernoulli 関数を式(3)に示す。

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} + \nabla P - \mu(\nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{3} \nabla \text{div} \mathbf{U}) = 0 \quad (1)$$

$$\text{div} \mathbf{U} = 0 \quad (2)$$

$$\rho \frac{1}{2} \mathbf{U}^2 + P = \text{const} \quad (3)$$

##### (2) 添え字記号と新しい演算子

添え字は ( $i=1,2,3$ ) のほか，( $i+1=2,3,1$ ) ( $i-1=3,1,2$ ) を適用する。すなわち， $i+2=i-1$ ， $i-2=i+1$  である。これにより，*curl* などが添え字付きで容易に数式表示できる。また，例外を除いて，総和規約による。(2D では  $i+2=i$ ， $i-2=i$  なることに留意。)

回転を *curl* または  $\nabla_{\text{curl}}$  で表し，法線ひずみ，せん断ひずみも簡潔に表すため，新たに  $\nabla_{\text{diag}}$ ， $\nabla_{\text{shr}}$  を演算子として用いる。

$\nabla_{\text{diag}} \mathbf{U}$  は  $\nabla \mathbf{U}$  の対角項を表し， $\nabla_{\text{shr}} \mathbf{U}$  は対称テンソルの非対角項を表す。 $\nabla^2_{\text{diag}}$ ， $\nabla^2_{\text{curl}}$ ， $\nabla^2_{\text{shr}}$  はベクトルとなる。

$\{1,1,1\} \cdot \nabla \text{div} \mathbf{U}$  や  $\{1,1,1\} \cdot \nabla \phi$  などスカラーの勾配の成分和を  $\text{div}(\text{div} \mathbf{U})$ ， $\text{div} \phi$  でも表すとす。CV は CV (Control Volume) 法。

##### (3) 圧力の数値計算法 (その 1)

Bernoulli の定理は ①理想流体・②定常流・③非圧縮・④渦なし流れを前提とする。式(3)の勾配式を，N.S. 方程式内での役割で考えれば，局所加速度項=0，応力項=0，対流項の回転成分=0，と置くことに等しい。

よって，残る  $\rho/2 \cdot \nabla \mathbf{U}^2 + \nabla P = 0$  を満たせばよく，式(3)の N.S. 式内での役割が説明できる。(MAC 法系列の圧力は [Appendix-1] 参照。) 本稿では， $\nabla \nabla (\rho/2 \cdot \nabla \mathbf{U}^2 + P) \Rightarrow 0$  を満たすことでそれに代える。

##### (4) 圧力の数値計算法 (その 2)

流体力学的な圧力  $P$  は法線応力平均値  $= -1/3(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z)$  で定義される。

応力ひずみ式からは  $P = -1/3 \mu \cdot \text{div} \mathbf{U}$  で表される。ただ，式(2)を満たせば  $P=0$  となり，応力とひずみの関係式は適用できないことが分かる。

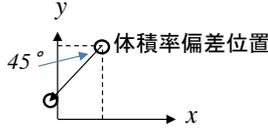
MAC 法系統のスキームを Helmholtz 分解の視点から解釈すれば，反復計算を  $m=(0), 1, 2, 3, \dots$  と添え字して，①初期値  $\mathbf{U}^0$ ， $P^0$  を与え，②予測子  $\mathbf{U}^{\#}$  を計算し，③  $\text{div} \mathbf{U}^{\#}$  の offset (相殺) 量  $\nabla \phi^{\#}$  を有限体積法で求め，④圧力の修正  $\nabla P^m = \nabla P^{m-1} - \nabla \phi^{\#} / \Delta t$  と速度の修正  $\mathbf{U}^m = \mathbf{U}^{m-1} + \nabla \phi^{\#}$  を行い， $\nabla \phi^{\#} \rightarrow 0$  となるまで反復する。

よって， $\nabla P$  は  $-\nabla \phi^{\#} / \Delta t$  の累積値として計算される。

圧力を式(3)に拠らないで計算するこの方法 (N.S. 方程式のみに拠る方法) では， $\delta \nabla P = \nabla \phi^{\#} / \Delta t$  と置く他ない。(  $\nabla \phi$  と  $\nabla P$  は空間的に同じ働きをするので，1 の変数と見なす他ない！)

