

応力テンソルの不連続条件を用いた埋め込み境界-格子ボルツマン法の改良

An improvement of the immersed boundary-lattice Boltzmann method
using the discontinuity of the stress tensor

- 鈴木康祐, 信大工, 長野県長野市若里 4-17-1, E-mail: kosuzuki@shinshu-u.ac.jp
吉野正人, 信大工, 長野県長野市若里 4-17-1, E-mail: masato@shinshu-u.ac.jp

Kosuke Suzuki, Institute of Engineering, Academic Assembly, Shinshu University, Nagano 380-8553

Masato Yoshino, Institute of Engineering, Academic Assembly, Shinshu University, Nagano 380-8553

We improve the immersed boundary-lattice Boltzmann method using the discontinuity of the stress tensor. In the immersed boundary method, the body force which is applied to enforce the no-slip boundary condition is equivalent to the discontinuity of the stress tensor across the boundary. In the stress tensor discontinuity-based immersed boundary-lattice Boltzmann method, the boundary is expressed by Lagrangian points independently of the background lattice points, and the discontinuity of the stress tensor is calculated on these points from desired particle distribution functions which satisfy the no-slip boundary condition based on the bounce-back scheme. In this study, we remedy two problems of the original method (i.e., penetration and spurious oscillation of local force) by a smoothed-profile preprocessing and a relaxation of the bounce-back condition. In order to validate the present improvements, we apply the improved method to simulations of typical benchmark problems, i.e., flows around a stationary circular cylinder and particle migrations in a planar Couette flow. As a result, the present improvements can remedy the two problems of the original method effectively, and the results obtained by the improved method have a good agreement with other numerical results.

1. 緒言

非圧縮性粘性流中の移動境界問題は、数値流体力学の主要な問題の一つである。近年、複雑なグリッド生成を必要とせず、直交格子上でも移動境界問題を扱える手法として、埋め込み境界法 (Immersed boundary method, IBM)⁽¹⁾ が再注目されている。埋め込み境界法は、境界を無限小の厚みを持つ殻として、境界に隔てられた両側ともに同種の非圧縮性粘性流体で満たされているものとみなし、境界近傍に適切な体積力を加えることにより、境界上での滑りなし境界条件を満足させる方法である。この体積力の決定方法が、埋め込み境界法の要であり、これまで体積力の決定方法が異なる様々な種類の埋め込み境界法が提案されている。⁽²⁾

変形しない物体の表面を境界とする場合、埋め込み境界法の一つである direct forcing method⁽³⁾ という手法が良く使われる。この手法は、境界を離散的な点 (境界点) で表し、境界点上での強制すべき流速と一時的な流速 (境界を考慮せずに計算された流速) との差によって体積力を求め、その体積力を境界点近傍の格子点に分配する手法である。これまで様々な種類の direct forcing method が提案されているが、境界点の配置と、体積力を分配する格子点の配置によって、diffuse-interface scheme (DIS) と sharp-interface scheme (SIS) に分類される。⁽⁴⁾

DIS は、境界点を物体とともに移動する Lagrangian 点とし、重み関数によって境界点上の流速を格子点から内挿するとともに、境界点近傍の格子点に体積力を分配する。⁽⁵⁾ 重み関数には、離散化されたデルタ関数⁽⁶⁾ を用いることが多い。この手法は、境界と格子点の位置関係に関わらず同じアルゴリズムで実行することができるため、コーディングが容易であるという利点を持つ。しかしながら、重み関数によって境界が実効的に厚みを持ってしまい、境界が受ける局所的な力を計算することが難しい。

一方、SIS は、境界点を境界と格子の交点として、境界

点と格子点を結ぶリンク上で流速の内挿、および体積力の外挿を行う。⁽⁷⁾ この手法は、移動境界問題の場合、境界が移動する度に境界点を探索する必要があり、アルゴリズムが煩雑になってしまう。しかしながら、DIS のように実行厚さを持たないため、境界が受ける力を局所的に計算できる。ただし、移動境界問題では、境界が受ける力の時間変化に非物理的な振動が生じてしまう。

上記の両手法には一長一短あり、どちらが優れているとは一概には言えないが、DIS において境界が受ける局所的な力を求められるようにすることは、一つの有益な進歩であると考えられる。著者らは、DIS の枠組みで境界が受ける局所的な力を求められる手法として、応力テンソルの不連続条件を用いた埋め込み境界-格子ボルツマン法^(8,9) を開発した。この手法では、格子ボルツマン法によって流れ場を計算し、bounce-back 法⁽¹⁰⁾ を用いて、境界点上で滑りなし条件を満足するように応力テンソルの不連続条件を計算し、その応力テンソルの不連続条件から体積力を決定する。この手法を用いれば、任意の境界点上で応力テンソルを計算できるため、境界が受ける局所的な力を求めることができる。しかし、この手法には、(i) 流線が境界を貫通してしまう問題と、(ii) 境界上の応力に非物理的な振動が生じてしまう問題があることが指摘されている。⁽⁹⁾ 問題 (i) は滑りなし条件が強制されていないためであり、問題 (ii) は bounce-back 法により跳ね返る仮想粒子の速度分布関数の組が境界の向きによって離散的に変わるためであると考えられる。

本研究では、問題 (i) を smoothed-profile method (SPM)⁽¹¹⁾ を用いた前処理によって、問題 (ii) を境界の角度に応じた bounce-back 条件の緩和によってそれぞれ改善し、手法の改良を行う。なお、問題 (i) の解決策は、著者らによる論文⁽⁹⁾ で既に記述されているが、本稿でも紹介する。

