正多角形断面のダクト内を通過する乱流に対するLES

LES for Turbulent Flows Through a Duct of Regular-Polygon Cross-Section

○ 岡本正芳，静大院, 静岡県浜松市中区城北 3-5-1, E-mail: okamoto.masayoshi@shizuoka.ac.jp
Masayoshi OKAMOTO, Grad. Sch. Int. Sci. Tech., Shizuoka Univ., Hamamatsu, Shizuoka, 432-8561

A large eddy simulation (LES) for turbulent flows through a duct of regular-polygon cross-section using the immersed boundary (IB) method is performed in the present work. In case of the square duct, though there are some disagreements of the mean quantities related with the streamwise velocity between the present LES and the previous direct numerical simulation (DNS), the LES can reproduce the secondary flow of the DNS. The LES for ten types of regular-polygon duct shows that the secondary-flow speed decreases as the number of sides of the regular polygon n increases and that the secondary flow in case of the regular decagon duct disappears like the turbulent pipe flow. In case of low n, the turbulence-structure behavior near the side center is different from that near the vertex.

1. 緒言

ダクト内を通過する流れは実用上非常に重要なものである。ダクトは円形断面のパイプと矩形断面のものに大別することができる。層流であれば主流方向速度のみ生じることから断面による差違はほとんどない。しかし、乱流状態の流れでは矩形ダクトの流れの場合、流れ方向にのみ駆動力を加えても主流平均速度に垂直な断面内部に平均流れが発生する。この流れはプラントルの第２種二次流れと呼ばれ、レイノルズ応力の非等方性に起因したものであることが知られている。この二次流れは円形断面内乱流では発生しない。これまで土木分野では川底や水路に対する流れの影響などの点から正方形ダクトを中心にこの二次流れの研究が進められてきた。著者[1, 2, 3]も系回転や圧縮性効果を加えた正方形ダクト内乱流に対して直接数値計算（DNS）を実行し研究を進めてきた。しかし、四角形以外の断面を有するダクトになると検討例は極端に少なくなる。

そこで、本研究では正方形以外の断面幾何形状で二次流れがどのように変化するかを検討するため、正多角形断面を有するダクト内乱流に着目し、正三角形から正二十角形の９種類の正多角形断面と円形断面を有するダクト内乱流の数値計算を実行する。しかし、これらの流れ場では正方形と円形断面を除けば直交性を確保できる格子系を構成することができず、DNS のような厳密な乱流数値解析を行なうことは困難である。そこで、断面を再現するため Goldstein ら[4]により提案された Immersed Boundary（IB）法を利用し、実用計算で比較的高精度の予測性能を有するラージ・エディ・シミュレーション（LES）を実行する。それにより断面形状の正多角形の辺数と二次流れの関係性に関して検討していく。

2. 解析対象の方程式

本研究では渦粘性型のサブグリッドスケール (SGS) モデルを用いた LES と IB 法を組み合わせて非圧縮性乱流場の解析を実行するため、その解析方程式 (グリッドスケール (GS) 方程式) は

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{2\left(\nu + \nu_{SGS}\right)\bar{s}_{ij}\right\} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + f_i + g_i \tag{1}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \tag{2}$$

となる。ここで、$\bar{u}_i$ は GS 速度、$\bar{p}$ は GS 圧力、ν は分子粘性率である。ν_{SGS} は SGS 渦粘性率であり、Kobayashi[5]により提案されたコヒーレント構造型スマゴリンスキーモデルを採用する。この SGS モデルは壁からの距離が不要という大きなメリットがあり、SGS 渦粘性率は

$$\nu_{SGS} = C_1 \left|\frac{Q_2}{E}\right|^{3/2} \Delta^2 \bar{s} \tag{3}$$

と書ける。ここで、Δ はフィルター代表長さ、Q_2 は GS 速度勾配の第二不変量（$Q_2 \equiv -\left(\partial \bar{u}_i/\partial x_j \times \partial \bar{u}_j/\partial x_i\right)/2$）、$E$ は同量の２乗量（$E \equiv \left(\partial \bar{u}_i/\partial x_j \times \partial \bar{u}_i/\partial x_j\right)/2$）であり、モデル定数 C_1 は推奨値の 0.05 である。また、$\bar{s}$ は GS 歪テンソル $\bar{s}_{ij}$ の大きさで、$\bar{s}_{ij}$ の定義は

$$\bar{s}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{4}$$

である。f_i は主流方向のみに設定する一定駆動外力で正 n 角形では $f_n \delta_{i1}$ である。さらに g_i は IB 法により計算領域内において固体が占有している格子で働く仮想外力

$$g_i\left(\mathbf{x}, t\right) = -\gamma\left(\mathbf{x}\right)\left(\alpha u_i\left(\mathbf{x}, t\right) + \beta \int_0^t dt' u_i\left(\mathbf{x}, t'\right)\right) \tag{5}$$