つまり ( $\rho \cdot \mathbf{U}^0 / \Delta t$ ， $\nabla P^0$ )  $\rightarrow$  ( $\rho \cdot \mathbf{U} / \Delta t$ ， $\nabla P$ ) に要する (偽) 応力を計算するものである。(静止状態  $\mathbf{U}=0$ ， $P=\Omega$  から  $\mathbf{U}$  が変化した時にも，常に  $\text{div} \mathbf{U}=0$  を満たすよう働く応力累積値。)

上述は、 $P^m = P^{m-1} - \mu \cdot \text{div} \mathbf{U}^{\#}$ 、 $\mathbf{U}^m = \mathbf{U}^{m-1} + 1/3 \Delta t \cdot \mu \cdot \text{div} \text{div} \mathbf{U}^{\#}$  で反復計算(有限体積法)すれば簡素化できる。(別報<sup>(2)(3)</sup> 参照のこと。)つまり、 $\text{div} \mathbf{U}^{\#}$  の方向別勾配の修正に代え、均等量を 45° 方向に修正して行けば取束するであろう、とするものである。



この方法では圧力を、Bernoulli 関数式に振り向けることができる。すなわち、MAC 法系列の方法はパラメータの自由度不足を補うため圧力を転用すると言える。したがって、連続の式を満たすために何らかの方法で自由度を追加すれば圧力は解放される。

以下には連続式を満たすための自由度付加法を示す。

(5)  $\phi^{\&}$ 変数介在法

差分法では圧力格子のスタッガード配置が推奨される。それを Helmholtz 分解の視点で考えれば、前述のように  $\nabla \phi$  と  $\nabla P$  が空間的に同じ働きをすることに起因すると解釈できる。

両者をスタッガード配置することで、それぞれの機能を発揮できる。すなわち  $U_i$  と  $P$  はレギュラー格子(直交格子)で表し、 $\delta P$  に代わる新たなパラメータ  $\phi^{\&}$  を追加してスタッガード格子(双対格子)配置する。(  $\phi^{\&}$  は体積率偏差  $\text{div} \mathbf{U}^{\#}$  の offset 用作業変数。 )

双対格子内積分を  $\text{CV}(\ )$  で表せば、 $\{\phi^{\&}\}_k = \text{CV}(\text{div} \mathbf{U}^{\#})/A$  でノードパラメータを計算し、 $\{U^m\}_k = \{U^{m-1}\}_k + \text{CV}(\nabla \phi^{\&})/A$  で更新する。

この方法は  $\nabla \phi$  と  $\nabla P$  のスタッガード配置と言わんより、 $\nabla \phi$  と  $U_i$  のスタッガード配置が目的である。

よって圧力パラメータは解放され、Bernoulli 関数を満たすために適用できる。(かつ、 $U_i$  と同じレギュラー配置でよい。)

(6)  $\phi^{\&}$ 変数介在法

Helmholtz 分解は任意のベクトル場に適用できるとされる。そこでひずみベクトル場  $\mathbf{V} (= \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\gamma})$  を分解表示するために使う。

ひずみポテンシャル  $\{\phi, \boldsymbol{\Psi}\}$  で表せば  $\mathbf{V} = \nabla \phi + \nabla_{\text{curl}} \boldsymbol{\Psi}$  ( $\text{div} \boldsymbol{\Psi} = 0$ )、修正 Helmholtz 分解では  $\mathbf{V} = \nabla_{\text{diag}} \boldsymbol{\Psi} + \nabla_{\text{curl}} \boldsymbol{\Psi}$  ( $\text{div} \phi \neq 0, \text{div} \boldsymbol{\Psi} = 0$ ) で表される。

前述の  $\phi^{\&}$  に替えて  $\phi^{\&}$  を使い、 $\text{CV}(\nabla^2 \phi^{\&}) = \text{CV}(\text{div} \text{div} \mathbf{U}^{\#})$  で  $\{\phi^{\&}\}_k$  をSOR法などで計算し、 $\text{CV}(U^m) = \text{CV}(U^{m-1}) + \text{CV}(\phi^{\&})$  で、再度SORで計算して修正する。

