

# 適合細分化格子ボルツマン法を用いた噴流により浮遊するピンポン玉のシミュレーション

Simulations of a Ping-pong Ball Suspended by a Jet Using Adaptively Mesh-refined Lattice Boltzmann Method

- 渡辺勢也, 東工大, 東京都目黒区大岡山 2-12-1-i7-3, E-mail : watanabe@sim.gsic.titech.ac.jp  
 青木尊之, 東工大, 東京都目黒区大岡山 2-12-1-i7-3, E-mail : aoki@gsic.titech.ac.jp  
 小林宏充, 慶應義塾大学, 神奈川県横浜市港北区日吉 4-1-1, E-mail : hkobayas@keio.jp  
 Seiya Watanabe, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 i7-3 O-okayama, Meguro-ku, Tokyo  
 Takayuki Aoki, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 i7-3 O-okayama, Meguro-ku, Tokyo  
 Hiromichi Kobayashi, Keio University, 4-1-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama-shi, Kanagawa

Mechanisms of stable floating of a ping-pong ball suspended by a jet are not well understood. In this study, we aim to analyze this phenomenon by the lattice Boltzmann method and to obtain knowledge about the stable floating of a ping-pong ball. In order to reduce the computational time, the adaptive mesh refinement (AMR) method adapting the high-resolution grid to the jet and the sphere is introduced into the lattice Boltzmann method. We realize large-scale AMR simulations by multiple GPU computation with a dynamic domain decomposition method based on the space-filling curve. We simulate the floating sphere by the jet under different inlet sizes. From this simulation, it was confirmed that the motion of the ping-pong ball in the narrow inlet is stabler than the case of the wide inlet. This is because, in the case of a wide inflow, when the ping-pong ball approaches the central axis of the jet, lift acts outward on the ping-pong ball.

## 1. 諸元

上に向けてドライヤーの風を出し、その上でピンポン球を放すとピンポン球は落ちることなく浮遊する。ピンポン球が安定して浮遊する理由はまだ十分に理解されておらず、この現象に関する実験的研究により噴流中の球に作用する抗力は一様流中の球と大きく異なることが報告されている。Neveらは噴流ノズルと球の距離を変えて抗力を測定し、球がノズルに近いと距離によらず球に作用する抗力は一定になるが、ノズルからの距離が離れると乱流が弱まり抗力が距離の-1.8乗で下がることを示した<sup>(1)</sup>。また、Lopez-Ariasらは噴流の中心軸から球をずらして抗力を測定し、噴流の流入口が球よりも太いか細いかにより球に作用する抗力の傾向が変わり、流入口が太い場合はジェット中央で抗力の極大値が発生するが、ジェットが細い場合は中央に極小値があることを実験から明らかにした<sup>(2)</sup>。このように、噴流中の球の抗力はレイノルズ数だけでなく、ノズルと球の位置関係やノズルの大きさにも影響される。

本研究では、数値シミュレーションによりピンポン球が安定して浮遊するメカニズムを解明することを目的とし、そのための流体-構造連成解析のシミュレーションコードを開発する。噴流とピンポン球の近傍には渦や境界層を捉えるための高解像度が必要であるが、境界の影響を減らすための広い計算領域が必要であるため、計算領域全体の解像度を一様とする等間隔直行格子では計算効率が低い。球近傍の格子解像度を維持しつつ、メモリ使用量と計算コストを削減するためにAMR (Adaptive Mesh Refinement) 法<sup>(3)</sup>を導入する。流体計算には完全な陽解法で大規模計算に適している格子ボルツマン法を用いる。また、画像処理用に開発されたプロセッサであるGPUを演算アクセラレータとして利用することで、計算の高速化を図る。

本稿では、ピンポン球に作用する抗力の解像度依存性、ノズル中心軸からずれたピンポン球に作用する揚力、ノズル直径がピンポン球の浮遊に与える影響について報告する。

## 2. 計算手法

### 2.1 格子ボルツマン法

格子ボルツマン法はナビエ・ストークス方程式を直接解く手法ではなく、速度方向に離散化されたボルツマン方程式を解く手法である。速度分布関数は1タイムステップで隣接の格子点に移動する速度を持ち、速度分布関数

を27方向の速度で離散化するD3Q27速度モデルを用いる。速度分布関数 $f$ の時間発展方程式は

$$f_{ijk}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_{ijk}\Delta t, t + \Delta t) = f_{ijk}(\mathbf{x}, t) + \Omega_{ijk} \quad (1)$$

である。ここで、添字 $ijk$ は速度分布関数の方向で $(i, j, k) \in \{-1, 0, 1\}^3$ 、 $\Omega_{ijk}$ は衝突項である。