である。ここで、α と β は Goldstein ら[4]によって導入された自由定数でそれぞれ 200、5 と設定している。また空間変数にのみ依存する関数 $\gamma\left(\mathbf{x}\right)$ は位置 $\mathbf{x}$ で定義される格子体積 $V_{Total}\left(\mathbf{x}\right)$ に対するその格子内部での固体物体が占有する体積 $V_{Solid}\left(\mathbf{x}\right)$ の割合を表すもので、$\gamma\left(\mathbf{x}\right) = V_{Solid}\left(\mathbf{x}\right)/V_{Total}\left(\mathbf{x}\right)$ となる。

3. 計算対象流路と数値計算手法

本章では流路断面を形状を正 n 角形において解説しておく。まず、各辺によって決定される弧の中心角 ϕ_n は $2\pi/n$ である。本研究ではその正多角形の断面積 S_n を 4 と固定するため、外接円の半径 r_n は

$$r_n = \sqrt{\frac{8}{n \sin\left(2\pi/n\right)}} \tag{6}$$

と決まる。図 1（例として正五角形断面流路のケース）のように計算対象の流路断面では頂点の一つを y 軸上の正値にとるとすると各頂点の座標は

$$P_k = (r_n \sin k\phi_n, r_n \cos k\phi_n) \tag{7}$$

となる。ここで、$k = 0, 1, \cdots, n-1$ である。また、正 n 角形の辺の長さ l_n は

$$l_n = \sqrt{\frac{16}{n} \tan \frac{\pi}{n}} \tag{8}$$

になる。辺数 n が無限大になると、半径は $r_\infty = 2/\sqrt{\pi}$ の円形となる。

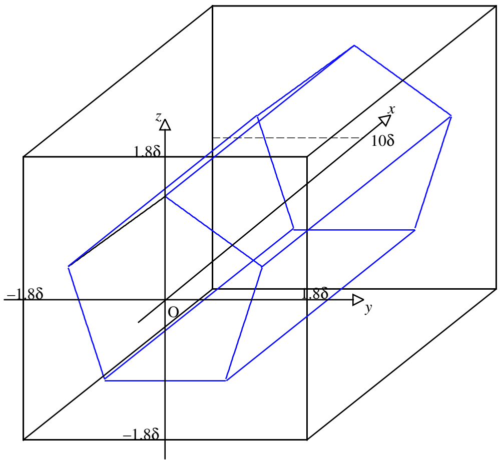

Fig. 1: Flow configuration and coordinate system.

この研究では各辺におけるグローバル平均壁面摩擦 $\bar{\tau}_x$ を固定し、断面積 S_n の平方根を長さスケールとして選択する。本数値計算ではそれらから定義されるレイノルズ数を 400 として LES を実行する。この条件を課すことはバルクレベルでの力の釣り合い式

$$0 = -n l_n \bar{\tau}_x + 4 f_n \tag{9}$$

から、辺数 n に応じて一定駆動外力を

$$f_n = \sqrt{n \tan \frac{\pi}{n}} \tag{10}$$

と設定するということである。この値は $n = 3$ で最も大きく $3^{3/4} \approx 2.28$、n が大きくなるにつれて単調に減少して、円形の値 $\sqrt{\pi} \approx 1.77$ に漸近していく。円形の場合の駆動力に比べて正十二角形で 1.28 %程度の差違しかなく、正二十角形で 0.75 %と非常に近いものとなっている。

本 LES で採用している数値スキームは空間の離散化に 2 次精度中心差分法、時間発展には 2 次精度アダムス-バッシュホース法を利用している。圧力解法は x および z 方向には高速フーリエ変換を利用し y 方向には 3 重対角行列を解く直接解法を採用している。計算領域は、格子の中央を正多角形の重心と一致させて、任意の正多角形を包括できるサイズである $10 \times 3.6 \times 3.6$ としている。よって IB 法により重心から離れた位置のかなりの数の格子は固体壁と対応している。これに設定した計算格子は主流方向に等間隔格子を採用しているだけでなく、正多角形断面内においても壁近傍で密にとる必要があり、断面内の任意の方向に壁があることから細かい等間隔格子を使用している。助走計算の際にはやや粗めの格子系 $64 \times 256 \times 256$ を採用して長時間計算を進め、最終的には細かい格子系 $64 \times 512 \times 512$ での計算に移行させる。この解像度は壁座標単位で主流方向に 30 程度、断面内では至る所でおよそ 1.4 というものとなっている。

また、平均量の算出には一様方向である x 方向の空間平均と時間平均を利用しているが、本研究ではさらに正多角形断面に起因した対称性も課して平均量を評価する。対称性を課す際には円筒座標系への座標変換を利用している。