この方法は均等配分に  $\phi^{\&}$  を介するものであるが、演算負荷軽減の工夫が課題として残る。

(7) 非適合要素付加法

$i$  方向に  $C^1$  連続であるが他の 2 方向には一定の要素を加え、要素境界上で  $U_i = 0$ 、勾配  $= 0$  とする。よって、重心点にそれぞれ 1 パラメータの自由度を得る。

その要素を Fig.1 に示す。関数形を  $U_i^s$  の例で式(4)に示す。式(4)は展開して  $\{U_i^{s(20)}\}_{\text{COG}}$  とし、連続式(2)の変分式の変分行に適用する。(  $P^s$  も同形状とする。 )

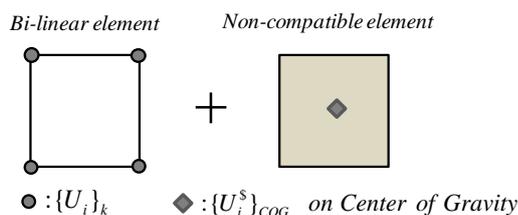


Fig.1 bi-linear element modifying with noncompatible element

$$U_i^s = \{U_i^s\}_{\text{COG}} \left(1 - \frac{x^2}{L_x^2/4}\right) \left(1 - \frac{x^2}{L_x}\right) \quad (4)$$

式(2)への適用を式(2')に、式(3)は  $\nabla \nabla$  式(3)  $\Rightarrow 0$  で解くとして、式(3')に示す。

$$\int_{\Omega} \{ (u^{s(20)} + v^{(11)}) \cdot \delta u^{s(20)} + (v^{s(02)} + u^{(11)}) \cdot \delta v^{s(02)} \} \cdot d\Omega = 0 \quad (2')$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \nabla \left( \rho \frac{1}{2} U^2 + P \right) \cdot \delta \nabla P + (\nabla^2 P^s + 2P^{(11)}) \cdot \delta \nabla^2 P^s \right\} \cdot d\Omega = 0 \quad (3')$$

(8) 2 次要素法

2 次要素を、頂点ノードパラメータの修正と、中間・重心ノードパラメータ修正の 2 ステップに分けて反復計算する。

修正要素のパラメータは  $\{\Delta U_i\}_k$ 、 $\{\Delta P\}_k$  で表すとする。それらを Fig.2 に示す。

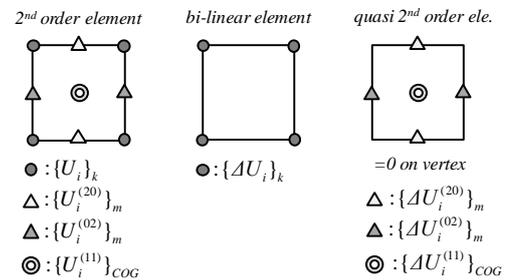


Fig.2 2nd order element and incremental parameter elements

連立方程式を  $[A]\{\Delta U\} = [B]$  で表し、 $[B]$  は 2 次要素の  $\{U\}^{m-1}$  で表し、パラメータは反復ステップの目的に応じていずれか一方の  $\{\Delta U\}$  要素で表す。(  $U^m = U^{m-1} + \Delta U$  )

中間ノードパラメータ  $\Delta$ 、 $\blacktriangle$  を  $\{u^{(200)}\}_m$ 、 $\{v^{(020)}\}_m$ 、 $\{w^{(002)}\}_m$  による変分は、連続式(2)を満たす変分行にのみ適用する。

(9) 准 2 次要素法

Fig.2 の中間ノード  $\Delta$ 、 $\blacktriangle$  を  $\{u^{(200)}\}_m$ 、 $\{v^{(020)}\}_m$ 、 $\{w^{(002)}\}_m$  以外は、辺に沿って線形変化として消去(両端の平均)し、簡素化した要素とする。(重心ノードは  $\{U_i^{(11)}\}_{\text{COG}}$  とし、3 重 1 次要素に従う。)