高レイノルズ数の乱流計算を安定かつ高精度に行うため、本研究では衝突項にキュムラントモデル<sup>(4)</sup>を用いる。キュムラントモデルは多数の緩和係数を用いるMRT (Multiple Relaxation Time) モデル<sup>(5)</sup>と似ている手法であり、以下のように速度分布関数 $f$ を統計的な量であるキュムラント $C$ に変換して衝突過程の計算を行う。

$$F(\Xi) = \mathcal{L}[f(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u})] = e^{-\mathbf{u} \cdot \Xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{\xi}) e^{-\Xi \cdot \boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi} \quad (2)$$

$$C_{\alpha\beta\gamma} = c^{-\alpha-\beta-\gamma} \frac{\partial^\alpha \partial^\beta \partial^\gamma}{\partial \Xi^\alpha \partial \Xi^\beta \partial \Xi^\gamma} \ln(F(\Xi)) \Big|_{\Xi=0} \quad (3)$$

キュムラントモデルでの衝突項は

$$C_{\alpha\beta\gamma}^* = \omega_{\alpha\beta\gamma} C_{\alpha\beta\gamma}^{\text{eq}} + (1 - \omega_{\alpha\beta\gamma}) C_{\alpha\beta\gamma} \quad (4)$$

となり、 $\omega_{\alpha\beta\gamma}$ は各キュムラントに対する緩和係数である。非対角の2次のキュムラントに対しては $\omega_{\alpha\beta\gamma} = 1/\tau$ とし、それ以外の高次のキュムラントに対しては $\omega_{\alpha\beta\gamma} = 1$ とする。衝突過程を計算した後のキュムラント $C^*$ を速度分布関数 $f$ に変換する。

流体の密度と速度は、速度分布関数から

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{ijk} f_{ijk}(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

$$\rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{ijk} \mathbf{c}_{ijk} f_{ijk}(\mathbf{x}, t) \quad (6)$$

と求める。

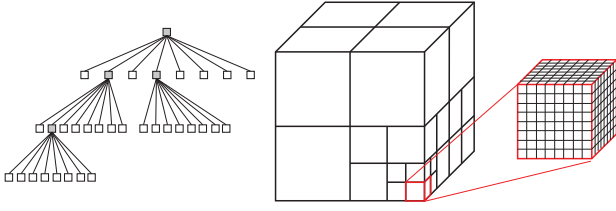


Fig. 1: Block-structured mesh based on octree data structure. Each block has  $8 \times 8 \times 8$  cells.

## 2.2 流体-構造連成

流体-構造連成計算を行うために、物体の運動を移動境界条件として格子ボルツマン法の計算に組み込む。本研究では、格子点の間に位置する壁を2次精度で扱える Interpolated bounce-back<sup>(6)</sup>に基づく移動境界条件<sup>(7)</sup>を課す。格子点から壁までの距離を  $q$  として、 $q$  の値が  $0 < q \leq 0.5$  の場合は式 (7) を、 $0.5 < q \leq 1.0$  の場合は式 (8) を用いて壁で反射する速度分布関数を計算する。

$$f_{ijk}(\mathbf{x}, t + \Delta t) = 2q f_{ijk'}(\mathbf{x}, t) + (1 - 2q) f_{ijk}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_{ijk} \Delta t, t) + \frac{6\omega_{ijk}\rho(\mathbf{c}_{ijk} \cdot \mathbf{u}_{\text{wall}})}{c^2} \quad (7)$$

$$f_{ijk}(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \frac{1}{2q} \left[ f_{ijk'}(\mathbf{x}, t) + \frac{6\omega_{ijk}\rho(\mathbf{c}_{ijk} \cdot \mathbf{u}_{\text{wall}})}{c^2} \right] + \frac{(2q - 1)}{2q} f_{ijk}(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

ここで、添字は  $ijk'$  反対向きの速度分布関数の方向、 $\mathbf{u}_{\text{wall}}$  は壁の速度を表す。壁で反射された速度分布関数が物体に与える流体力は、Momentum exchange method<sup>(8)</sup>を用いて

$$\mathbf{F}_{ijk}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{c}_{ijk} f_{ijk}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{c}_{ijk'} f_{ijk'}(\mathbf{x}, t + \Delta t) \quad (9)$$

と計算する。流体から物体に作用する力  $\mathbf{F}_{\text{fluid}}$  とトルク  $\mathbf{T}_{\text{fluid}}$  は、 $\mathbf{F}_{ijk}$  の総和を計算することで求める。

$$\mathbf{F}_{\text{fluid}} = \sum_{\mathbf{x} \in \text{boundary}} \sum_{ijk} \mathbf{F}_{ijk}(\mathbf{x}, t) \quad (10)$$

$$\mathbf{T}_{\text{fluid}} = \sum_{\mathbf{x} \in \text{boundary}} \left[ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{object}}) \times \sum_{ijk} \mathbf{F}_{ijk}(\mathbf{x}, t) \right] \quad (11)$$

