

## 格子ボルツマン法を用いた並列流体構造連成解析手法の開発

### Development of parallel fluid-structure interaction solver using lattice Boltzmann method

- 松村 一輝, 山口大院, 山口県宇部市常盤台 2-16-1, E-mail:g045vd@yamaguchi-u.ac.jp  
 蔣 飛, 山口大, 山口県宇部市常盤台 2-16-1, E-mail:fjiang@yamaguchi-u.ac.jp  
 陳 献, 山口大, 山口県宇部市常盤台 2-16-1, E-mail:xchen@yamaguchi-u.ac.jp  
 大木 順司, 山口大, 山口県宇部市常盤台 2-16-1, E-mail:ohgi@yamaguchi-u.ac.jp  
 Kazuki MATSUMURA, Yamaguchi University, 2-16-1, Tokiwadai, Ube, Yamaguchi  
 Fei JIANG, Yamaguchi University, 2-16-1, Tokiwadai, Ube, Yamaguchi  
 Xian CHEN, Yamaguchi University, 2-16-1, Tokiwadai, Ube, Yamaguchi  
 Junji OHGI, Yamaguchi University, 2-16-1, Tokiwadai, Ube, Yamaguchi

In this study, we developed a fluid-structure interaction solver which coupled lattice Boltzmann method with finite element method. Immersed boundary method was used for information exchange between the fluid and solid domain at the interface. In order to strictly implement the nonslip condition, multi direct forcing method was adopted. By performing iterative calculation for coupling, stable analysis became possible. By simulating the benchmark problem of flow-induced vibration of an elastic beam behind a cylinder, good agreement were obtained with the reference data [2]. Parallel implementation using GPU was carried out to shorten the calculation time. Finally the computation time was reduced about seven times with full GPU parallel implementation.

#### 1. 緒言

流体構造連成 (FSI) 解析は生命活動の維持に関わる生体内の力学的諸現象の理解を深める上で強力な手段である。医療現場において治療効果を事前予測し、治療の指針に与えることからその活用が高い期待が寄せられている。しかし生体組織のような複雑な形状の解析を行うとなると、モデルの要素数や節点数が大きくなる。このような大規模問題に対しては、現実的な時間内に解が求まらないことも多い。したがって効率的な解析手法の開発が求められる。また従来の FSI 解析手法においては、流体領域と構造領域の連成境界面に適合したメッシュ (境界適合格子) を用いる方法が一般的であった。しかし境界適合格子の作成には人的・時間的コストがかかる、構造が大きく変形した場合に流体領域を離散化したメッシュの破綻などが問題になっている。

これらの問題を解決するために本研究ではメッシュの破綻を考慮する必要のない、埋め込み境界法 (IBM) を用いて流体と構造体の相互作用を表現する。また流体には格子ボルツマン法 (LBM) を用いる。LBM は流体を仮想粒子の集合体とみなし、速度分布関数の並進と衝突を解くことで流れ場を計算する手法である。従来の差分法等の手法に比べ、アルゴリズムが簡単、ポアソン方程式が不要、比較的並列化が容易という特徴があり、高速計算に向いているといえる。構造体には有限要素法 (FEM) を用いる。FEM は解析対象領域を節点で囲まれたメッシュ状の領域 (要素) に分割し、各要素について近似的に応力と変位の関係を求め、要素の集合体に対して成立する方程式をマトリクス演算により解く手法であり、様々な分野で幅広く活用されている。特に FEM の動解析における陽解法は陰解法と比べて時間刻みの制限は厳しいが、連立方程式の求解が不要、比較的並列化が容易という特徴があり、高速計算に向いているといえる。これらの手法を組み合わせた並列 FSI 解析手法の開発の報告は少なく、あまり研究されていない。そこで本研究では GPU を用いた並列 FSI 解析手法の開発を行い、生体現象に適用させることを目指すための足掛かりとする。

