

Data Drive-Model Based アプローチによる最適設計 Optimal Design based on Data Drive-Model Based Approach

○ 中澤嵩, 阪大, 豊中市待兼山町 1-3, E-mail: nakazawa@sigmath.es.osaka-u.ac.jp
Takashi NAKAZAWA, Osaka university, Machikaneyama-cho 1-3, Toyonaka-shi

This paper presents a versatile and Snapshot POD-based shape optimization method, to delay laminar-turbulent transition and to promote a mixing. The main problem is the nonstationary Navier-Stokes problem and eigenvalue problem for Snapshot POD, and more the eigenvalues of Snapshot POD is defined as the cost function. Based on Lagrange multiplier method, the objective cost functional is obtained, and by using Adjoint variable method main problem and adjoint problems are solved to evaluate the sensitivity. The two dimensional cavity flow used as an initial domain is reshaped iteratively.

1. イントロダクション

現代の工学・産業界において、最適設計というかたちで発展を遂げてきた形状最適化問題は、約100年前から数理学の一分野として研究がされてきた。特に、数値流体力学における形状最適化問題は乱流制御という一分野を築いており、航空宇宙工学分野において重要な役割を担っている。一般的に、このような乱流制御を行う際、時間平均場を用いて目的関数を定義することが多いが、本研究では、データ科学的手法により乱流場を時間平均場と時間変動場に分解し、乱流場の特徴的な時空間構造を持つ時間変動場を用いて目的関数を定義する。それにより、時間平均場を用いて目的関数を定義する従来の手法と比べて、直接的に乱流の時空間構造を制御することが可能となる。

このような最適設計による流体制御の先駆的な研究は、フランス人応用数学者である^{1,2}PironneauがStokes方程式やNavier-Stokes方程式が定義された空間において、散逸エネルギー最小化問題に対する感度解析を行うところまで遡る。その後、³Haslinger and Makinen, ⁴Moubachir and Zolesio, ⁵Sokolowski and Zolesioが形状最適化問題に関する数学・数値解析を行っており、特に航空工学からの要請を受けるかたちで、⁶Mohamadi and Pironneauが乱流モデルや圧縮性Euler方程式、Adaptive Mesh法等だけでなく、遺伝的アルゴリズムやSOM (Self Organized Map) 等を取り込んだ形状最適化問題を定式化し、数値的に検証している。また国内では、有限要素法の数学解析を専門とする応用数学者と最適設計を専門とする工学者が協力する中で形状最適化問題の⁷⁻¹⁰数学的背景が明らかとなってきた。

上記に記述したように、形状最適化問題による流体制御に関する研究結果は、既に膨大なまでに存在するが、乱流制御を可能にする形状最適化手法は未だ発展の余地が十分に残されている。本論文では、下記で記述するように、これまで構築されてきた形状最適化問題を土台にしつつ、データ科学的手法を導入することで、乱流場の特徴的な時空間構造を持つ時間変動場の制御を実現する。

これまで、数値流体力学における形状最適化問題では、¹¹Iwata et al.ように時間平均場を用いて目的関数が定義されることが主流であった。一方で、¹²Nakazawaと¹³Nakazawa and Nakajimaは、乱流場の特徴的な時空間構造を持つ時間変動場を効率的に制御するた

めに主成分分析と同様のデータ解析手法であるSnapshot Proper Orthogonal Decomposition (Snapshot POD) を考慮した形状最適化問題を提案した。このSnapshot PODによって、非定常流を時間平均場と時間変動場にモード分解することが可能となり、それぞれの速度場を区別して目的関数を定義することが可能となった。

ところで、従来、形状最適化問題を解く場合には感度を境界積分として評価することが一般的であった。そのため、¹²Nakazawaと¹³Nakazawa and Nakajimaでは粘着条件で定義された境界を設計境界としており、移流項を感度に反映することが出来なかった。また、Time Average Navier-Stokes問題を主問題と定義していたため、時間変動成分を十分に考慮することができなかった。

このような状況を鑑みて、¹⁴Nakazawaでは、Reynolds Average Navier-Stokes問題 (RANS) を主問題と定義し、更には領域積分型で感度を評価することで移流項を感度に反映することに成功した。これによって、より時間変動成分の性質を当該形状最適化問題で用いることが可能となった。更に、境界積分型と領域積分型で感度を評価した際の目的関数を比較しており、領域積分型の方が目的関数を最小化していることを数値的に明らかにした。