剛体の球の運動方程式は

$$m_s \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = \mathbf{F}_{\text{fluid}} + (\rho_s - \rho) V_s \mathbf{g} \quad (12)$$

$$I_s \frac{d\boldsymbol{\omega}_s}{dt} = \mathbf{T}_{\text{fluid}} \quad (13)$$

である。運動方程式を1次オイラー法で時間積分し、物体の運動を計算する。

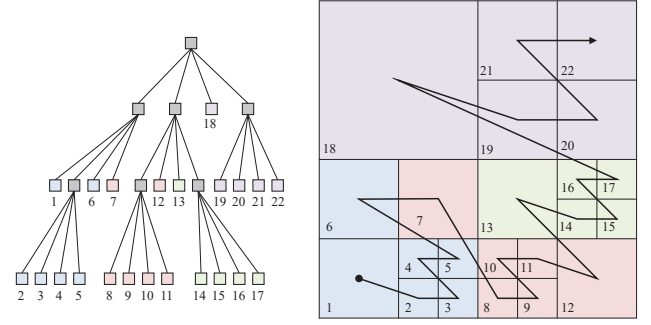


Fig. 2: Domain decomposition of refined mesh using Morton curve (black arrow). Block index is given by Morton curve. Blocks of same color are assigned to same MPI process.

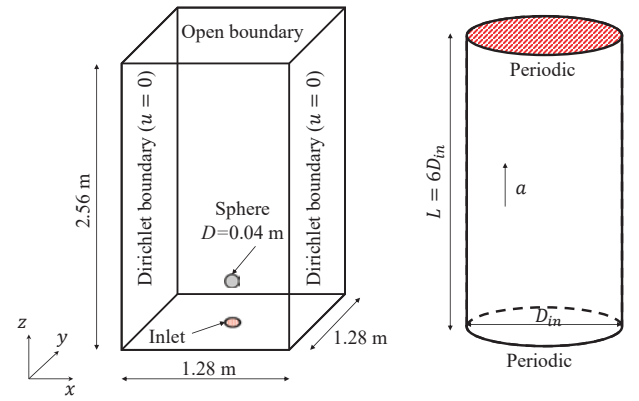


Fig. 3: Computational domain and boundary conditions for jet-sphere interaction simulation. The left is the main computational domain for calculating the jet, and the right is the cylindrical domain for calculating the inflow conditions of the jet. The distribution functions on the red surface in the cylindrical domain are copied to the inlet in the main computational domain at each time step.

## 2.3 AMR法

木構造を用いて球の近傍と渦に高解像度格子を適合させた細分化格子を生成する。単一の木構造で分割された計算領域は立方体形状になり、流体解析で一般的に用いられる直方体領域を表現できない。そこで、複数の木構造を用いる forest-of-octree データ構造<sup>(9)</sup>により、直方体の計算領域に対する細分化格子を生成する。

GPUでのスレッド並列化を容易に行うために、木構造で細分化された小領域に対して均一格子を割り当てるブロック構造 AMR法<sup>(10)</sup>を用いる。木構造で細分化された小領域をブロックと呼ぶ。本研究では、Fig.1のように、ひとつのブロックに  $8 \times 8 \times 8$  の均一格子を配置するブロック構造としている。高解像度の格子は物体表面および渦に適合させる。

大規模な流体構造連成問題の計算を行うために、MPIライブラリを用いた複数 GPU 実装を行う。1つの MPI プロセスに1台の GPU を割り当てる Flat-MPI で並列化を行う。全体の計算領域を MPI プロセス数の小領域に分割し、各小領域内のブロックの計算を各 GPU に割り当てる。計算領域の分割には、図2に示すモートン曲線<sup>(11)</sup>を用いる。モートン曲線の順序に従いブロックを数え、各小領域に所属するブロックの数が均一になるようにモー