2. 応力テンソルの不連続条件と体積力の関係

埋め込み境界法における体積力は、物理的には、境界が面を通して隣接する流体に加える面積力を、その周囲の微小な体積に分配したものである。今、Fig. 1 のように、境界が微小面積 dS を介して、一方の流体 1 に応力 $\mathbf{P}^{[1]}$ を加え、もう一方の流体 2 に応力 $\mathbf{P}^{[2]}$ を加えているとする。このとき、この面積力の和 $(\mathbf{P}^{[1]} + \mathbf{P}^{[2]})dS$ が、境界の近傍の微小体積 dV に単位体積あたりの体積力 \mathbf{g} として分配されるとする。すなわち、

$$\mathbf{g}dV = (\mathbf{P}^{[1]} + \mathbf{P}^{[2]})dS, \quad (1)$$

とする。微小面積 dS の単位法線ベクトル \mathbf{n} (流体 2 から流体 1 に向かう方向とする) と、境界上での流体 1 と流体 2 の応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}^{[1]}$ と $\boldsymbol{\sigma}^{[2]}$ を用いると、応力は以下のように表される。

$$\mathbf{P}^{[1]} = -\boldsymbol{\sigma}^{[1]} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{P}^{[2]} = -\boldsymbol{\sigma}^{[2]} \cdot (-\mathbf{n}). \quad (2)$$

従って、Eqs. (1), (2) より、

$$\mathbf{g}dV = -(\boldsymbol{\sigma}^{[1]} - \boldsymbol{\sigma}^{[2]}) \cdot \mathbf{n}dS. \quad (3)$$

つまり、埋め込み境界法における体積力は、境界における応力テンソルの不連続条件と等価である。

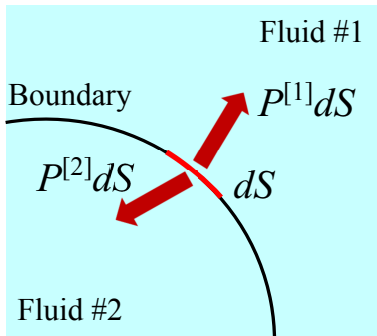


Fig. 1: Illustration of surface forces acting on the fluid #1 and the fluid #2 through a small surface element on the boundary.

3. 改良手法

3.1 格子ボルツマン法

格子ボルツマン法は、流体を有限個の速度を持つ仮想粒子の集合体で近似し、各粒子の衝突と並進とを粒子の速度分布関数を用いて逐次計算し、その速度分布関数のモーメントから巨視的流れ場を求める数値計算法⁽¹⁰⁾である。本手法では、2次元流れに対しては2次元9速度モデルを、3次元流れに対しては3次元15速度モデルをそれぞれ用いる。以下の変数は全て、代表長さ H_0 、仮想粒子の代表速さ c 、時間スケール $t_0 = H_0/U_0$ (U_0 : 流れの代表速さ)、および基準密度 ρ_0 を用いて無次元化したものである。

2次元9速度モデルでは、仮想粒子の粒子速度は $\mathbf{c}_i = (0, 0), (\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)$ ($i = 1, 2, \dots, 9$) で与えられ、3次元15速度モデルでは、 $\mathbf{c}_i = (0, 0, 0), (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

($i = 1, 2, \dots, 15$) で与えられる。速度 \mathbf{c}_i をもつ仮想粒子の速度分布関数 f_i の時間発展方程式は以下で表される。

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i\Delta x, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)], \quad (4)$$

ここで、 Δx は格子間隔、 Δt は時間刻み、 f_i^{eq} は局所平衡分布関数、 τ は緩和時間である。時間刻み Δt は、仮想粒子が隣の格子点まで移動するまでの時間として与えられる。非圧縮モデルにおける局所平衡分布関数⁽¹²⁾は以下で与えられる。

$$f_i^{\text{eq}} = E_i \left[3p + 3\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u}^2 \right], \quad (5)$$

ここで、2次元9速度モデルでは $E_1 = 4/9, E_2 = \dots = E_5 = 1/9, E_6 = \dots = E_9 = 1/36$ 、3次元15速度モデルでは $E_1 = 2/9, E_2 = \dots = E_7 = 1/9, E_8 = \dots = E_{15} = 1/72$ である。

巨視変数である流体の圧力 p 及び流速 \mathbf{u} は、速度分布関数 f_i を用いて以下で求められる。

$$p = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^b f_i, \quad \mathbf{u} = \sum_{i=1}^b f_i \mathbf{c}_i, \quad (6)$$

ここで、2次元9速度モデルでは $b = 9$ 、3次元15速度モデルでは $b = 15$ である。動粘性係数 ν は以下で表される。

$$\nu = \frac{1}{3} \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \Delta x. \quad (7)$$

外力場のもとでは、以下のように段階的に時間発展する。 $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ を体積力とすると、

(i) 外力なしで時間発展する。

$$f_i^*(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i\Delta x, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)], \quad (8)$$

(ii) f_i^* を外力によって補正する。

$$f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_i^*(\mathbf{x}, t + \Delta t) + 3\Delta x E_i \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t + \Delta t). \quad (9)$$

3.2 SPMによる前処理

流線が境界を貫通してしまう問題を解決するために、SPM⁽¹¹⁾を用いた前処理を行う。SPMは、物体内部の流体(内部流体)の速度を、物体自身の速度に強制するように、内部流体に体積力を加える手法である。その体積力の分布が、物体内部と外部で滑らかにつながるように、滑らかなプロファイル関数を使っていることが特徴である。ここでは、物体が円柱あるいは球とした場合の方法について述べる。

時刻 t における速度分布関数 $f_i(\mathbf{x}, t)$ 及び流体の巨視変数(流速 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 、圧力 $p(\mathbf{x}, t)$) が既知であるとする。これらの値から、格子点上での体積力を考慮しない一時的な速度分布関数 $f_i^*(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ が Eq. (8) により求められ、一次的な速度 $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ が Eq. (6) により求められる。また、物体の中心位置 $\mathbf{X}_c(t + \Delta t)$ を始めとして、時刻 $t + \Delta t$ における物体の運動が既知であるとする。