しかしながら、^{12,14}Nakazawaと¹³Nakazawa and Nakajimaで構築した形状最適化問題は、応力が特定の領域に集中している状況下 (特異性の高い物理場) において感度を高い精度で評価することが困難であった。本論文では、破壊力学分野で研究が進められてきた一般J積分 (¹⁵⁻¹⁷Ohtsuka, ^{18,19}Ohtsuka and Khudnev, ²⁰Kimura) を汎関数の感度評価改善に活用するとともに、Newton流体と非Newton流体における数値シミュレーションを通して当該形状最適化問題の妥当性を検証する。初期形状として内部に円盤形の孤立物体を有する2次元Cavity流れを採用した。

ここに、本文中で現れる関数空間を概説する。 $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^d)$ と記載した際には、 Ω 上で定義された連続関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ の全体集合を表す。本文中で現れる $C^r(\Omega; \mathbb{R}^d)$ は、 $r \in \{0, 1, \dots\}$ 階の導関数が $C(\Omega; \mathbb{R}^d)$ に属する関数の全体集合を表す。また、 $C^{r,\sigma}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ はHölder指数 $\sigma \in (0, 1]$ に対して $r \in \{0, 1, \dots\}$ 階までの導関数がHölder連続な $f \in C^r(\Omega; \mathbb{R}^d)$ の全体集合を表す。次に、 $L^s(\Omega; \mathbb{R}^d)$ と記述すると、 $s \in [1, \infty)$ に対して s 乗Lebesgue可積分な関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ の全体集合を表す。 $W^{r,s}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ と記述した際には、 $r \in$

$\{0, 1, \dots\}$ 階までの導関数が, $L^s(\Omega; \mathbb{R}^d)$ に属する関数の全体集合をあらわす. 最後に, $H^s(\Omega; \mathbb{R}^d)$ とは $W^{s,2}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ のことである. これらの詳細については¹⁰⁾ 上の第4章を参照されたい.

2. 主問題

(1) The Non Stationary Navier–Stokes Problem

まず初めに, 主問題を設定するために非定常 Navier-Stokes 方程式を準備する.

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} \text{ in } \Omega, \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega, \quad (1b)$$

$$\mathbf{u} = 16x^2(1-x^2) \cos(\pi t), v = 0 \text{ in } \Gamma_{\text{top}}, \quad (1c)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_{\text{wall}}. \quad (1d)$$

そこで, $\{\mathbf{u}, p\}$ は速度ベクトルと圧力であり $\mathbf{u} = \{u, v\}$ である. また, レイノルズ数 Re については L と U をそれぞれ代表速度 (上面境界における速度の最大値) と代表長さ (上面境界の長さ), ν を動粘性率とすることで, $\text{Re} = LU/\nu$ と定義される. 次に, 有限差分法により式(1)を時間方向に離散化を行い, 各時間ステップにおける弱形式を導出すると式(2)が得られる.

$$\int_{\Omega} G_1^n(\mathbf{x}, \zeta_1) dx = 0, \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} G_1^n(\mathbf{x}, \zeta_1) &= \frac{D\mathbf{u}^n}{Dt} \cdot \mathbf{v}^n - (\nabla \cdot \mathbf{v}^n) p^n - (\nabla \cdot \mathbf{u}^n) q^n \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \nabla(\mathbf{u}^n)^T : \nabla(\mathbf{v}^n)^T. \end{aligned} \quad (2b)$$

ここで, 時間ステップ $n \in [T_1, T_2]$, 時間間隔 Δt , $N_1 = \Delta t T_1, N_2 = \Delta t T_2$ を初期, 最終時間ステップ, $m = N_2 - N_1 + 1$ とする. また, $\{\mathbf{v}^n, q^n\} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \times L^2(\Omega; \mathbb{R})$ は, $\{\mathbf{u}^n, p^n\} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \times L^2(\Omega; \mathbb{R})$ に対するテスト関数 (随伴変数) であり, $\zeta_1 = \{\mathbf{u}^n, p^n, \mathbf{v}^n, q^n\}$ と記述する. 最後に, 形状最適化問題における制約関数 $L_1(\Omega, \zeta_1)$ を以下のように定義する.

$$L_1(\boldsymbol{\phi}_0, \zeta_1) = \frac{1}{m} \sum_{n=N_1}^{N_2} \int_{\Omega} G_1^n(\mathbf{x}, \zeta_1) dx. \quad (3)$$

(2) Eigenvalue Problem for Snapshot POD

非定常 Navier-Stokes 方程式を時間積分した後, 相関係数行列 $R(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ を構成する.

$$R(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{u}} dx, \quad (4a)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = [(\mathbf{u}^{N_1})^T, \dots, (\mathbf{u}^n)^T, \dots, (\mathbf{u}^{N_2})^T]. \quad (4b)$$