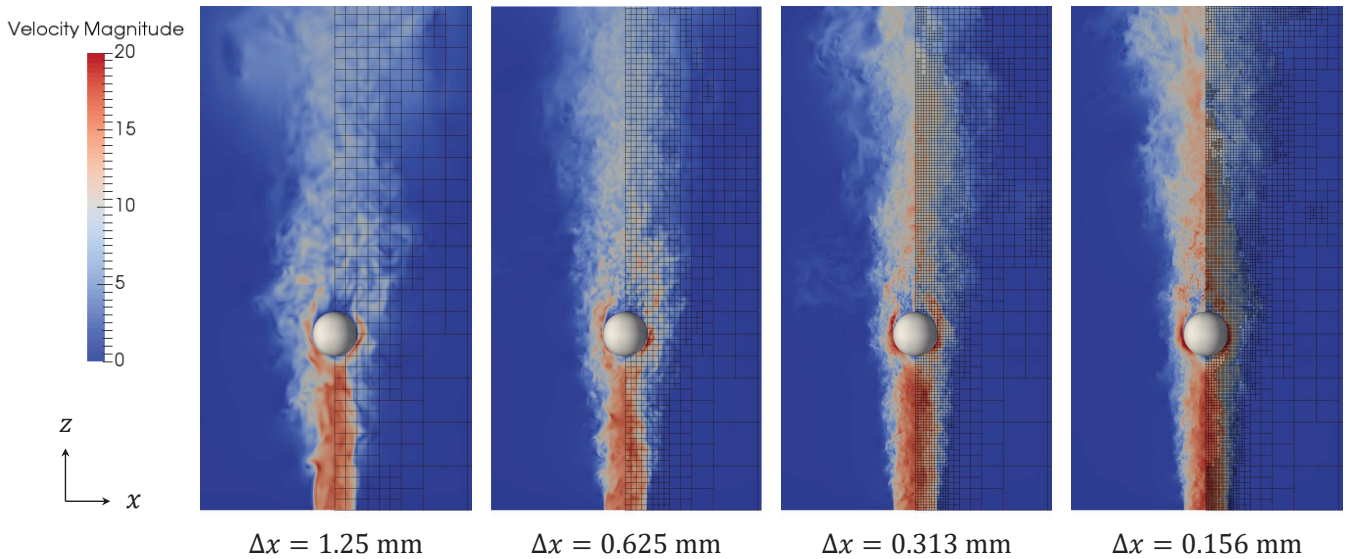


Fig. 4: Velocity profiles of x-z plane at four different resolutions in computation for drag acting on the fixed sphere. Note that these figures do not show the entire domain. In the region of  $x \geq x_c$ , blocks of  $8 \times 8 \times 8$  lattice points are shown.

トン曲線を分割する。

### 3. 計算条件

本研究のシミュレーションに用いる 2 つの計算領域を Fig.3 に示す。左側が噴流およびピンポン球の運動を計算するメインの計算領域であり、底面の中心の赤い領域に円形の流入条件を設定する。噴流の計算には流入条件として十分に発達した乱流の速度場を設定する必要があるため、本研究では、メインの計算領域とは別に円筒の計算領域を設定し、円筒内の乱流を周期境界条件のもと計算する。円筒内乱流の結果を毎タイムステップ、流入領域にコピーすることで、発達した乱流を流入条件として設定する。メインの計算領域の上面に流出境界、他の面は速度 0 のディレクレ境界である。

流体は  $40^\circ\text{C}$  の空気とし、密度  $1.128 \text{ kg/m}^3$ 、動粘度  $1.698 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  とする。重力加速度  $g$  は  $9.8 \text{ m/s}^2$  である。ピンポン球の直径は  $40 \text{ mm}$ 、質量を  $2.72 \text{ g}$  とする。ピンポン球のパラメータは体積が  $V_s = 3.351 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ 、密度が  $81.169 \text{ kg/m}^3$ 、慣性モーメントが  $I_s = 1.066 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  である。

### 4. 計算結果

#### 4.1 噴流中に固定したピンポン球に作用する抗力

格子解像度の影響を確認するため、格子幅を変えた 4 つの条件で噴流中に固定したピンポン球に作用する抗力を計算した。球の表面に割り当てる最小格子幅は  $1.25 \text{ mm}$ 、 $0.625 \text{ mm}$ 、 $0.313 \text{ mm}$ 、 $0.156 \text{ mm}$  の 4 種類とし、それぞれピンポン球の直径に対して 32 格子、64 格子、128 格子、256 格子に相当する。ドライヤーからの風を想定し、流入口の直径はピンポン玉直径と同じ  $D_{in} = 0.04 \text{ m}$  とし、流入速度は  $u_{in} = 15 \text{ m/s}$  とする。ピンポン球は位置  $(0.64 \text{ m}, 0.64 \text{ m}, 0.16 \text{ m})$  に固定する。

各解像度における速度場の瞬時値のスナップショットを Fig.4 に示す。速度コンターの右半分には、計算に用いた  $8 \times 8 \times 8$  格子を含むブロックを示しており、ピンポン球と噴流に細かいブロックを割り当て計算していることが確認できる。格子解像度を細かくするほどより小さな渦まで計算できていることが確認できる。流体構造錬成計算で重要となるピンポン玉付近の速度場に関しては、格子解像度に大きく依存していないと言える。