(10) ゆがみ要素付加法

双 1 次要素の  $U_i^{(11)}$  を修飾して、 $U_i^{(11)}$  要素のパラメータ自由度で連続の式を満たす。式(2'')に示す。

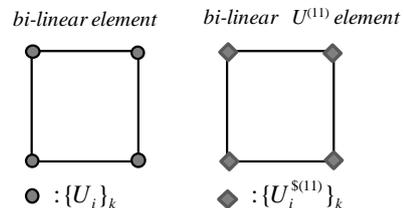


Fig.3 bi-linear element modified using distortion elements

$$\int_{\Omega} \{ (u^{(10)} \cdot \delta u^{(10)} - v^{(11)} \cdot \delta u^{(00)} + (v^{s(11)} + v^{(11)}) \cdot \delta v^{s(11)} + (v^{(01)} \cdot \delta v^{(01)} - u^{(11)} \cdot \delta v^{(00)} + (u^{s(11)} + u^{(11)}) \cdot \delta v^{s(11)} \} \cdot d\Omega = 0 \quad (2'')$$

(11)  $\text{div} \mathbf{U}$  の offset パラメータの付加と CV

双 1 次要素は 45° (対角) 方向に 2 階導関数を含む。そこで 45° 回転させた要素で体積率偏差を offset する。

その要素を Fig.4 に示す。CV は 4 要素に跨る領域とし、CV 法

でパラメータを算出する。

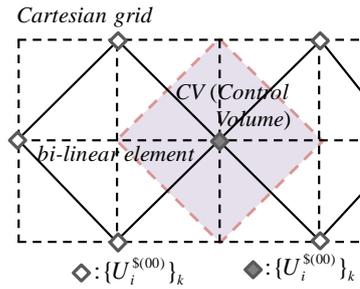
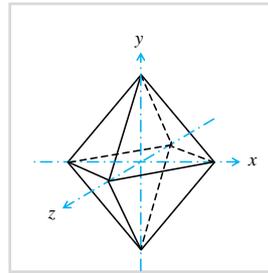


Fig.4 Additional parameter to offset  $\text{div}U$

すなわち, Fig.4 に CV 法を適用すれば式(5)となる。

$$\left. \begin{aligned} \int_{CV} (u^{s(20)} + v^{s(11)}) dx dy &= 0 \\ \int_{CV} (u^{s(11)} + v^{s(02)}) dx dy &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

3D のケースでは正立方体 (サイコロ) 形の CV 対角点を結ぶ線をそれぞれ  $x, y, z$  軸に一致させる。



計算式は(6)となり, 頂点ノードパラメータ  $\{U_i^{s(000)}\}_k$  の自由度で体積率偏差を offset する。

$$\left. \begin{aligned} \int_{CV} (u^{s(200)} + v^{s(110)} + w^{s(010)}) dx dy dz &= 0 \\ \int_{CV} (u^{s(110)} + v^{s(020)} + w^{s(011)}) dx dy dz &= 0 \\ \int_{CV} (u^{s(101)} + v^{s(011)} + w^{s(002)}) dx dy dz &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

#### (12) 2次四面体要素法

有限要素法は三角形・四面体の定ひずみ要素を基本として開発されてきた経緯があり, メッシュ生成技法の資産があるので, その活用が望まれる。

定ひずみ要素は, 要素間のひずみの不連続性を利用して等価集中応力にモデル化するが, 隅点などではノードパラメータが固定されて剛域を形成するなど, 自由度不足は否めない。

したがって少なくとも2次要素をベースとして, 変位とひずみを単独で表現する必要がある。

その要素を Fig.4 に示す。変分行の使い分けは Fig.2 に示したとおり2次直交格子法と同様である。

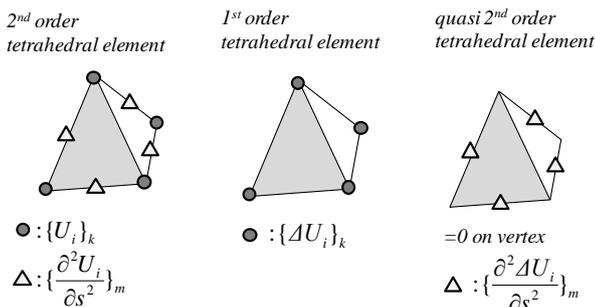


Fig.4 2<sup>nd</sup> order tetrahedral element and incremental elements

#### (13) 差分法とゆがみ要素付加

差分法の基本は, ノード点で  $C^1$  連続な  $(n+1)$  次 Taylor 級数を得る技法と解釈できる。対して, 有限要素法は  $(n+1)$  次 Taylor 級数を用い,  $n/2$  回微分まで連続とするモデルである。