滑らかなプロファイル関数 ϕ を以下で定義する。

$$\phi(\mathbf{x}) = s(R - |\mathbf{x} - \mathbf{X}_c(t + \Delta t)|), \quad (10)$$

$$s(r) = \begin{cases} 0, & (r < -\xi/2), \\ \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{\pi r}{\xi} + 1 \right) \right], & (|r| \leq \xi/2), \\ 1, & (r > \xi/2), \end{cases} \quad (11)$$

ここで、 R はプロファイルの半径、 ξ はプロファイルの界面厚さである。本研究では、この前処理が、次節で示す体積力の計算に干渉しないようにするために、物体の直径 D_s に対して、 $R = 0.5D_s - 0.5\Delta x$ 、 $\xi = \Delta x$ とする。

プロファイル関数 ϕ を用いて、前処理のための体積力を以下のように計算する。

$$\mathbf{g}_p(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \frac{\phi(\mathbf{x})}{\Delta x} [\mathbf{U}_{\text{in}}(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t + \Delta t)], \quad (12)$$

ここで、 $\mathbf{U}_{\text{in}}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ は、物体の内部の格子点 \mathbf{x} における、時刻 $t + \Delta t$ での物体自身の速度である（物体が静止している場合には、 $\mathbf{U}_{\text{in}}(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \mathbf{0}$ ）。この体積力によって、二次的な速度分布関数 $f_i^{**}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ を以下のように求める。

$$f_i^{**}(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_i^*(\mathbf{x}, t + \Delta t) + 3\Delta x E_i \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{g}_p(\mathbf{x}, t + \Delta t). \quad (13)$$

3.3 応力テンソルの不連続条件を用いた体積力の計算法

前処理後の二次的な速度分布関数 $f_i^{**}(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ が既知であるとする。また、物体境界と共に移動する境界点とその速度、およびその点における境界の単位法線ベクトルをそれぞれ \mathbf{X}_k 、 \mathbf{U}_k 、 \mathbf{n}_k ($k = 1, 2, \dots, N$) とし、それらの時刻 $t + \Delta t$ における値が既知であるとする。なお、境界を隔てて一方の側の流体を流体 1、もう一方の側の流体を流体 2 として、単位法線ベクトルは常に流体 2 から流体 1 へ向かう方向とする (Fig. 2)。

境界点 \mathbf{X}_k は格子点 \mathbf{x} に一般には一致しないため、境界点上での二次的な速度分布関数 $f_i^{**}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)$ を、以下のように周囲の格子点から内挿して求める。

$$f_i^{**}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t) = \sum_{\mathbf{x}} f_i^{**}(\mathbf{x}, t + \Delta t) W(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) (\Delta x)^d, \quad (14)$$

ここで、 $\sum_{\mathbf{x}}$ は全ての格子点 \mathbf{x} についての和を表し、 d は次元を表す。また、 W は重み関数を表し、以下で与える

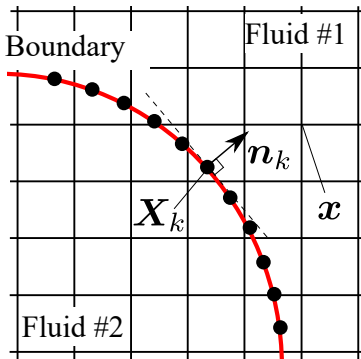


Fig. 2: Illustration of boundary Lagrangian points \mathbf{X}_k , the unit normal vector \mathbf{n}_k at the point, and lattice points \mathbf{x} .

れるような関数である。(6)

$$W(x, y, z) = \frac{1}{\Delta x} w\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x} w\left(\frac{y}{\Delta x}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x} w\left(\frac{z}{\Delta x}\right), \quad (15)$$

$$w(r) = \begin{cases} \frac{1}{8} (3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2}), & (|r| \leq 1), \\ \frac{1}{8} (5 - 2|r| - \sqrt{-7 + 12|r| - 4r^2}), & (1 \leq |r| \leq 2), \\ 0, & (|r| > 2). \end{cases} \quad (16)$$

上式は、3次元の重み関数が三つの1次元の重み関数の積であることを示しており、2次元の重み関数を作る場合は、二つの1次元の重み関数の積とすればよい。

元的手法(9)では、境界点で満たすべき速度分布関数を、bounce-back法(10)により計算していた。しかし、単純にbounce-back法を適用するだけでは、跳ね返る仮想粒子の速度分布関数の組が境界の向きによって離散的に変わるため、境界上の応力に非物理的な振動が発生してしまうという問題があった。この問題を改善するために、本研究では、境界の法線ベクトルの角度に応じたbounce-back条件の緩和を行う。具体的には、流体1および2が境界点 \mathbf{X}_k で満たすべき速度分布関数 $f_i^{[1]}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)$ および $f_i^{[2]}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)$ を、それぞれ以下のように計算する。

$$f_i^{[1]} = \begin{cases} F_i^{\text{not}}, & (\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{c}_i \leq 0), \\ (1 - \beta)F_i^{\text{not}} + \beta F_i^{\text{bb}}, & (0 < \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{c}_i \leq |\mathbf{c}_i| \sin \alpha), \\ F_i^{\text{bb}}, & (\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{c}_i > |\mathbf{c}_i| \sin \alpha), \end{cases} \quad (17)$$

$$f_i^{[2]} = \begin{cases} F_i^{\text{not}}, & (\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{c}_i \geq 0), \\ (1 - \beta)F_i^{\text{not}} + \beta F_i^{\text{bb}}, & (-|\mathbf{c}_i| \sin \alpha \leq \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{c}_i < 0), \\ F_i^{\text{bb}}, & (\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{c}_i < -|\mathbf{c}_i| \sin \alpha), \end{cases} \quad (18)$$

ここで、 F_i^{not} と F_i^{bb} は、仮想粒子が bounce-back せず境界を通過した場合の速度分布関数と、bounce-back して境界で跳ね返った場合の速度分布関数であり、以下で定義する。

$$F_i^{\text{not}} = f_i^{**}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t), \quad (19)$$

$$F_i^{\text{bb}} = f_i^{**}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t) + 6E_i \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{U}_k, \quad (20)$$