各解像度における抗力の時刻歴を Fig.5(a) に示す。噴

流はおよそ  $t = 0.015 \text{ s}$  にピンポン球に到達しており、その後、抗力は噴流中の渦の影響を受けて振動しながらある一定値に収束している。どの解像度においても同様の傾向を示していることが確認できる。 $t = 0.1 \text{ s}$  以降で抗力の時間平均をした結果を Fig.5(b) に示す。格子解像度を細かくすると抗力がわずかに減少する傾向が確認できるが、最も細かい  $0.156 \text{ mm}$  格子と最も粗い  $1.25 \text{ mm}$  格子の抗力のズレは 15% 程度である。球に作用する抗力は解像度に大きく依存しないと考え、計算コストの観点から以降のシミュレーションでは  $0.625 \text{ mm}$  の格子（直径に対して 64 メッシュ相当）を用いる。

#### 4.2 噴流の中心軸から外れたピンポン球に作用する揚力

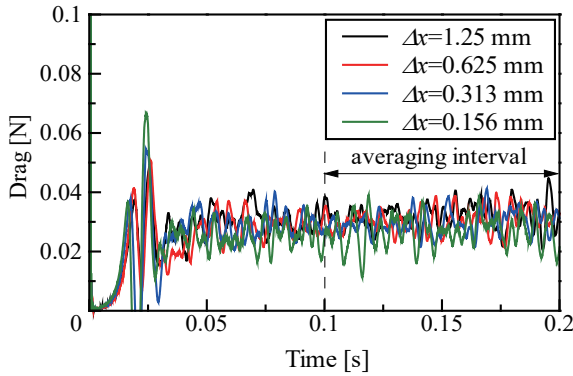
ピンポン球が噴流中で浮遊し続ける条件を調べるため、流入直径を  $D_{in} = D/2, 3D/4, D, 5D/4, 3D/2$  と変えてピンポン球を噴流の中心軸から  $x$  軸方向にズラして配置して揚力を計算する。計算ステップ数は 262,144 であり、物理時間で 0.32 秒までの計算を行う。その他の条件は 4.1 節と同様である。

ピンポン球に作用する揚力の時間平均値を Fig.6 に示す。縦軸は揚力、横軸は噴流の中心軸からのズレをピンポン球の直径で無次元化した値である。流入口の直径がピンポン球の直径以下の条件 ( $D_{in} = D/2, 3D/4, D$ ) は同様の傾向を示している。ピンポン球が  $x$  軸正の方向にずれた場合は負の揚力 ( $x$  軸の負の方向に作用)、負の方向にずれた場合は正の揚力 ( $x$  軸の正の方向に作用) が作用している。このことから、ピンポン球が噴流の中心軸からずれている場合、中心軸方向に動かす揚力が働くことが確認でき、これがピンポン球が噴流中で安定して浮遊する要因であると考えられる。一方、流入口の直径がピンポン球の直径より大きい条件 ( $D_{in} = 5D/4, 3D/2$ ) では、揚力が作用する方向が異なり、噴流の中心軸付近で噴流外側に押し出す揚力が作用している。噴流の中心軸からある程度離れると、中心軸方向に動かす揚力が作用する。この結果から、流入口の直径がピンポン球の直径より大きい場合は、噴流の中心軸付近では安定しないと考えられる。

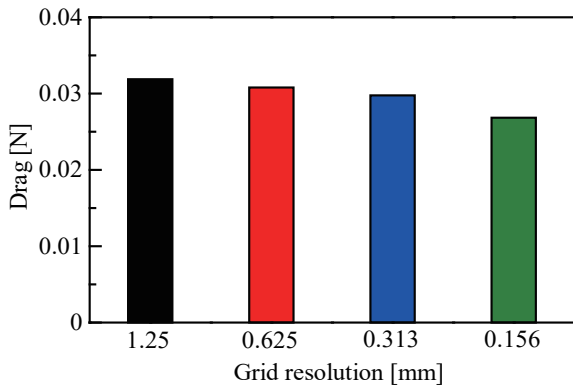
#### 4.3 噴流により浮遊するピンポン球の計算

流入口の直径がピンポン球の直径と等しい条件 ( $D_{in} = D$ ) とピンポン球の直径よりも大きい条件 ( $D_{in} = 5D/4$ ) において、噴流により浮遊するピンポン球のシミュレー





(a) Time histories of drag.



(b) Time-averaged drag.

Fig. 5: Results of drag acting on the fixed sphere.