そして, Snapshot Proper Orthogonal Decomposition (Snapshot POD)

の固有値問題は下記のように定式化される.

$$R(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}} = \omega \hat{\mathbf{u}}, \quad (5a)$$

$$\omega = [\omega^1, \dots, \omega^i, \dots, \omega^m], \quad (5b)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{\mathbf{u}}^1, \dots, \hat{\mathbf{u}}^i, \dots, \hat{\mathbf{u}}^m]. \quad (5c)$$

ここで, 固有値 $\omega \in \mathbb{R}^m$, 固有ベクトル $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ が数値的に求められれば, POD 基底 Φ が得られる.

$$\Phi = \omega^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{d \times m}, \quad (6a)$$

$$\Phi = [\Phi^1, \dots, \Phi^i, \dots, \Phi^m], \quad (6b)$$

$$\Phi_{\omega}^i = \sqrt{\omega^i} \Phi^i. \quad (6c)$$

最後に, 形状最適化問題における制約関数 $L_2(\Omega, \zeta_2)$ を定義する.

$$L_2(\boldsymbol{\phi}_0, \zeta_2) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m G_2(\mathbf{x}, \zeta_2), \quad (7a)$$

$$G_2(\mathbf{x}, \zeta_2) = \boldsymbol{\alpha} [\delta_{j \rightarrow k} \{\omega \hat{\mathbf{u}} - R(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}}\}]. \quad (7b)$$

ここで, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ は $\hat{\mathbf{u}}$ に対する随伴変数, $\delta_{j \rightarrow k}$ は第 j 主成分から第 k 主成分の固有値を抽出するための重み関数, $\zeta_2 = \{\omega, \tilde{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\alpha}\}$ である. -

(3) The Reynolds Average Navier–Stokes Problem

ここでは, $\bar{\zeta}_1 = \{\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{q}\}$ として形状最適化問題における制約関数 $L_1(\Omega, \bar{\zeta}_1)$ を再定義する.. 式(2)は非定常 Navier-Stokes 問題の時間変化に対する総和平均を取っているため Reynolds Average Navier-Stokes 問題を導出することと同意であり, 式(8)は Reynolds Average Navier-Stokes 問題の弱形式となっている.

$$L_1(\boldsymbol{\phi}_0, \bar{\zeta}_1) = \int_{\Omega} \bar{G}_1(\mathbf{x}, \bar{\zeta}_1) dx, \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_1(\mathbf{x}, \bar{\zeta}_1) &= \left(C + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \bar{\mathbf{u}}^T \right) : \nabla \bar{\mathbf{v}}^T \\ &- (\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}) \bar{p} - (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \bar{q}, \end{aligned} \quad (8b)$$

$$C = C_1 + C_2, \quad (8c)$$

$$C_1 = -\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}})^T, C_2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\infty} \{ \Phi_{\omega}^i (\Phi_{\omega}^i)^T \},$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{m} \sum_{n=N_1}^{N_2} \mathbf{u}^n, \bar{p} = \frac{1}{m} \sum_{n=N_1}^{N_2} p^n. \quad (8d)$$

ここで, $\{\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}\} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \times L^2(\Omega; \mathbb{R})$ は時間平均速度と圧力で

あり $\{\bar{\mathbf{v}}, \bar{q}\} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \times L^2(\Omega; \mathbb{R})$ は対応する随伴変数である。

3. 形状最適化問題

(1) The Objective Functional

当該研究における形状最適化問題の目的関数を下記のように定義する。

$$f(\boldsymbol{\phi}, \omega) = \sum_{i=1}^m \delta_{j \rightarrow k} \omega^i. \quad (9)$$

Lagarange 未定乗数法に基づき、目的汎関数を

$$L(\boldsymbol{\phi}, \bar{\zeta}_1, \zeta_2) = f(\boldsymbol{\phi}, \omega) - L_1(\boldsymbol{\phi}, \bar{\zeta}_1) - L_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2) \quad (10)$$

と記述する。

(2) Lagrange Multiplier Method

式(3-6)を考慮すると、式(16)の領域変分を以下のように導出することができる。

$$\dot{L}(\boldsymbol{\phi}, \bar{\zeta}_1, \zeta_2) = \dot{f}(\boldsymbol{\phi}, \omega) - \dot{L}_1(\boldsymbol{\phi}, \bar{\zeta}_1) - \dot{L}_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2). \quad (11)$$