4. 正方形ダクト内乱流における DNS との比較

結果を検討する前に、まず Re= 400 での DNS データ [(6)] が存在する正方形ダクト内乱流の場合で比較してみる。図 2 は平均主流方向速度 U の分布と流線図である。このプロットでは y および z 軸を平行と設定して壁面境界条件を厳密に取り扱っている DNS の結果を 45 度回転して比較している。U の分布では LES はその値自体が低めの値をとっている点で問題があるが、分布自体は DNS と近いものとなっている。分布形状におけるわずかな差違としては辺の中央部での流路中央への反り方が LES の方が弱い点が挙げられる。一方、二次流れは最大値が DNS では 0.309 なのに対して、本 LES では 0.346 とやや高めではあるが近く、流線図はコーナー極近傍以外では非常によい一致をしている。

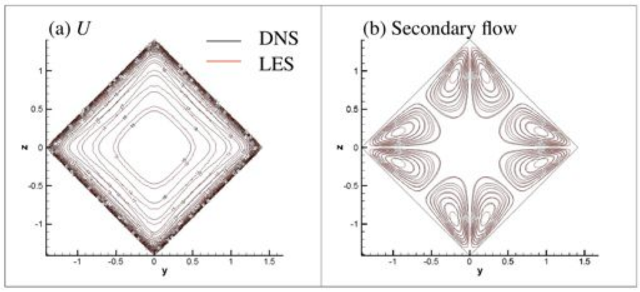

Fig. 2: Contour of the mean streamwise velocity and streamlines of the secondary flow.

次にレイノルズ応力での比較を行う。先に言及したように DNS を行なった際の座標系と本 LES で採用している座標系は主流方向を軸に 45 度回転させているので DNS のレイノルズ応力は以下のように座標変換される。

$$\langle u'u' \rangle = \langle u'u' \rangle_{DNS} \tag{11}$$

$$\langle v'v' \rangle = \frac{\langle v'v' \rangle_{DNS} + \langle w'w' \rangle_{DNS}}{2} + \langle v'w' \rangle_{DNS} \tag{12}$$

$$\langle w'w' \rangle = \frac{\langle v'v' \rangle_{DNS} + \langle w'w' \rangle_{DNS}}{2} - \langle v'w' \rangle_{DNS} \tag{13}$$

$$\langle u'v' \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\langle u'v' \rangle_{DNS} + \langle w'u' \rangle_{DNS} \right) \tag{14}$$

$$\langle v'w' \rangle = \frac{1}{2}\left(\langle w'w' \rangle_{DNS} - \langle v'v' \rangle_{DNS}\right) \qquad (15)$$

$$\langle w'u' \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\langle u'v' \rangle_{DNS} + \langle w'u' \rangle_{DNS}\right) \qquad (16)$$

90 度の回転対称性を考慮してレイノルズ応力 4 成分の比較結果を図 3 に示す。主流方向垂直応力成分 $\overline{u'u'}$ は分布形態的には非常に近いものであるが、最大値では DNS が 8 なのに対して、本 LES は 6 程度にとどまっており低めとなっている。それに対して断面内方向の垂直応力成分 $\overline{v'v'}$ は上下の頂点方向への最大値をとる位置がややシフトしている傾向が確認できるが、分布形態および大きさ共に類似した結果になっている。剪断応力成分 $\overline{u'v'}$ の結果も $\overline{v'v'}$ 同様によい対応が見られるが、この量ではむしろ LES の最大値をとる位置は左右の頂点に寄り過ぎている。最後に剪断応力成分 $\overline{v'w'}$ の結果をみると、DNS では各辺の近くでのみ正負の大きな値をとる分布を示しているが、LES では流路中央部に達している。しかし、LES でもその値の正負自体は再現できている。

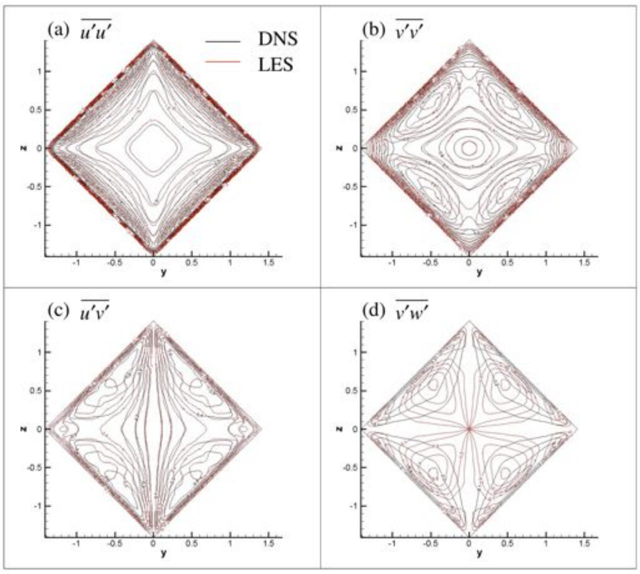

Fig. 3: Distributions of the Reynolds stresses.

