バクテリアコロニー形成における進行波の高次精度差分解析

Finite-difference analysis of the traveling wave in bacterial colony formation

○　平野　翔也，兵庫県立大学，神戸市中央区港島南町 7-1-28, E-mail: sa17b013@sim.u-hyogo.ac.jp
安田　修悟，兵庫県立大学，神戸市中央区港島南町 7-1-28, E-mail: yasuda@sim.u-hyogo.ac.jp
Shoya HIRANO, Graduate School of Simulation Studies, Kobe 650-0047, Japan
Shugo YASUDA, Graduate School of Simulation Studies, Kobe 650-0047, Japan

ABSTRACT. Pattern formation of bacterial colony can be described by the hydrodynamic type equations including reaction, diffusion, and advection terms, i.e., the Keller-Segel type equations. The growth or invasion of the bacterial colony is characterized by traveling waves in the Keller-Segel model, where the waves are driven by the coupling of the reaction (i.e., proliferation) and diffusion of bacteria. In this study, we construct a Cubic Interpolated Profile(CIP) scheme to the one-dimensional Keller-Segel equation and investigate the efficiency and accuracy in the traveling wave problem.

1．はじめに

走化性バクテリアの集団挙動を記述する，Keller-Segel 方程式系に対する数値計算によって，バクテリア集団の様々な 1 次元進行波が得られている[1]．この数値計算に対して誤差評価を行い，計算精度を検証したところ，時間経過と共に波形が分散し，誤差が累積することが確認できた．

そこで本研究では，時間経過に対する波形の分散を低減させるために，微分方程式の高次精度差分解法である Cubic Interpolated Profile(CIP) Scheme[2-3] (以下 CIP 法)を導入し，計算精度を評価する．

CIP 法は，移流方程式に代表される双曲型方程式の進行波に対して特に有効な手法であるが，本研究で対象となる，反応と拡散のバランスによって生じる進行波に対しても有効であることが期待される．

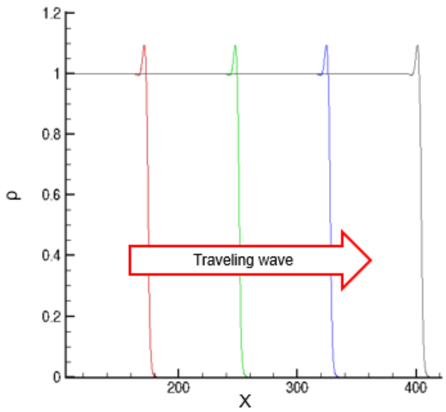

Fig. 1 Traveling wave of the population desnity ρ in a flux-limited Keller-Segel equation.[1] The snapshots of the wave profile at different time steps are shown.

2．計算手法

2.1　Flux-limited Keller-Segel 方程式[1]

走化性バクテリアの集団挙動を表す Keller-Segel 方程式を以下に示す．

・$S(t,x)$:化学物質濃度

$$\partial_t S = D\partial_{xx} S - \alpha S + \beta\rho \tag{1}$$

ここで，Dは拡散係数，αはSの減少率を決定するパラメータ，βはバクテリアの化学物質放出によるSの増加率を決定するパラメータである．

・$U(S)$: Sに対するバクテリア集団の流速

$$U[S] = \chi \arctan\left(\frac{\partial_x logS}{\delta}\right) \tag{2}$$

ここで，χはUの上下限値を決定するパラメータ，δはSに対するρの反応の敏感さを決定するパラメータである．

・$\rho(t,x)$:バクテリアの細胞密度

$$\partial_t \rho + \partial_x (U[S]\rho) = \partial_{xx}\rho + P[\rho]\rho \tag{3}$$

ここで，$P[\rho]$は細胞分裂や死滅によるバクテリアの増殖率を決定する関数である．

2.2　CIP 法[2-3]

CIP 法では格子 2 点間，$[i-1,i]$間に対し，以下に示す 3 次補間関数$F_i(x)$による補間を行う．

$$F_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i \tag{4}$$

Eq. (4)の未知係数a_i, b_i, c_i, d_iは隣合う 2 つの格子点上で与えられた 4 つの量$f_i, g_i, f_{i-1}, g_{i-1}$から以下のように決定できる[1]. ここで，$g = \frac{\partial f}{\partial x}$である．

$$F_i(x_i) = d_i = f_i \tag{5}$$

$$\frac{dF_i(x_i)}{dx} = c_i = g_i \tag{6}$$

$$F_i(x_{i-1}) = -a_i\Delta x^3 + b_i\Delta x^2 - c_i\Delta x + d_i = f_{i-1} \tag{7}$$

$$\frac{dF_i(x_{i-1})}{dx} = 3a_i\Delta x^2 - 2b_i\Delta x + c_i = g_{i-1} \tag{8}$$

予備解析として，この CIP 法を用いて移流方程式を解き，計算精度を検証した．その結果，移流方程式について 3 次精度の結果を確認している．

講演時には Keller-Segel 方程式に対して CIP 法を適応し，計算精度を検証した結果について詳細に発表する．

参考文献

[1] V. Calvez, B. Perthame, and S. Yasuda, Traveling wave and aggregation in a flux-limited Keller-Segel model, Kinet. Relat. Models 11, 891(2018)
[2] T. Yabe, H. Mizoe, K. Takizawa, H. Moriki, H. Im, and Y. Ogata, Higher-order schemes with CIP method and adaptive Soroban grid towards mesh-free scheme, Journal of Computational Physics **194**, 57-77 (2004).
[3] 矢部 孝, 内海 隆行, 尾形 陽一, CIP 法 –原子から宇宙までを解くマルチスケール解法– (2003)