【修正意見 B-13】ここで、 $f(\boldsymbol{\phi}_0, \omega)$ の物質微分 $\dot{f}(\boldsymbol{\phi}, \omega)$ は、 $\omega \in \mathbb{R}^m$ による $\nabla f(\boldsymbol{\phi}_0, \omega) = 0$ を考慮して

$$\begin{aligned} \dot{f}(\boldsymbol{\phi}, \omega) &= f(\boldsymbol{\phi}, \omega)[\boldsymbol{\varphi}, \omega'] + \boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla f(\boldsymbol{\phi}_0, \omega) + o(\epsilon^2) \\ &= f(\boldsymbol{\phi}, \omega)[\boldsymbol{\varphi}, \omega'] + o(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (12)$$

となり、結果的に $\dot{f}(\boldsymbol{\phi}, \omega)[\boldsymbol{\varphi}, \omega'] = f(\boldsymbol{\phi}, \omega)[\boldsymbol{\varphi}, \omega'] = \sum_{i=1}^m \delta_{j \rightarrow k} (\omega^i)'$ となる。次に、 $\nabla \bar{\zeta}_1 = \{\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}\} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ から、 $L_1(\boldsymbol{\phi}, \bar{\zeta}_1)$ の物質微分 $\dot{L}_1(\boldsymbol{\phi}, \bar{\zeta}_1)$ は、

$$\begin{aligned} \dot{L}_1(\boldsymbol{\phi}, \bar{\zeta}_1)[\boldsymbol{\varphi}, \bar{\zeta}_1'] &= L_1(\boldsymbol{\phi}_0, \bar{\zeta}_1)[\bar{\zeta}_1'] + L_1(\boldsymbol{\phi}_0, \bar{\zeta}_1)[\boldsymbol{\varphi}], \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \dot{L}_1(\boldsymbol{\phi}_0, \bar{\zeta}_1)[\boldsymbol{\varphi}] &= \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \left\{ \left(C + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \bar{\mathbf{u}}^T \right) : \nabla \bar{\mathbf{v}}^T \right\} (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) \\ - \left\{ \left(2\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \boldsymbol{\varphi}^T \right) \bar{\mathbf{u}}^T \right\} : \nabla \bar{\mathbf{v}}^T \\ - \left(C + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \bar{\mathbf{u}}^T \right) : (\nabla \boldsymbol{\varphi}^T) (\nabla \bar{\mathbf{v}}^T) \\ - \bar{q} \text{tr}[(\nabla \boldsymbol{\varphi}^T) (\nabla \bar{\mathbf{u}}^T)] \\ - \bar{p} \text{tr}[(\nabla \boldsymbol{\varphi}^T) (\nabla \bar{\mathbf{v}}^T)] \end{bmatrix} dx. \end{aligned} \quad (13b)$$

となる。次に、 $\boldsymbol{\Phi}_{\omega}^i = \sqrt{\omega^i} \boldsymbol{\Phi}^i$ であることを考慮して、 $L_2(\boldsymbol{\phi}_0, \zeta_2)$ の物質微分 $\dot{L}_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2)$ は、

$$\dot{L}_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2) = L_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2)[\zeta_2'] + L_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2)[\boldsymbol{\varphi}], \quad (14a)$$

$$L_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2)[\boldsymbol{\varphi}]$$

$$= -2 \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^m \delta_{j \rightarrow k} \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\Phi}_{\omega}^T \right) \cdot (\boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}) dx \quad (14b)$$

$$-2 \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) \sum_{i=1}^m \delta_{j \rightarrow k} \boldsymbol{\alpha} (\boldsymbol{\Phi}_{\omega}^i)^T \boldsymbol{\Phi}_{\omega}^i dx,$$

となる。そして、KKT 条件を考慮すると、

$$L_1(\boldsymbol{\phi}_0, \bar{\zeta}_1)[\bar{\zeta}_1'] = 0, \quad (15a)$$

$$L_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2)[\zeta_2'] = 0, \quad (15b)$$

より主問題である式(2)及び式(4)と、それに対応する随伴問題を導出することができる。そして、式(2)に対する随伴問題として

$$\begin{aligned} (\nabla \bar{\mathbf{u}}^T) \mathbf{v} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} + \nabla \bar{q} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{\mathbf{v}} \\ = 2 \sum_{i=1}^m \delta_{j \rightarrow k} \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\Phi}_{\omega} \hat{\mathbf{u}} \text{ in } \Omega, \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \text{ in } \Omega, \quad (17b)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \text{ on } \partial\Omega, \quad (17c)$$