シジョンを行う。流入流速はそれぞれ  $u_{in} = 15 \text{ m/s}$ ,  $13 \text{ m/s}$ , 計算ステップ数は 4,000,000 と 3,466,672 であり, 物理時間で 5 秒までの計算を行う。ピンポン球の初期位置は  $(0.64 \text{ m}, 0.64 \text{ m}, 0.16 \text{ m})$  であり, その他の条件は 4.1 節と同様である。また, ピンポン球の運動を議論するために, 流入口の中心を原点として円筒座標系  $(r, \theta, z)$  を導入し,  $z$  軸方向の力を抗力,  $r$  軸方向の力を揚力と定義する。

$D_{in} = D$  におけるピンポン球の高さ  $z$ , 抗力, 中心からのズレ  $r$ , 揚力の計算結果を Fig.7 に示す。ピンポン球の高さの時刻歴は  $z = 0.21 \text{ m}$  付近を中心に振動しながら, 徐々に振動が小さくなっている。ピンポン球に作用する抗力は, 噴流中の渦の影響で振動しているがほぼ一定の値である。噴流の中心軸からのズレをピンポン球の直径で無次元化した  $r/D$  の値は, 振動しつつも常に 0.3 以下であり, ピンポン球はジェットの中心軸付近で運動していることが確認できる。揚力は乱流の影響で振動しており, 揚力とズレ  $r/D$  の相関関係は確認できなかった。

$D_{in} = 5D/4$  における計算結果を Fig.8 に示す。ピンポン球の高さ  $z$  は大きく揺れているが, ピンポン球の直径よりも流入口が広い条件においてもピンポン球が落下することなく浮遊した。抗力は高さと同様の関係があり, ピンポン球の位置が低くなる(流入口に近くなる)と大きな抗力, 高くなる(流入口から離れる)と小さな抗力が作用している。この逆相関の関係があるため, ピンポン球は上下に運動したと考えられる。また, 噴流の中心軸からのズレは球直径と同じ大きさの流入口の場合 (Fig.7(c)) よりも大きい。  $t = 1.2 \text{ s}$  や  $t = 2.7 \text{ s}$  などの時刻にピンポン球が噴流の中心に近づくと, ピンポン球を外側に押す揚力 (正の揚力) が作用し, ピンポン球は外側に移動する。これにより, 流入口が広い条件ではピンポン球は中心軸付近に近寄ることが出来ず, 噴流の中心軸からずれて運動している。

ピンポン球の噴流の中心軸からのズレと揚力の関係を

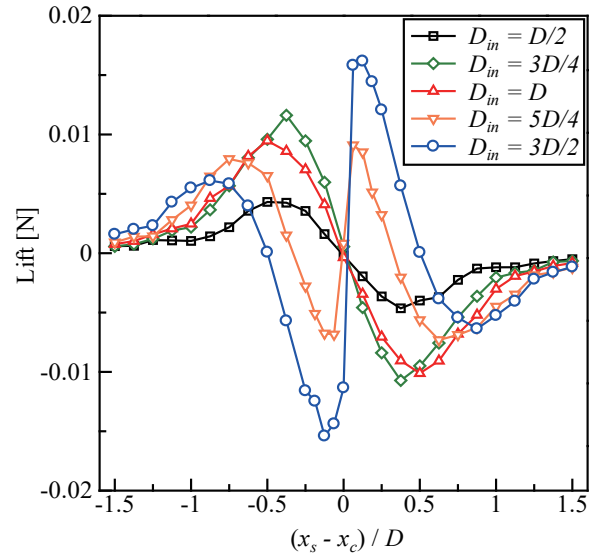


Fig. 6: Result of lift acting on the fixed sphere placed off the center of the jet.

調べるため,  $D_{in} = 5D/4$  における  $r/D$  と揚力のグラフを Fig.9 に示す。赤のプロットは  $r/D$  が 0.05 の間隔で平均した揚力の値である。平均値を見ると, 噴流の中心付近では正の揚力 (外向き), 離れると負の揚力 (内向き) がピンポン球に作用している。4.2 節の固定した球に作用する揚力と同様の傾向が, 噴流と相互作用する球においても得られることが確認できた。以上のことから, 流入口が狭いほうが安定してピンポン球を浮遊すると考えられる。

## 5. 結言

格子ボルツマン法に AMR 法を導入し, 複数台の GPU を用いた並列計算により, 噴流により浮遊するピンポン球のシミュレーションを実行した。固定したピンポン球に作用する抗力の計算を行い, 抗力は格子解像度にあまり依存しないことが確認できた。ピンポン球を噴流の中心からズラして配置して揚力を測定した結果, 流入口がピンポン球よりも小さい場合は中心方向の揚力が作用するが, 流入口が広い場合は中心軸付近で外向きの揚力が作用することが確認できた。噴流で支えられるピンポン球の流体構造錬成解析を行い, 流入口が狭い条件では中心軸付近で安定して浮かぶ傾向があり, 一方, 流入口が広いと中心軸から離れて運動する傾向が確認できた。これらのことから, 流入口が狭いほうが安定してピンポン球を浮遊すると考えられる。

今後, 流入流速や流入口の大きさを変えた様々な条件でシミュレーションを実行し, 安定して浮遊する条件を調べる。また, 平均速度場や圧力係数などから, なぜ流入口が広いと外向きに力が働き不安定になるのかを調べる予定である。