#### 2. 数値計算手法

##### 2-1 格子ボルツマン法 (LBM)

支配方程式である格子ボルツマン方程式は、

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) = \Omega_i[f(x, t)] + \Delta t G_i(x, t) \quad (1)$$

で表される。ここで  $f$  は速度分布関数、 $c$  は離散速度ベクトルであり、右辺第一項は衝突項、第二項は外力項である。衝突項には粒子分布が単一割合で局所平衡状態へ近づくことと仮定した BGK モデルを使用する。外力項には体積力  $g$  の影響を考慮したモデルを使用する。

$$G_i = \left(1 - \frac{\Delta t}{2\tau}\right) \omega_i \left[ \frac{c_i - v_f}{c_{s,f}^2} + \frac{(c_i \cdot v_f)}{c_{s,f}^4} c_i \right] \cdot g \quad (2)$$

ここで  $\tau$  は単一緩和係数、 $\omega$  は重み係数、 $v_f$  はマクロの速度、 $c_{s,f}$  は音速である。ここで  $g$  は IBM によって計算される力であり、FSI 解析における流体と構造体を関連付ける役割を担っている。本研究では D3Q19 モデルを用いる。

##### 2-2 有限要素法 (FEM)

本研究では FEM による時間的な変化の解析を、陽解法 (中央差分法) を用いて行う。離散化された減衰を考慮しない運動方程式を時刻  $t + \Delta t$  において表すと、

$$M^{t+\Delta t} \ddot{U} + {}^{t+\Delta t} Q = {}^{t+\Delta t} F \quad (3)$$

となる。ここで  $M$  は質量マトリクス、 $Q$  は内力ベクトル、 $F$  は外力ベクトルである。Newmark- $\beta$ 法を用いて時刻  $t + \Delta t$  における変位と速度の式を次のように定義する。

$${}^{t+\Delta t} U = {}^t U + \Delta t {}^t \dot{U} + \Delta t^2 \left\{ \left(\frac{1}{2} - \beta\right) {}^t \ddot{U} + \beta {}^{t+\Delta t} \ddot{U} \right\} \quad (4)$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{U} = {}^t \dot{U} + \Delta t \{ \gamma {}^{t+\Delta t} \ddot{U} + (1 - \gamma) {}^t \ddot{U} \} \quad (5)$$

陽解法の時パラメータは $\gamma = 1/2, \beta = 0$ となる。このとき式(4)より現在の時刻の速度と加速度を用いて次の時刻の変位を予測できる。また $M$ に集中質量マトリックスを用いることで連立方程式の求解が必要なくなる。ただし陽解法の場合はクーラン条件を満足するように $\Delta t$ を十分小さくする必要がある。FSI 解析においては IBM で求めた流体力を荷重条件とする。

### 2-3 埋め込み境界法 (IBM)

本研究では滑りなし条件をより強く強制するために、反復的に力を加える Multi Direct Forcing Method (MDFM) <sup>(1)</sup>を用いた。

境界を $N$ 個の点に離散化したとし、境界点を $X_k (k = 1, 2, \dots, N)$ と表す。また流体は定常で規則的な格子を扱うオイラーグリッド $x$ である。

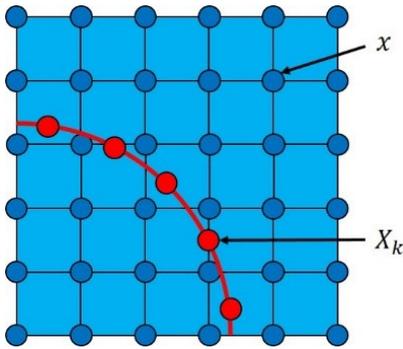


Fig. 1 Relation between the Eulerian grid points  $x$  and the boundary Lagrangian points  $X_k$