が得られる。また、式(4)は自己随伴となるため随伴問題を解く必要がない。

最後に、主変数と随伴変数を式(11)に代入することで下記のように形状感度が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{L}(\boldsymbol{\phi}, \bar{\zeta}_1, \zeta_2)[\boldsymbol{\varphi}, \bar{\zeta}_1', \zeta_2'] \\ = L_1(\boldsymbol{\phi}_0, \bar{\zeta}_1)[\boldsymbol{\varphi}] + L_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2)[\boldsymbol{\varphi}] \end{aligned} \quad (18)$$

(3) Regularization of Sensitivity

前述したように、写像 $\boldsymbol{\phi}$ は $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ が仮定されているが、式(18)で得られる領域変動 $\boldsymbol{\varphi}$ が $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ となっている保証はない。そこで、 H^1 勾配法を活用することで形状感度の正則性を担保する。

$$\int_{\Omega} \mathbf{E}(\bar{\boldsymbol{\varphi}}) : \mathbf{E}(\boldsymbol{\varphi}) dx \quad (19a)$$

$$= -L_1(\boldsymbol{\phi}_0, \bar{\zeta}_1)[\boldsymbol{\varphi}] - L_2(\boldsymbol{\phi}, \zeta_2)[\boldsymbol{\varphi}].$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \{ \nabla \mathbf{u}^T + (\nabla \mathbf{u}^T)^T \}. \quad (19b)$$

最終的に、微小パラメータ ϵ を任意に決定し、 $\boldsymbol{\phi}(\Omega) = \boldsymbol{\phi}_0(\Omega) + \epsilon \bar{\boldsymbol{\varphi}}(\Omega)$ によって領域を変動させる。このような過程を目的関数が収束するまで繰り返すことで最適形状が得られる。

4. 数値計算結果

下記に、本論文で扱う計算領域と境界条件を図示する。

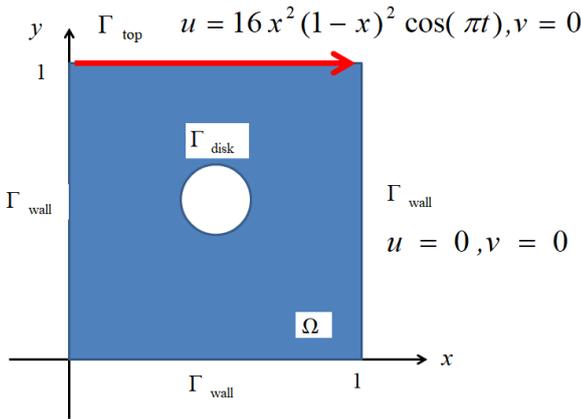
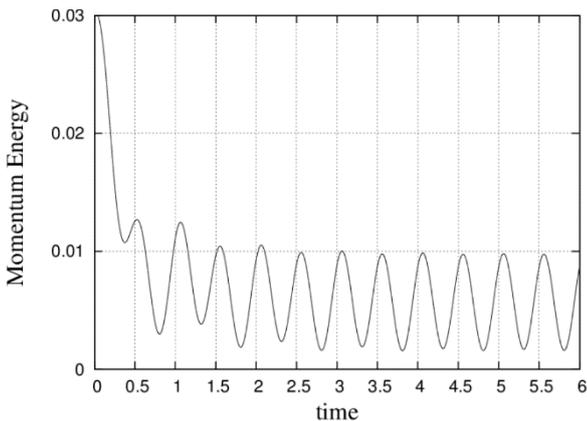


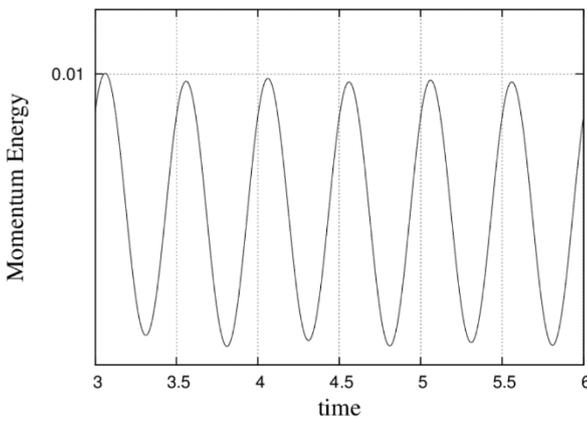
図-1 初期形状における計算領域と境界条件

(1) Sampling Data

まず初めに、非定常 Navier-Stokes 問題を解き Snapshot POD を用いる速度ベクトルをサンプリングする。図-2 は初期形状における運動エネルギーの時間変化である。ところで、Snapshot POD は主成分分析を基礎としているためサンプリングデータガウス分布に従っている必要がある。そこで、図-2(b)から、 $3 \leq t \leq 6$ で概ね周期解が漸近していることがわかるため、サンプリングする初期時刻と最終時刻を $T_1 = 3$ 及び $T_2 = 6$ と設定した。