謝辞: 本研究は, 科学研究費補助金・基盤研究 (S) 課題番号 19H05613 「自由界面を含む混相流の革新的数値シミュレーション」, 革新的ハイパフォーマンス・コンピューティング・インフラ (HPCI) 課題番号 hp190130, および学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点 (JHPCN) 課題番号 jh190054 から支援を頂いた。計算には東京工業大学学術国際情報センターのスパコン TSUBAME3.0 を利用させて頂いた。記して謝意を表す。

参考文献

- (1) RS Neve, R Nelson, and P Kotsiopoulos. The drag force on spheres in thin jets. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 107, pp. 521–531, 1981.
- (2) T López-Arias, LM Gratton, G Zendri, and S Oss. Forces acting on a ball in an air jet. *Physics Education*, Vol. 46, No. 2, p. 146, 2011.
- (3) Marsha J. Berger and Joseph Oliger. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 53, No. 3, pp. 484–512, 1984.
- (4) Martin Geier, Martin Schönherr, Andrea Pasquali, and Manfred Krafczyk. The cumulant lattice boltzmann equation in three dimensions: Theory and validation. *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 70, No. 4, pp. 507–547, 2015.
- (5) Dominique d’Humières. Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 360, No. 1792, pp. 437–451, 2002.
- (6) M’hamed Bouzidi, Mouaouia Firdaouss, Pierre Lallemand. Momentum transfer of a Boltzmann-lattice fluid with boundaries. *Physics of Fluids (1994-present)*, Vol. 13, No. 11, pp. 3452–3459, 2001.
- (7) Hui Gao, Hui Li, and Lian-Ping Wang. Lattice Boltzmann simulation of turbulent flow laden with finite-size particles. *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 65, No. 2, pp. 194–210, 2013.
- (8) Binghai Wen, Chaoying Zhang, Yusong Tu, Chunlei Wang, and Haiping Fang. Galilean invariant fluid–solid interfacial dynamics in lattice Boltzmann simulations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 266, pp. 161–170, 2014.
- (9) Carsten Burstedde, Lucas C. Wilcox, and Omar Ghattas. p4est: Scalable algorithms for parallel adaptive mesh refinement on forests of octrees. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 33, No. 3, pp. 1103–1133, 2011.
- (10) Ralf Deiterding. Block-Structured Adaptive Mesh Refinement - Theory, Implementation and Application. *Esaim: Proceedings*, Vol. 34, No. December, pp. 97–150, 2011.
- (11) Arthur R. Butz. Space filling curves and mathematical programming. *Information and Control*, Vol. 12, No. 4, pp. 314–330, 1968.