境界上での一時流速は、重み関数 $W$ を用いて以下のように内挿される。

$$v_f^*(X_k) = \sum_x v_f^*(x) W(x - X_k) (\Delta x)^d \quad (6)$$

一時流速を求めた後に反復計算( $l = 1, 2, \dots$ )を行い、流体と構造体の速度の残差を減らし滑りなし条件を達成する。

Step 1 境界条件である構造体の速度 $v_s$ と流速 $v_f$ との残差によって境界点に加える力を計算する。この残差が十分小さければ収束したとみなす。

$$g^l(X_k) = 2\rho \frac{v_s(X_k) - v_f^{l-1}(X_k)}{\Delta t} \quad (7)$$

Step 2 加えられた力を格子点に分配する。ここで $\Delta V$ は各ラグランジュ点における体積力がかかる微小領域である。

$$g^l(x) = \sum_{k=1}^N g^l(X_k) W(x - X_k) \Delta V \quad (8)$$

Step 3 格子点における流速を更新する。

$$v_f^l(x) = v_f^{l-1}(x) + \frac{\Delta t}{2\rho} g^l(x) \quad (9)$$

Step 4 境界点における流速を補間する。

$$v_f^l(X_k) = \sum_x v_f^l(x) W(x - X_k) (\Delta x)^d \quad (10)$$

Step 5 Step 1に戻り、次の反復ステップに進める。

収束した後に得られる体積力と流速は、以下の式で求める。

$$v_f(x) = v_f^{l_{\max}}(x) \quad (11)$$

$$g(X_k) = \sum_{l=1}^{l_{\max}} g^l(X_k) \quad (12)$$

本研究では流体と接している構造体の要素の面の中央にラグランジュ点を配置する。

### 3. FSI カップリングアルゴリズム

本研究では流体と構造体のタイムラグを無くすために、1 タイムステップ中に反復計算( $m = 1, 2, \dots$ )を行う。反復計算を行うことによって安定性を向上させる。

Step a ラグランジュ点における構造体の速度 $v_s^{m-1}(X_k)$ を境界条件として式(7)に与える。

Step b IBM を用いて式(12)によって得られた体積力 $g^{m-1}(X_k)$ を構造体の節点力 $F^{m-1}$ に分配する。

Step c 節点力 $F^{m-1}$ を用いて式(3), (5)を実行し構造体の節点速度 $v_s^m$ を計算する。

Step d 節点速度 $v_s^m$ を用いて、ラグランジュ点における構造体の速度 $v_s^m(X_k)$ を求める。構造体の節点速度 $v_s^m$ と $v_s^{m-1}$ の残差が十分小さければ収束したとみなす。

Step e Step aに戻り、次の反復ステップに進める。収束したならば時間ステップを一つ進める。

本手法において FSI カップリングの反復中における初期条件として与える一時流速は変わらない。よって LBM を用いて一時流速を計算する過程はループから外すことができ、1 タイムステップ中に一度計算すればよいことになる。また FEM は未知数を加速度として解いており、変位は事前に予測できる。この予測した変位を用いるため、ラグランジュ点の座標及び FEM を用いて計算する内力ベクトルは 1 タイムステップ中変わらない。よってこれらを計算する過程もループから外すことができる。したがって FSI カップリングの反復計算において占める割合が最も多いのは IBM となる。

### 4. GPU 実装

本手法は比較的並列化が容易な手法を組み合わせている。そこで手法の全体的な並列化を行った。GPU 実装には CUDA を用いた。CUDA はソフトウェア上で大量のコアをスレッドとブロックの構造で管理している。並列演算が可能な最小単位をスレッド、スレッドの集合体をブロックと呼ぶ。各スレッドは指定された計算領域に対して独立に計算を行う。本研究では最外層ループに対して各スレッドを指定する。すなわち LBM は格子点、FEM は要素、IBM はラグランジュ点ごとに 1 スレッドを割り当て計算させる。また初期状態のみを CPU 上で計算し、GPU に値を転送後は基本的にすべてを GPU 上で計算させる。