以上より本 LES 研究は正確な物理現象の調査は実行できるほどのものではないが、流れ場の性質自体は定性的に検討できると思われる。

5. 計算結果

はじめにバルク速度 U_B と最大二次流れ速度 V_{max} の n 依存性を図 4 に示す。バルク速度は既に言及したように本 LES では小さな値を示す傾向があるが、n が小さいケースではよりやや低めの値を示し、単調ではないが n が大きくなるにつれて増加し円管内乱流への値へと漸近していく。それに対して最大二次流れ速度は n が大きくなるにつれてゼロに減少していく様子が確認できる。正三角形と比較すると、正十角形の二次流れの最大速度は半分程度になっており、正二十角形では 10 %程度まで小さくなっている。少々解りづらいがこの二次流れ最大速度の辺数依存性は $n = 8$ で 2 つに分けられ、正八角形までは $\propto n^{-0.337}$ と緩やかに減少し、それ以上の辺数の正多角形では $\propto n^{-2.47}$ と急激に二次流れは消滅していくようである。

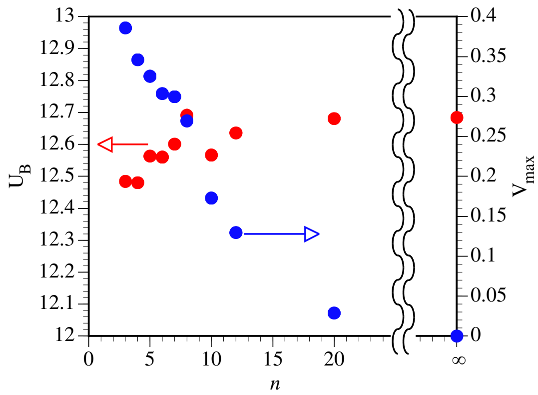

Fig. 4: Bulk velocity U_B and maximum velocity of the secondary flow V_{max}.

平均速度分布の結果を図 5 に示す。主流方向平均速度分布 U はカラーの等高線で、二次流れは流れ関数により可視化した流線で示し、両者とも等高線の間隔は全ケースを通じて同一である。正三角形や正方形断面のケースでは高速を示している流路中央部でもその等高線は断面形状の影響が表れているが、n が大きくなるにつれて壁近くの等高線まで円形状を示すように変化する。特に正二十角形断面のケースは円管のケースに非常に近いものとなっている。二次流れに着目すると、$n = 12$ までは $2n$ 個の循環流が発生していることが確認できるが、正二十角形と円形断面では二次流れが確認できない。対称性を課した平均操作を適用しているので、選択した任意の 1 つの辺とその端点から重心を結ぶ 2 つの辺から構成される三角形内にサイクロニックとアンチサイクロニックの循環流のペアーが存在している。正三角形と正方形の二次流れは非常に強くその循環流は流路中央にまで及んでいるが、n が増加するにつれて循環流の等高線が達する範囲は壁近くに限定され、さらに出現しているコンターラインの本数は減少する。この二次流れの n 依存性は主流方向平均速度 U の分布変化とよく対応している。この結果では $n = 20$ 程度で円管内乱流に非常に近いものとなることが確認できた。

次にレイノルズ応力について見ていく。図 6 に与えた主流方向垂直応力成分 $\overline{u'u'}$ は最も大きな値を示すものであり、非常に高い値は各辺の中央部から少し壁から離れた位置に出現する傾向がみられる。また、平均速度 U の分布よりも流路内部まで断面形状の影響が及んでいる様子も確認できる。垂直応力成分 $\overline{v'v'}$ の結果を図 7 に示す。この量は n が 4 の倍数のとき、$\overline{w'w'}$ を 90 度回転させたものと一致する対称性を持つ。また、水平方向に平行または低角度である壁面近くで高い値を示し、頂点近傍では比較的小さな値をとる分布となっている。円管では上部と下部でのみ大きな値をとる分布に変化するが、この分布傾向は正二十角形でも確認でき、上下の頂点近くで

最大値をとる分布である点は円管のケースと一致している。対称性が成立しない n が奇数のケースでの垂直応力成分 $\overline{v'v'}$ と $\overline{w'w'}$ の比較を図 8 で行なう。正七角形の下側の傾斜した壁面近くの値およびその分布は $\overline{v'v'}$ と $\overline{w'w'}$ が非常に近いものとなっている。これは角度が $\pi/4$ に近く、正方形の場合との違いを考慮すると辺の長さが短くなっていることによっている。