(a) $0 \leq t \leq 6$



(b) $3 \leq t \leq 6$

図-2 初期形状における運動エネルギーの時間変化

(2) Numerical Simulation for Newtonian Fluid

次に、¹⁴⁾Nakazawa では重み関数を $\delta_{2 \rightarrow m}$ として、時間変動場の速

度場だけを用いた目的関数を定義し、従来の時間平均を用いた場合と比較して、より直接的に時間変動場を制御することに成功した。そこで、本研究では、 $\delta_{2 \rightarrow m}$ を固定して、感度を評価する。

当該形状最適化問題を数値的に解き、形状更新における目的関数を図-3 に図示した。図-3 の結果から、41 ステップ目で最小値を取った。その際、10 ステップ以降から急激に目的関数が最小化しているが、当該最適化問題のアルゴリズムでは Reynolds Average Navier-Stokes 問題を制約関数としていることから、非線形的な振る舞いを示しているものだと考えられる。この目的関数の振る舞いを詳細に解析するには、各 POD モードに対する感度を形状更新毎に評価することで明らかとなると考えられるが、本論文では扱わないことにする。

図-4 に初期形状と最適形状における固有値を図示している。ところで、本研究で用いている Snapshot POD の定義では、第 1 主成分が時間平均場を、第 2 主成分以降に時間変動場の統計量を抽出している。そのため、第 2 主成分以降の固有値が最小化していることから、時間変動場が抑制されていることがわかる。

図-5 には初期形状と最適形状における有限要素メッシュを図示している。本論文では $\partial\Omega_m$ を設計境界としており、一方で Γ_{top} では時間周期流を定義していることから、 $\partial\Omega_m$ の Γ_{top} に近い境界が上方に移動することでエネルギー散逸を向上させ、結果的に運動エネルギーを最小化させているものと考えられる。このように上方に境界が移動することは、著者がこれまで得てきた¹²⁻¹⁴⁾数値計算結果と概ね一致する。