5. 開発手法の検証

5-1 解析モデル

本手法の検証として、幅広く使用されている FSI 問題のテストケース<sup>(2)</sup>の計算を行った。

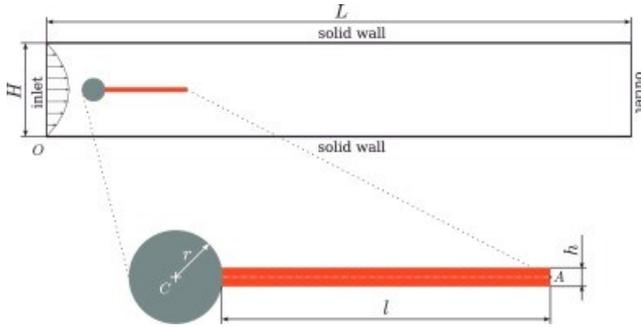


Fig. 2 Configuration of the validation test case<sup>(3)</sup>

図 2 に示すように剛体の円筒と長方形の弾性棒が長方形の流路に浸されている。幾何学的パラメータを表 1 に示す。

Table 1 Geometric parameters of the FSI test case

Parameters	Values
Length of the flow channel $L$	2.5m
Height of the flow channel $H$	0.41m
Radius of the cylinder $r$	0.05m
Length of the solid bar $l$	0.35m
Height of the solid bar $h$	0.02m
Coordinate of the point $O$	(0.0m, 0.0m)
Coordinate of the cylinder center $C$	(0.2m, 0.2m)
Coordinate of the point $A$	(0.6m, 0.2m)

流体の物性値は密度  $\rho_f = 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 動粘性係数  $\nu_f = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$  を与え, 構造体の物性値は密度  $\rho_s = 10 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , ポアソン比  $\nu_s = 0.4$ , ヤング率  $E_s = 1.4 \times 10^6 \text{ Pa}$  を与えた. 境界条件として上下面には Half Bounce back 条件, 流路の流入条件として時間  $t < 2.0\text{s}$  までは式(13), それ以降は式(14)として流速分布を与える。

$$v_f^x(0, y, t) = 1.5\bar{U} \frac{y(H-y)}{(0.5H)^2} \frac{1 - \cos(0.5\pi t)}{2} \quad (13)$$

$$v_f^x(0, y, t) = 1.5\bar{U} \frac{y(H-y)}{(0.5H)^2} \quad (14)$$

ここで  $\bar{U} = 1.0 \text{ m/s}$  であり, レイノルズ数は円筒の直径を  $D$  として  $Re = \bar{U}D/\nu_f = 100$  となる. 長さのスケールとして  $C_x = 0.002\text{m}$ , 時間のスケールとして  $C_t = 10^{-4}\text{s}$  を与える. この時間刻みは FEM のクーラン条件を満たしている。

このテストケースは二次元問題であり, 作成した手法は三次元である. そこで比較するために奥行き方向の境界条件として流体は周期性条件, 構造体は奥行き方向に対して垂直な面を奥行き方向固定に設定した. また円筒及び弾性棒の奥行き方向に対して垂直な面にはラグランジュ点を配置しない。

5-2 解析結果

垂直方向の変位及び周波数を比較する. 流体の格子サイズは  $1251 \times 207 \times 100$  に設定した. 弾性棒の要素形状は六面体とし, 要素数は 175000, 節点数は 195536 である. 変位を出力した座標

について文献は点 A, 本手法は  $(0.6\text{m}, 0.2\text{m}, 0.1\text{m})$  である. 本手法で得られた垂直方向の変位の時間発展を図 3 に示す. また変位及び流れに起因する振動の周波数の定量的な比較を表 2 に示す。

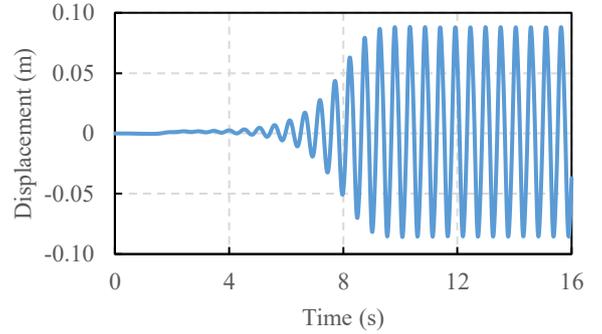


Fig. 3 Time evolution of vertical displacement

Table 2 Vertical displacement and frequency

	$u_y (\times 10^{-3} \text{ m})$	frequency(Hz)
Present method	$1.23 \pm 87.0$	1.887
Turek and Hron <sup>(2)</sup>	$1.23 \pm 80.6$	2.0
Zhe Li and Julien Favier <sup>(3)</sup>	$1.32 \pm 88.6$	1.888