有限要素法はその高階不連続微分を, 前述のように, 等価集中力にモデル化する技法がポイントとなる。

ただ, 差分法も CV 法の導入により, 有限要素法概念を取り入れるようになった。(有限体積法)

ここには有限要素法に差分法概念を取り入れ, ノード点で  $C^1$  連続な2次関数とする技法を示す。

ノードパラメータのうち  $\{U_i^{(00)}, U_i^{(10)}, U_i^{(01)}, U_i^{(20)}, U_i^{(02)}\}_k$  は中央差分法で表し, 残るゆがみパラメータ  $\{U_i^{(11)}\}_k$  のみ有限要素で表して加える。よって, 頂点ノードの周りに, それぞれの直交格子内で2次展開可能となる。この要素は FE+FDM と呼べよう。

ただし, 有限体積法は適用できず, 有限体積領域で Galerkin 法変分式(いわゆる有限要素法)を適用する。すなわち, 制約条件付き回帰モデル概念となる。

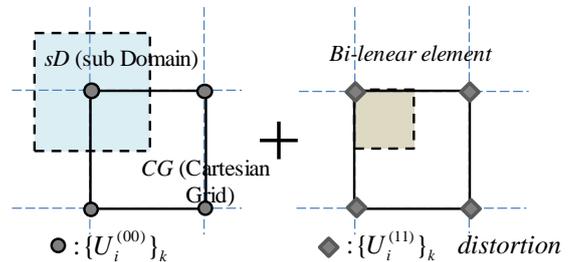


Fig.5 F. Difference+F. Element for Galerkin variational method

#### (14) 境界形状への適合法 (その1)

直交格子法のもうひとつの課題は境界形状への適合法であり, 近年埋込境界 (IB: Immersed Boundary) 法が脚光を浴びている。

既報<sup>(4)</sup>で遷移行列法を適用する方法を提案した。遷移行列法は剛域 (Coupling 領域) が容易に組み込める。

ここには  $C^1$  連続要素概念で, 簡単な方法を示す。

既報<sup>(4)(5)</sup>では2D問題を板曲げの例で示した。面外たわみを  $w$  とすれば, 板曲げの傾角  $\theta (= \nabla w)$  は  $\text{curl} \theta = 0$  を要求し, Helmholtz 分解のスカラーポテンシャル  $\phi$  と同じ特性を有し,  $\phi$  と読み替えてもよい。([Appendix-2] 参照のこと)

したがって, 板曲げの2D展開を3D展開すれば流れ場の境界形状表示に適用できる。Neumann 境界にも当然適用可能。

直交格子の境界要素表示法は別稿<sup>(2)</sup>に示している。

#### (15) 境界形状への適合法 (その2)

既報<sup>(6)</sup>では, いまひとつの境界適合法を提案した。その概要を示す。

境界を含む要素を境界要素と呼び, 境界要素内の境界外体積をボクセルの体積で除して平均値を計算する。

その平均値を当該直交格子重心値とし, 当該直交格子に対応する双対格子を考える。双対格子の頂点ノードが直交格子の重心点になるので, 双対格子内は3重1次補間できる。

その補間関数の, 当該直交格子のノード点の導関数ベクトル (有限 Taylor 級数の係数ベクトル 8 成分) を与えて, 今度は当該関数を3重3次要素で表し(補間し),  $< 0$  の領域を系内,  $= 0$  面を境界,  $> 0$  を系外と判定して取り扱う。(VOF 関数)

### 3. まとめと今後の課題

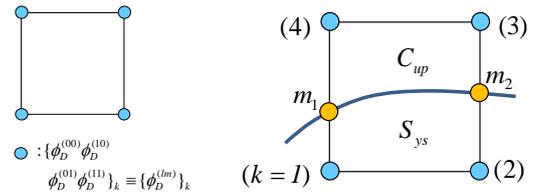
- 直交格子法の2つの課題 ①ゆがみ項への対処法 ②境界形状への対処法 に関する技法を, 新たな提案を軸に整理した。