レイノルズ剪断応力 3 成分のうち $\overline{u'v'}$ と $\overline{w'u'}$ は主流方向平均速度 U に関連し、$\overline{v'w'}$ は二次流れ速度 V と W にのみ影響する。$\overline{u'v'}$ の結果が図 9 である。$z=0$ あたりの側壁近傍で正負の強い値をとる様子が見られ、正六角形と正十角形の結果をみると z 軸に平行な壁面近くで高い値を示し、その隣の辺に見られるやや強めの値をとる領域は辺数が増加すると z 軸に平行な辺の強領域に接続する様子が確認できる。正二十角形では各辺毎の影響は見られず、円管内乱流の結果とほぼ一致している。辺の数 n が奇数のケースにおける $\overline{u'v'}$ と $\overline{w'u'}$ の比較を図 10 に与える。$\overline{w'u'}$ は最上部の頂点の左右に強い正値を示す様子が確認できる。左右の頂点付近では上下に正と負をもつ領域が表れている。そして n が増加するにつれて上下対称な分布へと移行していく。二次流れと関連する剪断応力成分である $\overline{v'w'}$ を図 11 に示す。あらゆる n のケースで $\pi/4$ と $5\pi/4$ 方向に正値、$3\pi/4$ と $7\pi/4$ の方向に負値を示す領域が四葉のクローバーのような形状で分布している。正三角形や正方形ダクトの場合クローバー型の分布の周辺にも明らかに正負と示す領域が確認できるが、n が 6 と 10 ではその領域は非常に小さくなり、正二十角形になると円管のケースと同様クローバー型の分布のみが表れた結果になっている。

最後に瞬間場の可視化結果を図 12 に与える。低速ストリーク構造は $u'=-3.5$、渦構造は GS 揺動速度の第二不変量 Q_2 が 0.025 の等値面で可視化した。乱れのため明瞭ではないが、正五角形および正六角形の結果を見ると主に辺の中央部の壁から少し離れた位置に低速ストリーク構造が細く伸びて存在する様子が確認できる。このような傾向は正十角形では確認できず、円管乱流の結果に類似している。以前の圧縮性チャネル乱流における LES 研究(7)では渦構造があまり検出されない傾向であったが、本 LES では断面内の解像度が壁座標単位で 1.4 程度と非常に細かいのでかなり多数の渦構造が検出されている。

6. 結言

本研究では 10 種類の正多角形断面内を通過する完全発達状態乱流に対して IB 法を LES に組み合わせた数値計算を実行して、その結果を検討した。正方形ダクトのケースでの DNS との比較では、主流方向速度のみに関連した量については本 LES での予測性能に問題があったが、二次流れに関してはレイノルズ応力を含めてよい再現性が確認できた。そこで、二次流れに着目して正多角形断面内乱流を検討したところ、以下の知見が得られた。辺数が増加するにつれて、二次流れの最大値は単調に減少し、その到達範囲は壁近くに限定される。正二十角形でほとんど二次流れが消滅し、円管内乱流とほぼ一致していた。このような挙動はレイノルズ応力に関しても同様であった。辺数が少ないケースでは、頂点近くと辺中央部において瞬間場の構造出現パターンも差違が見られたが、辺数が多くなると違いがほとんどなくなった。今後は主流方向速度に関連した予測能力の低下の原因を探り、改善を行なっていく予定である。

参考文献

(1) Okamoto, M., “ Direct Numerical Simulation for Streamwise Rotating Turbulent Flow Through a Square Duct “, ASME-JSME-KSME Joint Fluids Engineering Conference, (2011).

(2) 梅原誠貴, 岡本正芳, “ 壁面温度差を有する圧縮性正方形ダクト内乱流の数値解析的研究 ”, 数値流体力学シンポジウム講演論文集, (2013), A04-1.

(3) 岡部真悟, 岡本正芳, “ 断熱壁を有する圧縮性正方形ダクト内乱流でのマッハ数の効果 ”, 日本機械学会年次大会講演会論文集, (2018), J0520406.

(4) Goldstein, D., Handler, R. and Sirovich, L., “Modeling a No-Slip Flow Boundary with an External Force Field ”, J. Comput. Phys., (1993), pp.354-366.

(5) Kobayashi, H., “The subgrid-scale models based on coherent structures for rotating homogeneous turbulence and turbulent channel flow”, Phys. Fluids., 17, (2005), 045104.

(6) 岡本正芳, “ 非圧縮性および圧縮性正方形ダクト内乱流の比較 ”, 日本機械学会東海支部講演会講演論文集, (2019).

(7) 岡本正芳, 池本晃史, 佐野智哉, “ 等温壁を有する圧縮性チャネル乱流の DNS データによる圧縮性一方程式型 SGS モデルに関する研究 ”, 日本機械学会論文集 (B 編), Vol.77-781, (2011), pp.1747-1757.