ここで、 \bar{i} は $\mathbf{c}_{\bar{i}} = -\mathbf{c}_i$ となる番号である。また、 α は bounce-back 条件を緩和する範囲、 β は緩和係数であり、境界の法線ベクトル \mathbf{n}_k に応じて連続的に緩和できるように、以下のように求める。

$$\beta = \frac{|\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{c}_i|}{|\mathbf{c}_i| \sin \alpha}. \quad (21)$$

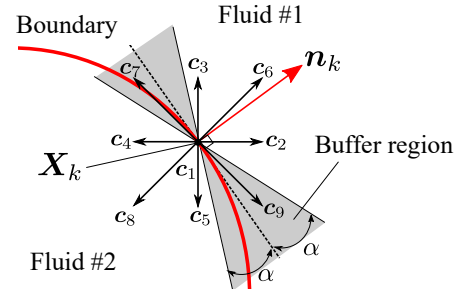


Fig. 3: Illustration of the buffer region for a relaxation of the bounce-back condition. The buffer region is between the planes which are inclined by α from the tangential plane of the boundary.

これは、境界の接平面から角度 α だけ傾いた平面の間に来る領域をバッファ領域 (Fig. 3) として、そのバッファ領域中で、境界を通過した場合の速度分布関数と境界で跳ね返った場合の速度分布関数を、重み β で足し合わせることで、bounce-back 条件を緩和することが狙いである。本研究では、 $\alpha = 22.5^\circ$ とする。これは、緩和する範囲が狭すぎると応力に非物理的な振動が発生してしまい、逆に広すぎると境界を通過してしまう仮想粒子が多くなり応力が適切に計算できないことから、その兼ね合いで決定している。

この $f_i^{[1]}$ および $f_i^{[2]}$ を用いて、流体 1 および 2 の境界点 \mathbf{X}_k における応力テンソル $\sigma_{\alpha\beta}^{[1]}(\mathbf{X}_k)$ および $\sigma_{\alpha\beta}^{[2]}(\mathbf{X}_k)$ が以下のように計算できる。(13)

$$\sigma_{\alpha\beta}^{[\ell]} = -\frac{1}{2\tau}p^{[\ell]} - \frac{\tau-1/2}{\tau} \left[\sum_{i=1}^b f_i^{[\ell]}(c_{i\alpha} - U_{k\alpha})(c_{i\beta} - U_{k\beta}) - (3p^{[\ell]} - 1)U_{k\alpha}U_{k\beta} \right], \quad (\ell = 1, 2), \quad (22)$$

ここで、 $\alpha, \beta = x, y, z$ は総和規約に従い、 $p^{[\ell]}$ は、 $f_i^{[\ell]}$ を用いて Eq. (6) から計算される圧力である。

Eq. (3) により、流体 1 および 2 の境界点 \mathbf{X}_k における応力テンソルの差から、境界点 \mathbf{X}_k で加えるべき体積力が以下のように決定する。

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t)\Delta V = -[\boldsymbol{\sigma}^{[1]}(\mathbf{X}_k) - \boldsymbol{\sigma}^{[2]}(\mathbf{X}_k)] \cdot \mathbf{n}_k \Delta S, \quad (23)$$

ここで、 ΔS は面積要素で、境界の表面積を S とすると、 $\Delta S = S/N$ で与えられる。本手法では、 $\Delta S \lesssim \Delta x$ となるように境界点の個数 N を決定する。また、体積力は境界点一点にのみ加わるのではなく、境界点近傍の微小な領域に平均的に分布していると考え、その領域の体積を ΔV で表す。本手法では、 $\Delta V = \Delta S \times \Delta x$ で与える。

最後に、この体積力を、周囲の格子点に以下のように分配する。

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{g}(\mathbf{X}_k, t + \Delta t) W(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) \Delta V, \quad (24)$$

ここで、内挿と同じ重み関数 W を用いている。この分配した体積力を用いて、Eq. (9) と同様に以下のように速度分布関数を補正する。

$$f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) = f_i^{**}(\mathbf{x}, t + \Delta t) + 3\Delta x E_i c_i \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t + \Delta t). \quad (25)$$

3.4 物体が周囲の流体から受ける力およびトルク

物体が境界点 \mathbf{X}_k 周りの微小面積を介して周囲の流体から受ける応力 $\mathbf{P}(\mathbf{X}_k)$ は、物体の外側の流体を流体 1 としたとき、流体 1 の側の応力テンソルを用いて、以下のように計算される。

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_k) = \boldsymbol{\sigma}^{[1]}(\mathbf{X}_k) \cdot \mathbf{n}_k. \quad (26)$$

また、物体が周囲の流体から受ける正味の力 \mathbf{F} は、Eq. (26) を用いて以下のように計算される。

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(\mathbf{X}_k) \Delta S. \quad (27)$$

同様に、物体が周囲の流体から受ける、点 \mathbf{X}_c 周りの正味のトルク \mathbf{T} は、以下のように計算される。

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^N (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_c) \times \mathbf{P}(\mathbf{X}_k) \Delta S. \quad (28)$$

3.5 物体の運動計算

物体が流体中を自由に運動するような場合には、Eq. (27) で与えられる力 \mathbf{F} と Eq. (28) で与えられるトルク \mathbf{T} を用いて、物体の運動方程式を計算する。物体の運動方程式の詳細については、文献^(9, 14)を参照されたい。本研究では、物体の運動計算の時間刻みは、流体の運動計算と同じにとり、流体と物体の運動計算を交互に行う弱連成を用いる。また、物体の運動方程式の離散化には、2 次精度の Adams-Bashforth 法を用いる。