表 2 の垂直方向の変位は  $u_y = u_{\text{mean}} \pm u_{\text{amplitude}}$  で表される. ここで  $u_{\text{mean}}$  は平均値,  $u_{\text{amplitude}}$  は振幅を表し, 計算方法はそれぞれ  $u_{\text{mean}} = (u_{\text{max}} + u_{\text{min}})/2$ ,  $u_{\text{amplitude}} = (u_{\text{max}} - u_{\text{min}})/2$  である. また振動の周波数は  $f = 1/T$  として計算され,  $T$  は流れが安定した後の振動の周期である. 以上の結果から作成した本手法は良好な結果が得られていることを確認した。

5-3 計算時間の比較

1 タイムステップ当たりの CPU のみの計算時間と GPU を用いて並列化を行った計算時間を比較する. また GPU は NVIDIA GTX 1080 Ti を使用した. それぞれの手法が 1 タイムステップあたりに占める計算量の CPU と GPU の比較を図 4 に示す。

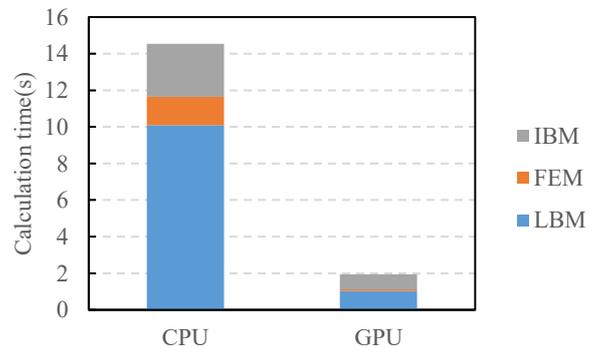


Fig. 4 Computational amount of each method in one time step

全体的に見ると 1 タイムステップ当たりの計算時間は並列計算を行うことにより約 7 倍速くなった. 手法ごとに見てみると LBM 及び FEM はかなり効率が良くなったが, IBM はあまり計算時間の短縮ができていない. この理由として式(8)の力の分配についてアトミック操作を使用しているため, 効率が少し落ちているので

はないかと考えられる。特に IBM は 1 タイムステップ中に IBM の反復に加え, FSI カップリングの反復も行うため多くの計算を要する。今後の課題として IBM をいかに効率よく並列計算させるかが重要になってくると考えられる。

#### 6. 結言

本研究では LBM, IBM 及び FEM を組み合わせた並列 FSI 解析手法を開発し, 本手法が良好な結果を得たことを確認した。課題として, IBM のさらなる効率化が考えられる。今後は応用として本手法を用いて生体現象の解明に向けて取り組んでいく予定である。

#### 参考文献

- (1) Shin K. Kang and Yassin A. Hassan, "A comparative study of direct-forcing immersed boundary-lattice Boltzmann methods for stationary complex boundaries" INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS Int. J. Numer. Math. Fluids 2011; 66:1132-1158
- (2) Stefan Turek and Jaroslav Hron, "Proposal for numerical benchmarking of fluid-structure interaction between an elastic object and laminar incompressible flow" Institute for Applied Mathematics and Numerics, University of Dortmund, Vogelpothsweg 87, 44227 Dortmund, Germany
- (3) Zhe Li and Julien Favier, "A non-staggered coupling of finite element and lattice Boltzmann methods via an immersed boundary scheme for fluid-structure interaction" Computers and Fluids 143 (2017) 90-102