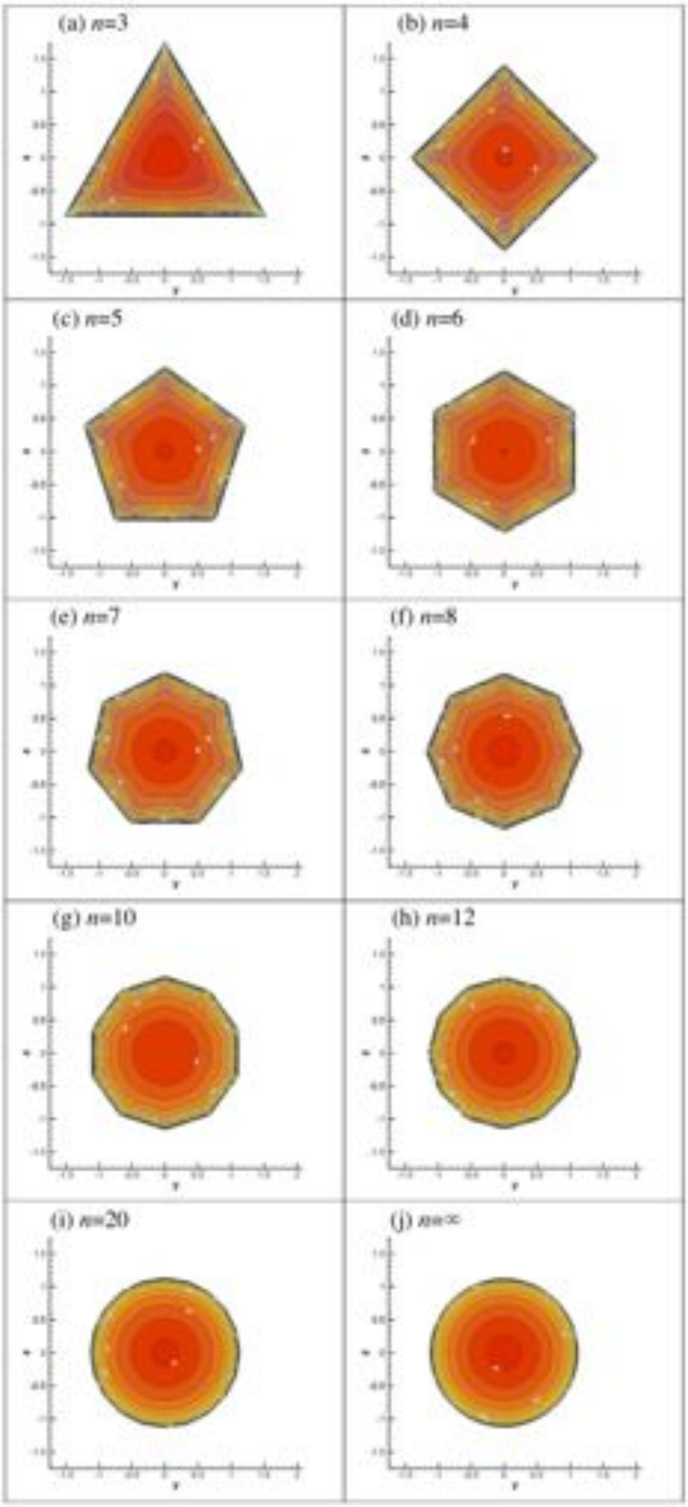

Fig. 5: Streamwise mean velocity U and secondary flow.

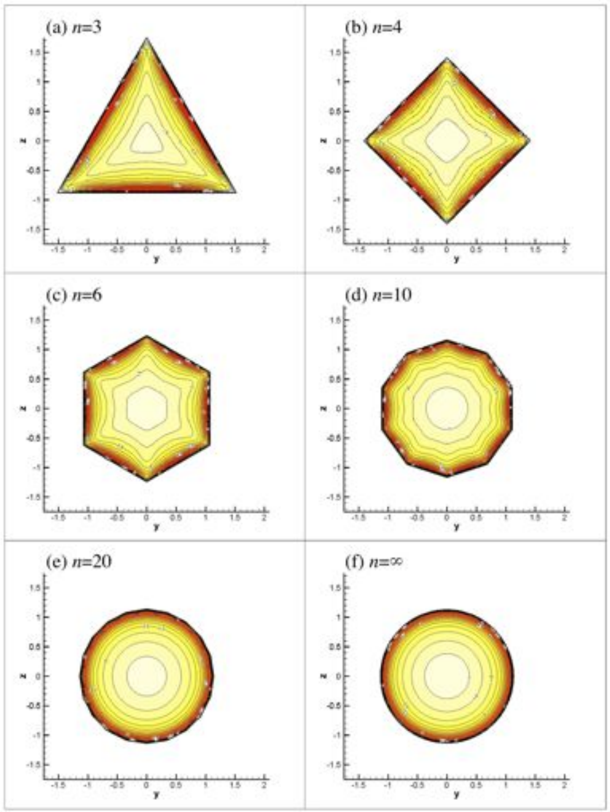

Fig. 6: Reynolds normal stress $\overline{u'u'}$.