4. 妥当性検証

4.1 一様流中に置かれた静止円柱周りの流れ

まず、典型的な静止境界問題として、一様流中に置かれた静止円柱周りの流れを考える。速さ u_∞ 、圧力 p_∞ の一様流中に、直径 D_s の静止円柱が置かれているとする。一様流と同じ方向に x 軸を取り、その垂直な方向に y 軸を取る。円柱の中心を $(x, y) = (0, 0)$ とする。系の支配パラメータは、Reynolds 数 $Re = u_\infty D_s / \nu$ である。

計算領域は、 $[-16D_s, 24D_s] \times [-20D_s, 20D_s]$ とし、境界条件は全て圧力 $p = p_\infty$ 、流速 $\mathbf{u} = (u_\infty, 0)$ の Dirichlet 境界条件とする。本計算では、境界上で未知の速度分布関数が、与えられた巨視量に対する平衡分布関数に等しいとして計算する。初期において、流れは全場で一様流とする。本計算では、 $D_s = 50\Delta x$ 、 $N = 204$ 、 $p_\infty = 1/3$ 、 $u_\infty = 0.03$ とする。

Fig. 4 に、 $Re = 40$ における円柱周りの流線の様子を示す。Fig. 4(a) より、改良前の元の手法⁽⁹⁾では、流線が境界を貫通している様子が確認できる。一方、Fig. 4(b) より、改良した手法では、流線が境界を貫通せず、円柱表面に沿って流れている様子が確認できる。この結果より、改良した手法によって、元の手法の問題 (i) が解決できていることが分かる。

境界上の局所的な力の計算精度を調べるために、円柱表面上の圧力係数と摩擦係数を計算する。円柱表面上の各点を偏角 θ で表すと、圧力係数 C_p と摩擦係数 C_f は以下のように定義される。

$$C_p(\theta) = \frac{p^{[1]}(\theta) - p_{\text{ref}}}{0.5\rho_f u_{\text{ref}}^2}, \quad (29)$$

$$C_f(\theta) = \frac{\mathbf{n}(\theta)^T \boldsymbol{\sigma}^{[1]}(\theta) \mathbf{n}(\theta)}{0.5\rho_f u_{\text{ref}}^2}, \quad (30)$$

ここで、 $p^{[1]}$ および $\boldsymbol{\sigma}^{[1]}$ は、流体 1 を物体外部の流体とした場合に、 $f_i^{[1]}$ を用いて計算される境界上の圧力と応力テンソルであり、 \mathbf{n} は境界上の外向き単位法線ベクトルである (T は転置を意味する)。また、 ρ_f は流体の密度、 p_{ref} と u_{ref} は基準圧力と基準速度であり、本計算では $p_{\text{ref}} = p_\infty$ 、 $u_{\text{ref}} = u_\infty$ とする。

Fig. 5 に、 $Re = 40$ における円柱表面上の圧力係数 C_p と摩擦係数 C_f の分布を示す。Fig. 5(a) より、元の手法で計算した C_p には、 $\theta = 45^\circ$ 、 90° 付近に、大きな非物理的な振動が見られる。一方、改良した手法で計算した C_p に

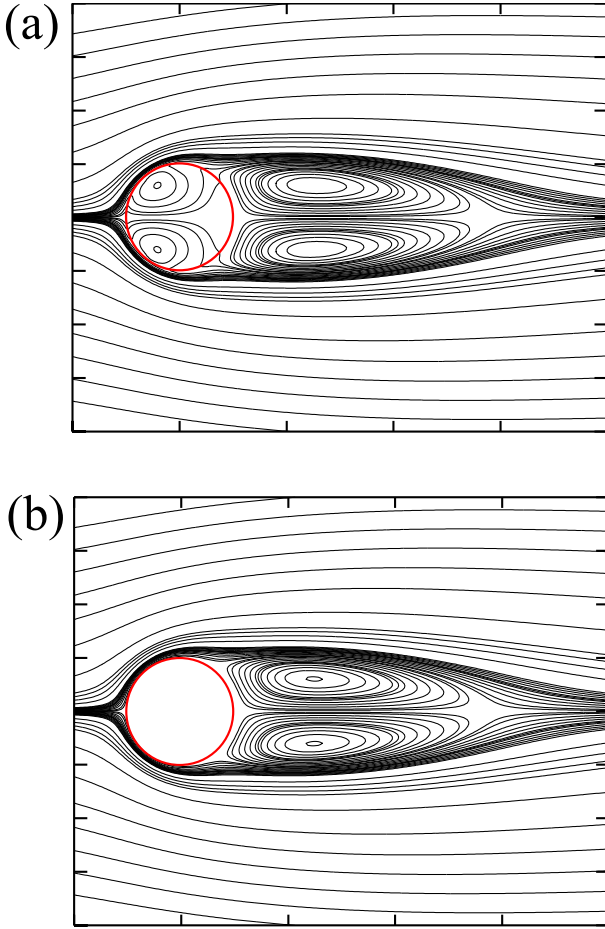


Fig. 4: Streamlines in the flow past a circular cylinder at $Re = 40$ for (a) the original method⁽⁹⁾ and (b) the improved method.