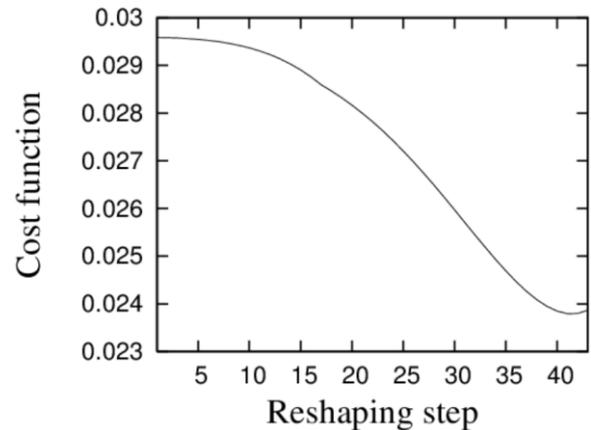


図-3 形状更新における目的関数

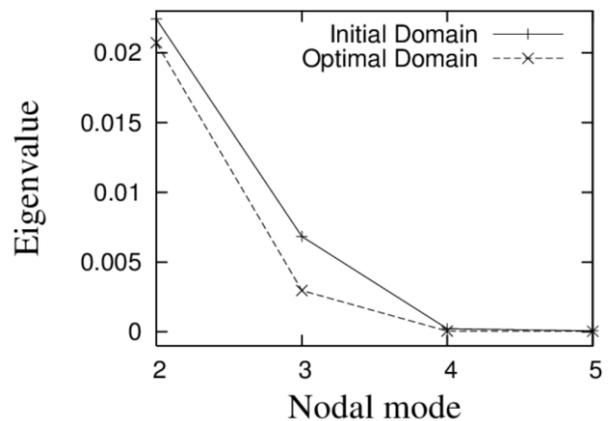
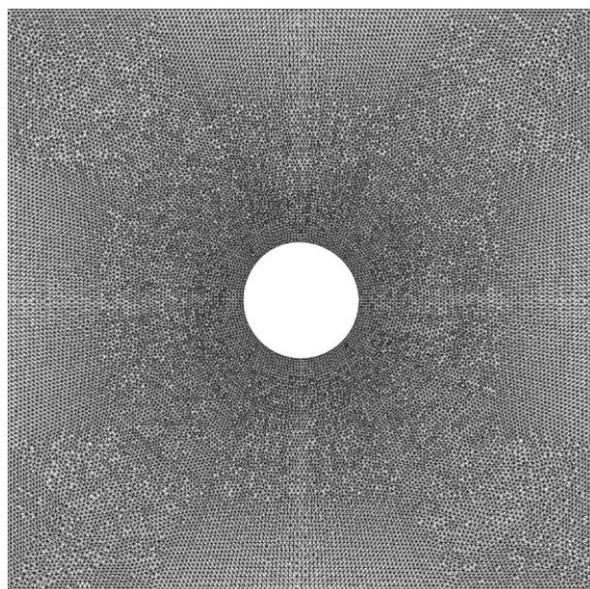
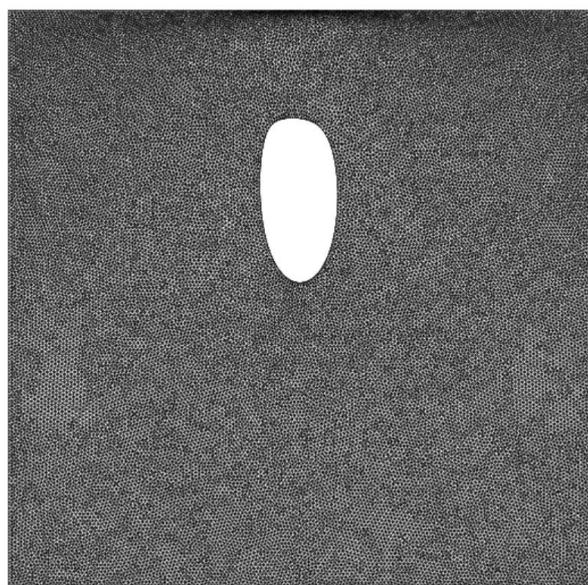


図-4 初期形状と最適形状における固有値



(a) Initial Domain



(b) Optimal Domain

図-5 初期形状と最適形状

5. 提出期限

本研究では、時間変動場の効率的制御を目的として、Snapshot PODを活用した流れ場の形状最適化問題を定式化する。具体的には、Snapshot PODで得られた固有値を目的関数と定義し、Reynolds Average Navier-Stokes問題とSnapshot PODの固有値問題を制約関数とした。そして、Lagrange未定乗数法と有限要素法に基づき目的汎関数を設定する。次に、この目的汎関数の領域変分を取り、主問題と随伴問題を解いた後、感度を評価する。その際、感度の評価に一般J積分を利用し、正則化として H^1 勾配法を用いた。そして、目的関数が最小化するまで逐次的に領域変形を行った。

従来の最適設計技術では、主に時間平均場のみを用いて目的関数を設定していたが、本研究では、Snapshot PODを導入することで時間変動場を用いている。当該スキームの妥当性を検証するため

に、円盤形の孤立物体を有する2次元Cavity流れを採用したところ、時間変動場の固有値が最小化していることを確認した。

このように、時間変動場の制御を念頭に置いた最適設計手法は過去に例がなく、今後、工学や産業界において幅広く利用されることを期待している。特に、高速流体機器の最適設計を行う際には、乱流場の発達や抑制を前提とする必要があるため、従来の設計手法と組み合わせて利用することで、これまで得られなかった最適形状が得られる可能性がある。