- せん断変形と回転(渦度)は変形・変位は伴うが、体積変化は伴わないので常に非圧縮でなければならない。
- 法線ひずみのみ非圧縮変形のほか、圧縮変形(体積率偏差)を伴い、Helmholtz の定理に基づけばいずれも  $\nabla \phi$  で表される。
- したがって、非圧縮流れ場では連続の式  $\nabla^2 \phi = 0$  を満たす技法が課題となる。(原始変数表示では  $\text{div} \mathbf{U} = 0$ 。)
- そのスキームを整理の結果、(1)作業要素  $\phi^k$  を介して  $\text{div} \mathbf{U}^{\#}$  を offset する、(2)  $\nabla_{\text{diag}} \mathbf{U}$  に自由度を付加して満たす、(3)ゆがみ項  $U_i^{(1)}$  に自由度を付加して満たすの 3 方法となり、複数の方法を提案した。
- 有限体積法では  $\phi^k$  はスタッガード(双対)格子に配置し、 $\mathbf{U}$  と  $P$  はレギュラー(直交)格子に配置すべし、とした。
- ②に関しては遷移行列法でカップリング行列を埋め込む方法、 $C'$  連続な 3 重 3 次補間関数でヘビサイド関数を判定する技法の 2 方法を提案した。
- 数値計算例による検証は直近の課題である。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{K} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \phi \\ u \\ v \\ \rho_x \\ \tau \\ \vdots \\ q^{(33)} \end{Bmatrix}_{x,y} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & \frac{x^2}{2}/D & xy/D & \dots & \frac{x^3 y^3}{36}/D^2 \\ & 1 & & y/D & \dots & \frac{x^2 y^2}{12}/D^2 \\ & & 1 & x/D & \dots & \frac{x y^2}{12}/D^2 \\ & & & 1 & \dots & \frac{x y^3}{6}/D \\ & & & & 1 & \dots \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi^{(00)} \\ \phi^{(10)} \\ \phi^{(01)} \\ \phi^{(20)} D \\ \phi^{(11)} D \\ \vdots \\ \phi^{(33)} D^2 \end{Bmatrix}_0$$

$$= \{\phi^{(lm)}\} = [\mathbf{T}]\{\phi_D^{(lm)}\}_0 \tag{a}$$

$$= [\mathbf{T}][\mathbf{A}]\{\phi_D^{(lm)}\}_{k,k} \tag{b}$$



[Appendix-1] MAC 法システムスキームでの Bernoulli 関数の位置付け

非圧縮 N.S.方程式を満たす圧力勾配を求めれば ①粘性流・②非定常流・③非圧縮・④渦あり流れ に関して求めたこととなる。このうち Bernoulli 関数の前提と一致するのは③のみである。

ただ、N.S.方程式から  $\nabla P$  を除いた平衡を考えれば、Helmholtz 分解して Lateral 成分と Transverse 成分の式に分離でき、圧力は前者に属するから渦なし流れの平衡を満たしていることとなり、①も④も関係していない。(理論上は、応力項は体積率偏差と渦度で表示されるので! 移流項も回転分は分離できるので!)

③に関しては、予測子には  $\nabla^2 \phi \neq 0$  成分を含むので、 $\delta \nabla^2 \phi \neq 0$  分を計算して offset して行き、offset 分は圧力にも含まれていたので補正し、収束すれば③を満たす。

②は定常状態に至れば満たされる。過渡状態の  $P$  は近似的に時間ステップ間不連続とする。

よって、Bernoulli 関数(の勾配式)を解くことに等しい。ポイントは offset 量  $\delta \phi$  ( $\phi^k$ ) を求めるところに在る。(SMAC 法・HSMAC 法では  $\delta \phi$  の説明を省略し、 $\delta P$  で、圧力補正量と説明されることが多い。)

ただ、 $\nabla^2 \phi = 0$  を代数的に満たす計算はできないので非圧縮・理想気体の運動エネルギーを求めることはできない。(他方で、圧力損失は実在する。要考慮:  $\nabla \phi$  の法線・せん断ひずみ。)

註) 本稿では次の講習会資料(森西)を参照した。  
[fluid.web.nitech.ac.jp/Gotoh\\_Home\\_page/Edu/Public\\_course/Text/CAE\\_4th.pdf](http://fluid.web.nitech.ac.jp/Gotoh_Home_page/Edu/Public_course/Text/CAE_4th.pdf)