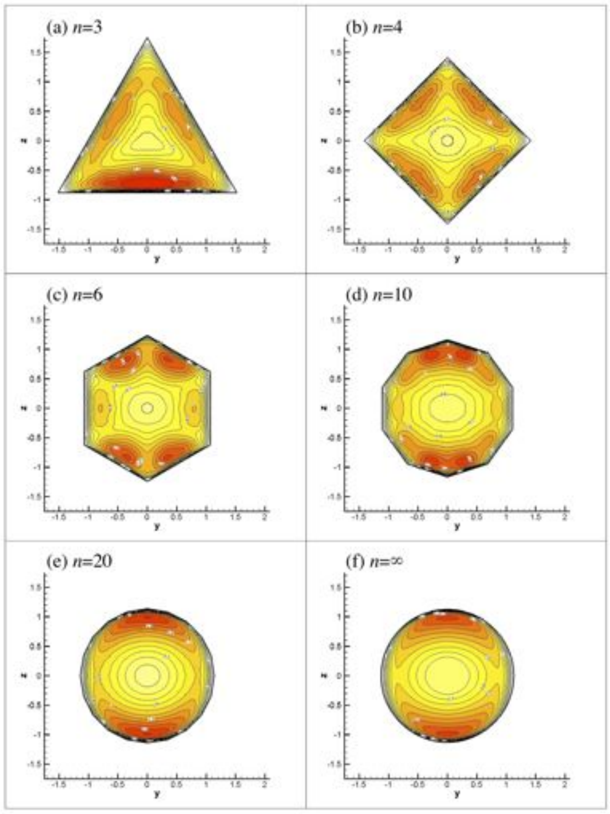

Fig. 7: Reynolds normal stress $\overline{v'v'}$.

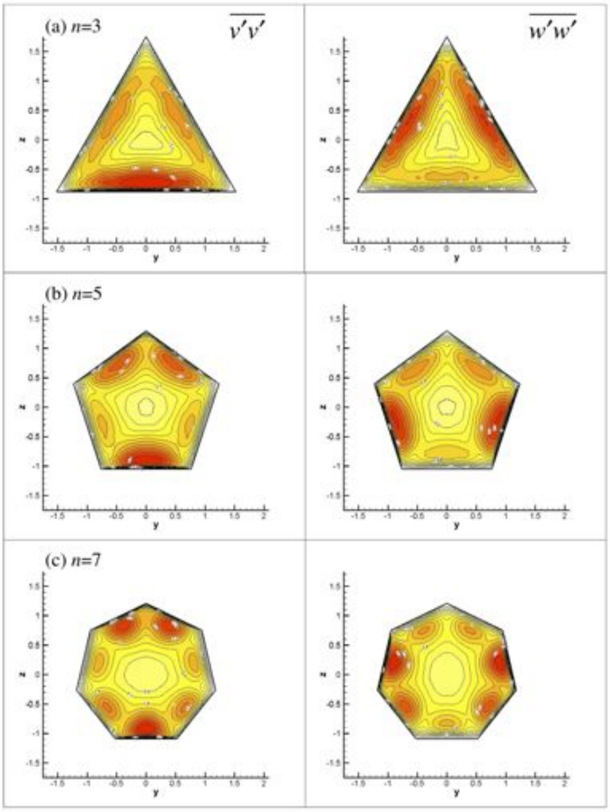

Fig. 8: Reynolds normal stresses $\overline{v'v'}$ and $\overline{w'w'}$.

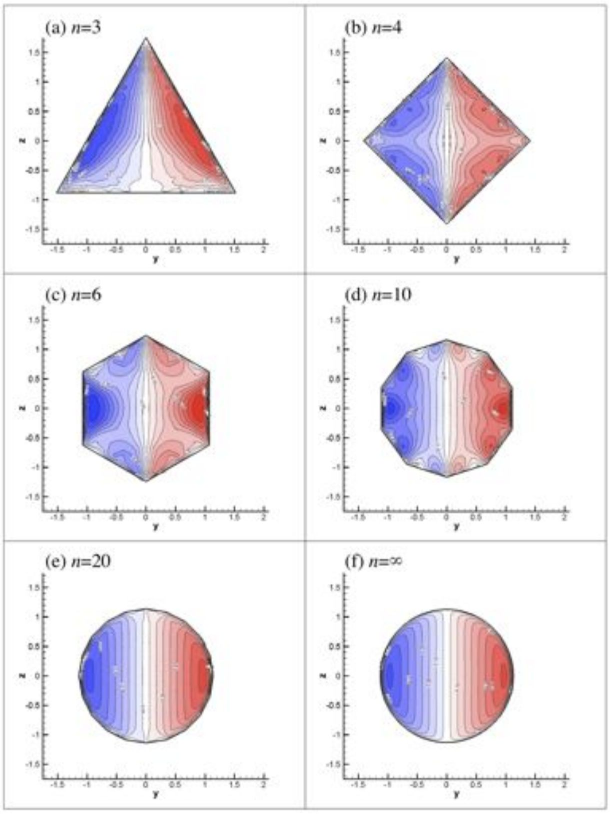

Fig. 9: Reynolds shear stress $\overline{u'v'}$.