は、非物理的な振動は見られず、既往の数値計算結果との良い一致が確認できる。また、Fig. 5(b) より、元の手法で計算した C_f には、比較的小さいが非物理的な振動が見られるが、改良した手法で計算した C_f には、非物理的な振動は見られず、既往の数値計算結果との良い一致が確認できる。この結果より、改良した手法によって、元の手法の問題 (ii) が解決できており、かつ局所的な力を精度よく計算できていることが分かる。

Table 1 に、 $Re = 20$ および 40 における、抗力係数 C_D と後流の渦対長さ L_w を示す。なお、抗力係数の定義は以下のとおりである。

$$C_D = \frac{F_x}{0.5\rho_f u_\infty^2 D_s}, \quad (31)$$

ここで、 F_x は円柱が受ける正味の力の x 方向成分である。この表より、元の手法の結果に比べて、改良した手法の結果のほうが、 C_D が若干小さく、 L_w が若干大きくなっていることが分かる。また、両手法の結果はともに、文献値に近い値であることが分かる。このことから、本研究における改良によって、境界付近の流線や境界上の力といった局所的な量は改善されたが、正味の力といった大域的な量への影響は大きくないことが分かる。

この問題では、高い Reynolds 数になると、渦が円柱表

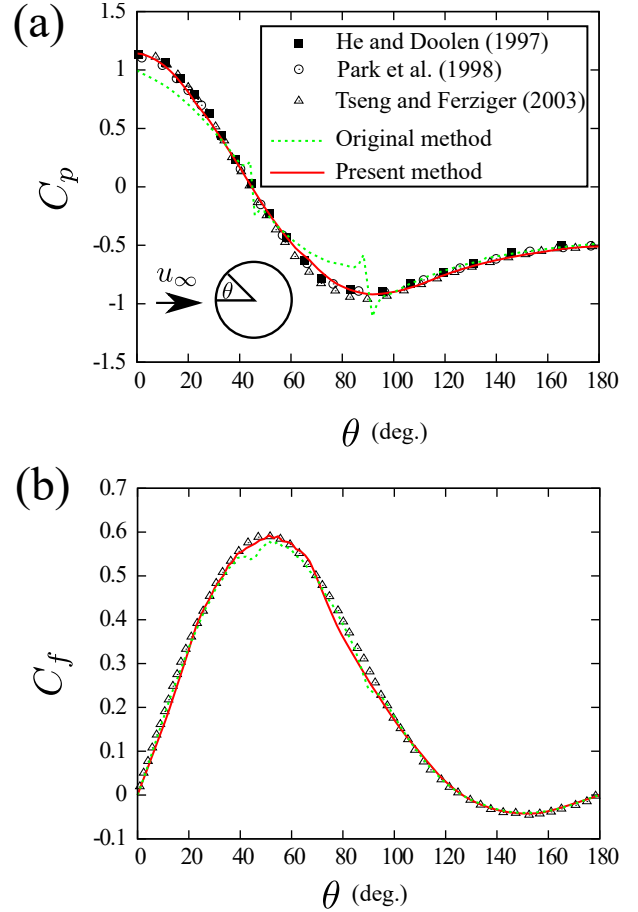


Fig. 5: Distributions of (a) the pressure coefficient C_p and (b) the friction coefficient C_f on the circular cylinder in a uniform flow. The numerical results by the present method and the original method⁽⁹⁾ are shown with the numerical results obtained by He and Doolen,⁽¹⁵⁾ Park et al.,⁽¹⁶⁾ and Tseng and Ferziger.⁽¹⁷⁾

面上から剥離して後流に周期的な Karman 渦列が放出される。Table 2 に、 $Re = 200$ における、抗力係数 C_D 、揚力係数 C_L 、Strouhal 数 St を示す。なお、揚力係数と Strouhal 数の定義は以下のとおりである。

$$C_L = \frac{F_y}{0.5\rho_f u_\infty^2 D_s}, \quad (32)$$

$$St = \frac{f_s D_s}{u_\infty}, \quad (33)$$

ここで、 F_y は円柱が受ける正味の力の y 方向成分、 f_s は渦が剥離する周波数である。この計算では抗力係数、揚力係数が周期的に変化するため、Table 2 ではこれらの値の最大値と最小値を示している。この表より、元の手法の結果に比べて、改良した手法の結果のほうが、 C_D と C_L は若干小さく、 St はほとんど変わらないことが分かる。また、両手法の結果はともに、文献値に近い値であることが分かる。これは、 $Re = 20, 40$ の場合の結果と同様の傾向である。このことから、 Re が大きくなっても、結果の傾向は変わらないことが分かる。

Table 1: Comparison of the drag coefficient C_D and the wake length L_w/D_s at $Re = 20$ and 40.

Re	References	C_D	L_w/D_s
20	Tritton ⁽¹⁸⁾	2.09	–
	Coutanceau and Bouard ⁽¹⁹⁾	–	0.93
	Dennis and Cheng ⁽²⁰⁾	2.045	0.94
	He and Doolen ⁽¹⁵⁾	2.152	0.921
	Taira and Colonius ⁽²¹⁾	2.07	0.94
	Wu and Shu ⁽²²⁾	2.091	0.93
	Original method ⁽⁹⁾	2.091	0.94
	Present	2.064	0.96
40	Tritton ⁽¹⁸⁾	1.59	–
	Coutanceau and Bouard ⁽¹⁹⁾	–	2.13
	Dennis and Cheng ⁽²⁰⁾	1.522	2.35
	He and Doolen ⁽¹⁵⁾	1.550	2.25
	Taira and Colonius ⁽²¹⁾	1.54	2.30
	Wu and Shu ⁽²²⁾	1.565	2.31
	Original method ⁽⁹⁾	1.568	2.36
	Present	1.542	2.34

Table 2: Comparison of the drag coefficient C_D , the lift coefficient C_L , and the Strouhal number St of the vortex shedding at $Re = 200$.