[Appendix-2] 境界セルへのカップリング行列の組込み技法

Helmholtz 分解によるスカラーポテンシャル要素を介して組み込む。

板曲げが  $\mathbf{d} = \{\phi^{(00)}, \phi^{(10)}, \phi^{(01)}\}$ ,  $\mathbf{K} = D\{\phi^{(20)}, \phi^{(11)}, \phi^{(02)}, \phi^{(30)}, \dots, \phi^{(03)}\}$  で、面外たわみ問題であるのに対し、2D の面内変位問題として示し、 $\mathbf{d} = \{\phi, u, v\}$ ,  $\mathbf{K} = \{\sigma_x, \tau, \sigma_y\}$ ,  $\mathbf{Q} = \{q^{(30)}, \dots, q^{(03)}\}$  で導関数ベクトルを表す。(流れ場では  $D = \mu$ )

遷移式は遷移行列  $[\mathbf{T}]$  を用いて式(a)のように表される。さらにノードパラメータベクトルで式(b)のように表して置く。

状態量ベクトル(state vector)を

$$\{\mathbf{d}, \mathbf{K}, \mathbf{Q}\} \equiv \{\phi, u, v \mid \rho_x, \tau, \rho_y \mid \dots, q^{(33)}\}$$

$$\equiv \{\phi^{(00)}, \phi^{(10)}, \phi^{(01)} \mid \phi^{(20)} D, \phi^{(11)} D, \phi^{(02)} D \mid \dots, \phi^{(33)} D^2\}$$

で表して、

境界と直交格子交点を  $m_i$  と記号する。系外のカップリング領域を  $C_{up}$  で表し、系内を  $S_{sys}$  で表す。

まず  $C_{up}$ ,  $S_{sys}$  いずれも格子内いっぱい広げてそれぞれピクセル要素とし、ノードパラメータベクトルで表す。

したがって、いずれも式(b)で表されるが、 $D$  のみ異なる。すなわち、 $C_{up}$  要素の  $[\mathbf{T}]$  は  $D = \infty$  を代入して表す。(カップリング行列) 目的は  $m_i$  点で  $\{\mathbf{d}, \mathbf{K}\}$  を等値し、互いに相手領域にある自領域のノードパラメータを消去することにある。

ゆがみパラメータ  $\{\phi^{(11)}\}_k$  はいずれも  $(\phi^{(11)} \Rightarrow 0)$  の変分に使う、かつ要素間は連続(要素間共有)である。ただし、境界条件は free であり、予め消去できる。 $C_{up}$  要素のそれはすべて消去できる。

ここではそのまま保持し、等値式には使わないものとする。よって、式(b)等値式から相手領域の  $\{\phi^{(00)}, \phi^{(10)}, \phi^{(01)}\}_k$  を消去することで目的は達成される。

図には  $m_1, m_2$  の 2 交点の例を示したが、条件式と未知数の数が異なるケースでは、最小 2 乗法や、逆に  $m_1, m_2$  の中点に条件式を増やすなどの工夫が必要である。(3 ケースとも最小 2 乗法で統一。)

3D では  $\{\phi^{(000)}, \phi^{(100)}, \phi^{(010)}, \phi^{(001)}\}_k$  以外の 4 パラメータはゆがみパラメータである。

右図のパラメータと数が合うよう、余分なゆがみパラメータは消去  $(\phi^{(11)} \Rightarrow 0)$  して置く。

参考文献

- (1) 今村, "重調和関数問題の数値解法: 板曲げを例として," 計算工学講演会論文集, Vol.23, 2018.
- (2) 今村, "ベクトルポテンシャルによる非圧縮流れ場の数値解法," 第 32 回数値流体力学講演論文集, (2018).
- (3) 今村, "有限 Taylor 級数による Navier-Stokes 方程式の数値計算法," 第 32 回数値流体力学講演論文集, (2018).
- (4) 今村, "遷移行列法による直交格子法境界セルのカップリング行列," 計算工学講演会論文集, Vol.23, 2018.
- (5) Imamura, J., "Coupling matrix for boundary cells of a Cartesian grid method using a transfer-matrix method," 7th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD 7), (2018).
- (6) Imamura, J., "P-CG (Particle-Cartesian Grid, Disaggregate-Aggregate) Model for Attraction/Repulsion," 15th International Conference on Flow Dynamics, Sendai, (2018).