参考文献

- (1) Pironneau, O.: On optimum profiles in Stokes flow, JFM, 59, 117-128, 1973.
- (2) Pironneau, O.: On optimum design in fluid mechanics, JFM, 64, 97-110, 1974.
- (3) Haslinger, J. and Makinen R, A. E.: Introduction to Shape Optimization: Theory, Approximation, and Computation, SIAM, Philadelphia, 2003.
- (4) Moubachir, M and Zolesio, J. P.: Moving Shape Analysis and Control: Applications to Fluid Structure Interactions, Chapman and Hall / CRC Pure and Applied Mathematics. Boca Raton, 2006.
- (5) Sokolowski, J. and Zolesio, J. P.: Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis (Springer Series in Computational Mathematics), Springer, 1991.
- (6) Mohammadi, B. and Pironneau, O.: Applied Shape Optimization for Fluids, Oxford University Press, 2001.
- (7) 畔上秀幸：領域最適化問題の一解法，日本機械学会論文集(A 偏)，60，pp. 1479-1486，1994.
- (8) 海津 聡，畔上秀幸：最適形状問題と力法について，日本応用数理学会 論文集，16，pp. 143-156. 2006.
- (9) 海津 聡：ストークス問題における最適形状問題と感度解析を用いた有限要素法，数理解析研究所講義録，1556，pp. 158-169，2007.
- (10) 畔上秀幸：形状最適化問題，森北出版，2016.
- (11) Iwata, Y., Azegami, H., Aoyama, T. and Katamine, E.: Numerical solution to shape optimization problems for non-stationary Navier-Stokes problems, JSIAM Letters, 2, pp. 37-40, 2002.
- (12) Nakazawa, T.: Shape Optimization of Flow Fields Considering Proper Orthogonal Decomposition, Math.l Anal. of Cont. Mech. and Indust. Appl., 2018.
- (13) Nakazawa, T. and Nakajima, C.: Optimal Design by Adaptive Mesh Refinement on Shape Optimization of Flow Fields Considering Proper Orthogonal Decomposition, Interdisciplinary Information Sciences, 2019.
- (14) Nakazawa, T.: Flow control by the fusion between mathematical and data science, JAXA Special Publication, JAXA-SP-18-005, 2019.
- (15) Ohtsuka, K.: Generalized J-integral and three-dimensional fracture mechanics 1, Hiroshima Math. J., 11, pp. 21-52, 1981.
- (16) Ohtsuka, K.: Generalized J-integral and its application 1 -- Basic theory --, Japan J. Appl. Math. J., 2, pp. 329-350, 1985.
- (17) Ohtsuka, K.: Generalized J-integral and three-dimensional fracture mechanics 2, Hiroshima Math. J., 6, pp. 327-352, 1986.
- (18) Ohtsuka, K and Khudnev, A.: Generalized J-integral method for seisisitivity analysis of static shape design, Control

- and Cybernetics, 29, pp. 513-533, 2000.
- (19) Ohtsuka, K and Khludnev, A.: Shape differentiability of Lagrangians and application to Stokes problem, SIAM J. Control Optim., 56, pp. 3668-3684, 2018.
- (20) Kimura, M.: Shape derivative of minimum potential energy: abstract theory and applications, Jindřich Nečas Center for Mathematical Modeling Lecture notes Volume IV, Topics in Mathematical Modeling, pp.1-38, 2008.
- (21) Azegami, H. and Wu, Z.: Domain Optimization Analysis in Linear Elastic Problems: Approach Using Traction Method, JSME Int. J. Ser. A 39, pp. 272-278, 1996.
- (22) Hecht, F.: New development in FreeFem++, J. of Numerical Math, 20, pp. 251-265, 2012.
- (23) Notsu, H. and Tabata, M.: Error estimates of a pressure-stabilized characteristics finite element scheme for Oseen equations, J. Sci. Comput, 65, pp. 940-955, 2015.
- (24) Davis, T.: Algorithm 832: UMFPACK, an unsymmetric-pattern multifrontal method, ACM Trans. on Math. Software, 30, 196-199, 2004.
- (25) Mohammadi, B. and Hecht, F.: Mesh Adaptation for Time Dependent Simulation, Optimization and Control, Revue Europeenne des elements finis, 10, pp. 575-595, 2001.
- (26) Giannetti, F., Luchini, P. and Marino, L.: Stability and sensitivity analysis of Non-Newtonian flow through an axisymmetric expansion, J. of Physics Conference Series, 318, 2011.
- (27) Haque, S., Lashgari, I., Giannetti, F. and Brandt, L.: Stability of fluids with shear-dependent viscosity in the lid-driven cavity, J. of Non-Newtonian Fluid Mech., 173-174, 2012.
- (28) Citro, V., Giannetti, F., Pralits, J.: Three-dimensional stability, receptivity and sensitivity of non-Newtonian flows inside open cavities, FDR, 47, 2015.
- (29) Zhang, M., Lashgari, I., Zaki, A. T. and Brandt, L.: Linear stability analysis of channel flow of viscoelastic Oldroyd-B and FENE-P fluids, JFM, 737, pp. 249-279, 2013.
- (30) Sokolowski, J. and Stebel, J.: Shape sensitivity analysis of time-dependent flows of incompressible non-Newtonian fluids, Control and Cybernetics, 40, 2011.
- (31) Zhang, B. and Liu, X.: Topology optimization study of arterial bypass configurations using the level set method, Struct. Multidisc. Opt., 51, 2015.
- (32) Zhang, B., Liu, X.: Topology optimization design of non-Newtonian roller-type viscous micropump, Struct. Multidisc. Opt., 53, 2016.
- (33) Romero, S. J., Non-Newtonian laminar flow machine rotor design by using topology optimization, Struct. Multidisc. Opt., 55, 2017.
- (34) Lukáčová-Medvid'ová, M., Mizerová, H. and Renard, M.: Global Existence Result for the Generalized Peterlin Viscoelastic Model, SIAM J. Math. Anal., 49, 2017.