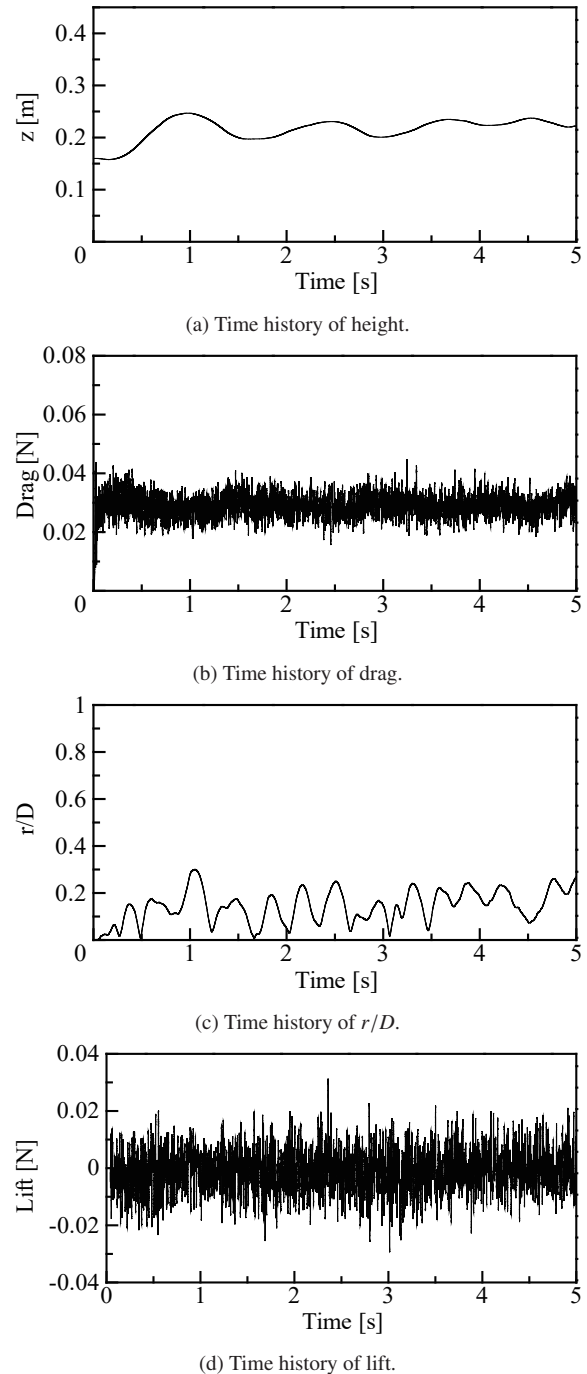


Fig. 7: Results of the motion and forces of floating ping-pong ball ( $D_{in} = D$ ).

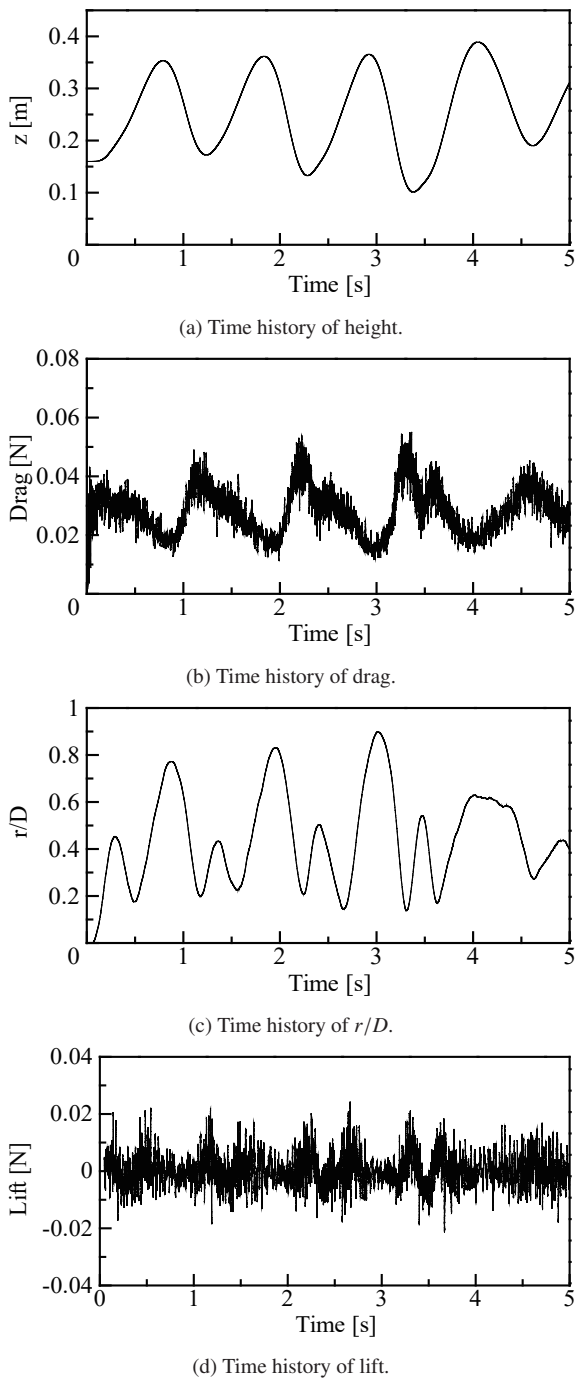


Fig. 8: Results of the motion and forces of floating ping-pong ball ( $D_{in} = 1.25D$ ).

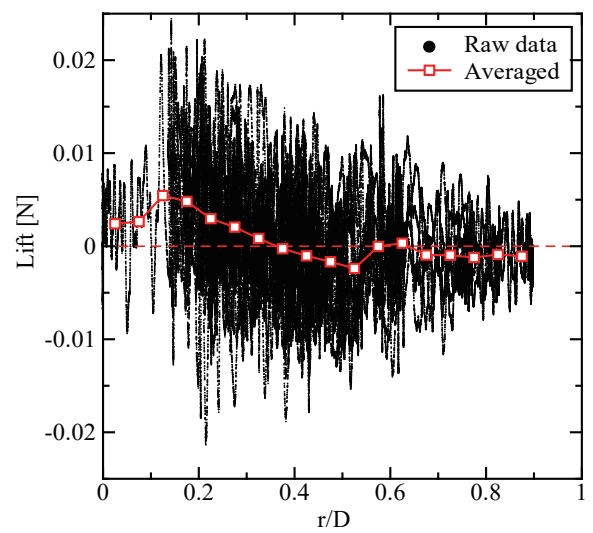


Fig. 9: Relation of  $r/D$  to lift of the sphere suspended by the jet ( $D_{in} = 1.25D$ ). The red dash line indicates lift=0.