References	C_D	C_L	St
Roshko ⁽²³⁾	–	–	0.19
Liu et al. ⁽²⁴⁾	1.31 ± 0.049	± 0.69	0.192
Linnick and Fasel ⁽²⁵⁾	1.34 ± 0.044	± 0.69	0.197
Taira and Colonius ⁽²¹⁾	1.35 ± 0.048	± 0.68	0.196
Wang et al. ⁽²⁶⁾	1.43 ± 0.051	± 0.75	0.195
Original method ⁽⁹⁾	1.46 ± 0.050	± 0.74	0.196
Present	1.37 ± 0.048	± 0.71	0.195

4.2 Couette 流中の円柱の自由運動

次に、移動境界問題の一例として、Couette 流中の円柱の自由運動を考える。Fig. 6 に示すように、幅 H 、長さ L の平行平板間の単純せん断流中で、直径 D_s の円柱が運動しているとする。ここでは、 $L = H$ 、 $H = 4D_s$ とする。平板に平行な方向を x 軸とし、その垂直な方向を y 軸とする。平板は $y = 0$ および $y = L$ にあり、それぞれ速度 $\mathbf{u} = (-u_w/2, 0)$ および $\mathbf{u} = (u_w/2, 0)$ で動いているものとする。重力は働いておらず、物体と流体の密度は等しいとする。系の支配パラメタは、Reynolds 数 $Re = u_w H/\nu$

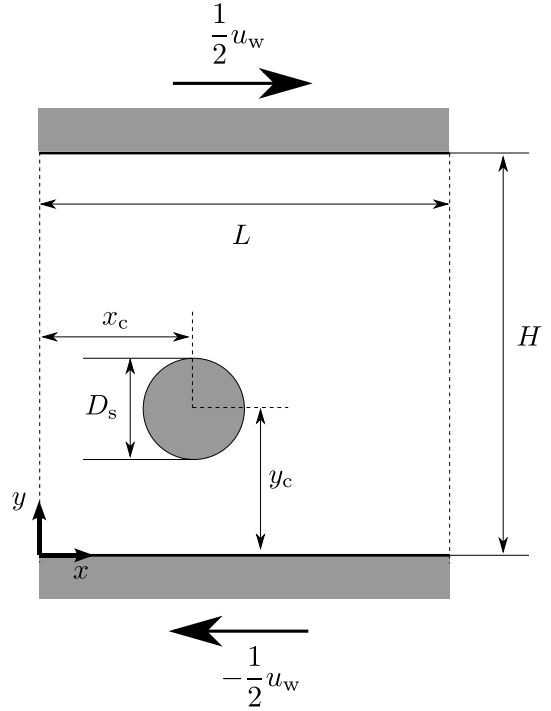


Fig. 6: The domain of computation for the migration of a particle in a planar Couette flow.

であり、 $Re = 40$ とする。

計算領域の境界条件として、上下の平板は bounce-back 法 ⁽¹⁰⁾ による滑りなし条件、左右の境界は周期条件とする。初期において、流れは全場で静止しているとする。本計算では、 $D_s = 50\Delta x$ 、 $N = 204$ 、 $u_w = 0.03$ とする。また、円柱表面上の圧力係数と摩擦係数を計算する際には、式 (29) と (30) において、 $p_{\text{ref}} = 1/3$ (初期圧力)、 $u_{\text{ref}} = u_w$ とする。

Fig. 7 に、様々な初期位置に対する、円柱中心の y 軸方向変位 y_c の時間変化を示す。この図より、元の手法と改良した手法の結果は、ほぼ同じ変化をしており、どの初期位置から出発しても流路中心に近づいて行っていることが分かる。この挙動は、Feng et al. ⁽²⁷⁾ による数値計算結果にも見られ、妥当な結果であると考えられる。また、元の手法と改良した手法の結果がほぼ重なっていることから、正味の力といった大域的な量に関する両手法の差は、かなり小さいことが分かる。

Fig. 8 に、ほぼ定常になった無次元時刻 $t^* = t/(H/u_w) = 150$ における、円柱表面上の圧力係数と摩擦係数の分布を示す。この図より、元の手法で見られる C_p 、 C_f の非物理的な振動が、改良した手法の結果では抑えられていることが分かる。また、改良した手法の結果は、 C_p のピーク値に若干の差はあるものの、既往の数値計算結果と近い結果を示している。このことから、本研究の改良は移動境界問題においても有効であり、局所的な力を精度よく計算できることが分かる。

5. 結言

本研究では、応力テンソルの不連続条件を用いた埋め込み境界-格子ボルツマン法 ⁽⁹⁾ を改良し、(i) 流線が境界を貫通してしまう問題と、(ii) 境界上の応力に非物理的な振

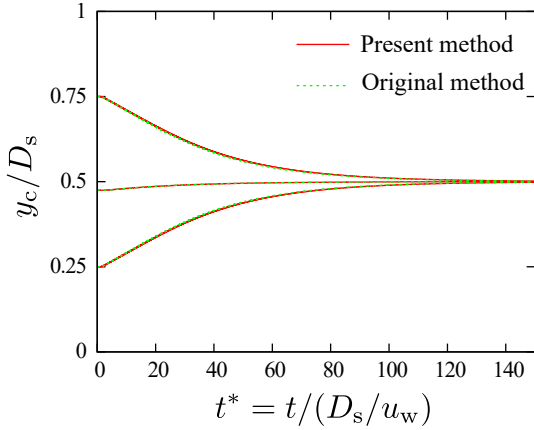


Fig. 7: Lateral migrations of a circular cylinder in a planar Couette flow for various initial positions.

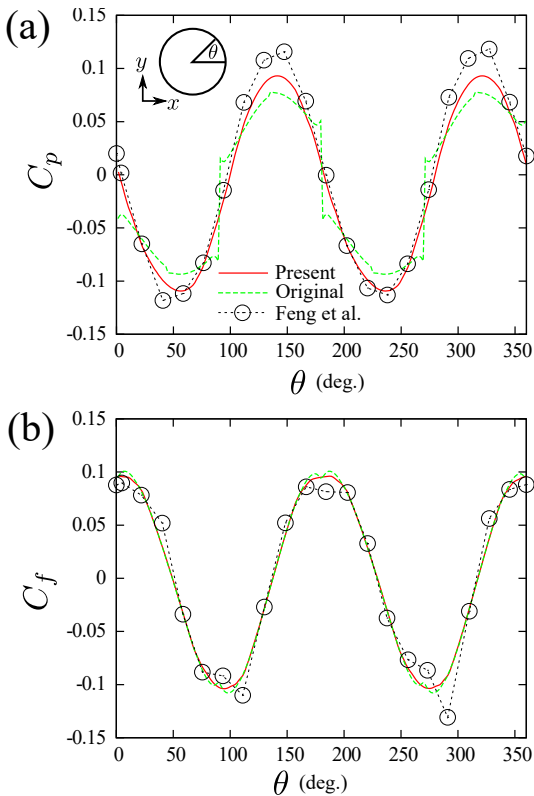


Fig. 8: Distributions of (a) the pressure coefficient C_p and (b) the friction coefficient C_f on the circular cylinder in a planar Couette flow. The numerical results by the present method and the original method⁽⁹⁾ are shown with the numerical results obtained by Feng et al.⁽²⁷⁾