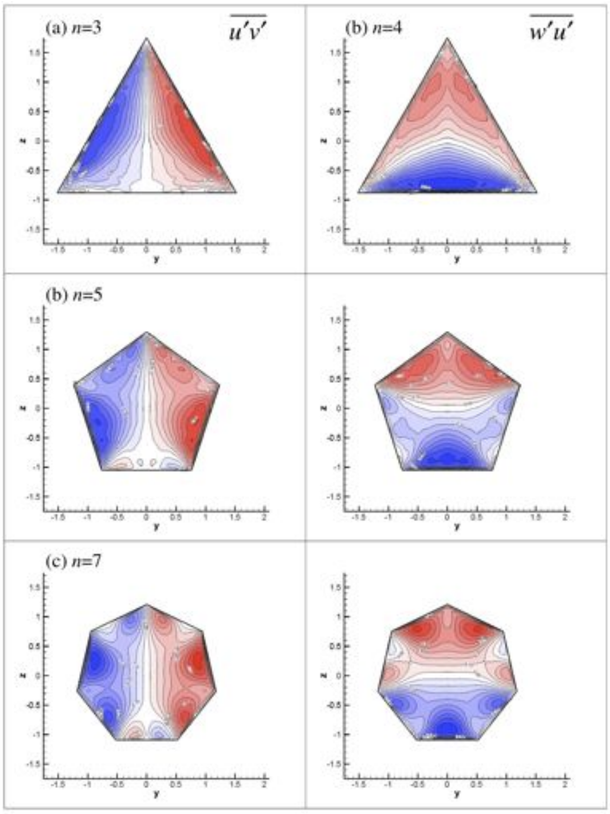

Fig. 10: Reynolds shear stresses $\overline{u'v'}$ and $\overline{w'u'}$.

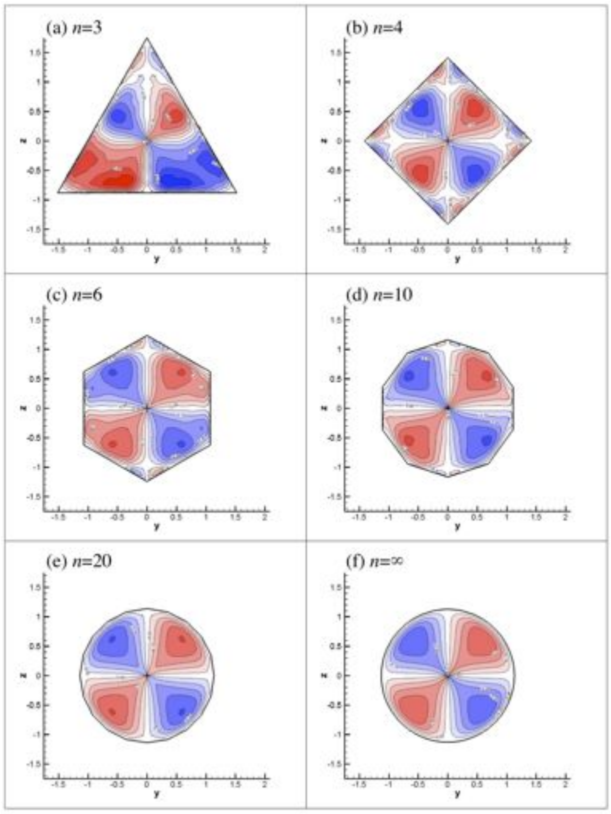

Fig. 11: Reynolds shear stress $\overline{v'w'}$.

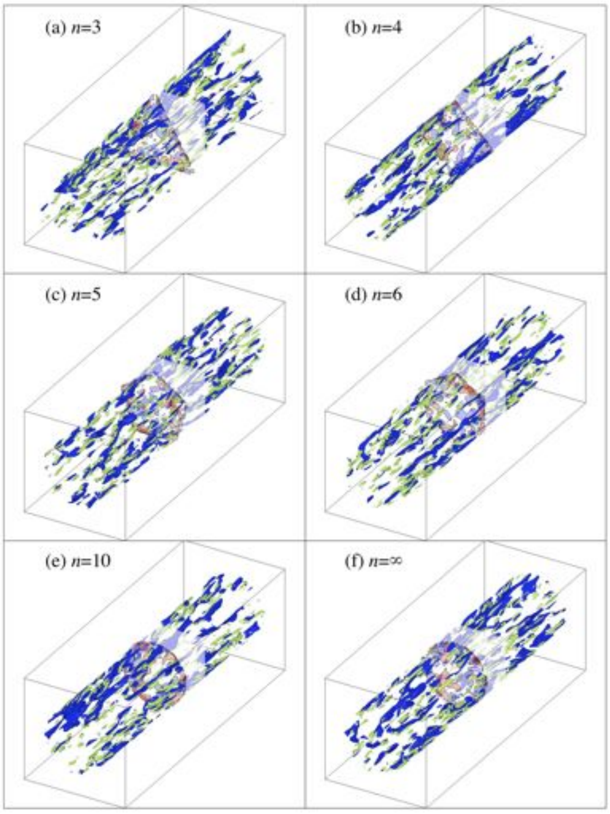

Fig. 12: Visualization of the streamwise low-speed streaks (blue region) and vortex structures (yellow one).