動が生じてしまう問題を解決した。問題 (i) は, smoothed-profile method (SPM)⁽¹¹⁾ を用いた前処理によって, 物体内部の流体の流速を, 物体自身の速度に強制することで解決した。問題 (ii) は, 境界の法線方向の角度に応じたバッファ領域を定義し, そのバッファ領域中で, 境界を通過した場合の速度分布関数と境界で跳ね返った場合の速度分布関数を, 重みをつけて足し合わせることで,

bounce-back 条件を緩和することで解決した。本改良の妥当性を検証するために, 一様流中に置かれた静止円柱周りの流れと, Couette 流中の円柱の自由運動を計算した。その結果, 改良した手法は問題 (i), (ii) を効果的に改善しており, また, 既往の数値計算結果と定量的によく一致した結果を与えることが分かった。今後は, 3次元移動境界問題における妥当性検証や, 円柱や球以外の複雑な物体に対して手法を拡張する予定である。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP16K18012 の助成を受けたものです。

参考文献

- (1) C. S. Peskin, Flow patterns around heart valves: a numerical method, *J. Comput. Phys.* **10** (1972), 252-271.
- (2) R. Mittal and G. Iaccarino, Immersed boundary methods, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **37** (2005), 239-261.
- (3) J. Mohd-Yusof, Combined immersed-boundary/B-spline methods for simulations of flow in complex geometries, *CTR Annual Research Briefs*, NASA Ames/Stanford University, (1997), 317-327.
- (4) S. Kang and Y. Hassan, A comparative study of direct-forcing immersed boundary–lattice Boltzmann methods for stationary complex boundaries, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **66** (2011), 1132-1158.
- (5) M. Uhlmann, An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows, *J. Comput. Phys.* **209** (2005), 448-476.
- (6) C. S. Peskin, The immersed boundary method, *Acta Numer.* **11** (2002), 479-517.
- (7) E. A. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi, and J. Mohd-Yusof Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations, *J. Comput. Phys.* **161** (2000), 35-60.
- (8) 鈴木康祐, 吉野正人, 応力テンソルの不連続条件を用いた埋め込み境界–格子ボルツマン法の提案, 第 30 回数値流体力学シンポジウム **B05-5** (2016).
- (9) K. Suzuki and M. Yoshino, A stress tensor discontinuity-based immersed boundary–lattice Boltzmann method, *Comput. Fluids* **172** (2018), 593-608.
- (10) S. Succi, *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*, Oxford University Press, Oxford, 2001.
- (11) Y. Mino, H. Shinto, S. Sakai, and H. Matsuyama, Effect of internal mass in the lattice Boltzmann simulation of moving solid bodies by the smoothed-profile method, *Phys. Rev. E* **95** (2017), 043309 (10pp).

- (12) X. He and L.-S. Luo, Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier–Stokes equation, *J. Stat. Phys.* **88** (1997), 927-944.
- (13) T. Inamuro, K. Maeba, and F. Ogino, *Int. J. Multiphase Flow* **26** (2000), 1981-2004.
- (14) K. Suzuki and T. Inamuro, Effect of internal mass in the simulation of a moving body by the immersed boundary method, *Comput. Fluids* **49** (2011), 173-187.
- (15) X. He and G. Doolen, Lattice Boltzmann method on curvilinear coordinates system: flow around a circular cylinder, *J. Comput. Phys.* **134** (1997), 306-315.
- (16) J. Park, K. Kwon, and H. Choi, Numerical solutions of flow past a circular cylinder at Reynolds number up to 160, *KSME Int. J.* **12** (1998), 1200-1205.
- (17) Y.H. Tseng and J. H. Ferziger, A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry, *J. Comput. Phys.* **192** (2003), 593-623.
- (18) D. J. Tritton, Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds number, *J. Fluid Mech.* **6** (1959), 547-567.
- (19) M. Coutanceau and R. Bouard, Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation, *J. Fluid Mech.* **79** (1977), 231-256.
- (20) S. C. R. Dennis and G. Cheng, Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds number up to 100, *J. Fluid Mech.* **42** (1970), 471-489.
- (21) K. Taira and T. Colonius, The immersed boundary method: A projection approach, *J. Comput. Phys.* **225** (2007), 2118-2137.
- (22) J. Wu and C. Shu, Implicit velocity correction-based immersed boundary-lattice Boltzmann method and its applications, *J. Comput. Phys.* **228** (2009), 1963-1979.
- (23) A. Roshko, *Report 1191: On the development of turbulent wakes from vortex streets*, NACA, (1954).
- (24) C. Liu, X. Zheng, and C. H. Sung, Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows, *J. Comput. Phys.* **139** (1998), 35-57.
- (25) M. N. Linnick and H. F. Fasel, A high-order immersed interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains, *J. Comput. Phys.* **204** (2005), 157-192.
- (26) Y. Wang, C. Shu, C. J. Teo, and J. Wu, An immersed boundary–lattice Boltzmann flux solver and its applications to fluid–structure interaction problems, *J. Fluid Struct.* **54** (2015), 440-465.
- (27) J. Feng, H. H. Hu, and D. D. Joseph, Direct simulation of initial value problems for the motion of solid bodies in a Newtonian fluid. Part 2. Couette and Poiseuille flows, *J. Fluid Mech.* **277** (1994), 271-301.