埋め込み境界法を用いた鈍頭物体まわりの極超音速流れ解析
Hypersonic Flow Analysis around Blunt Body using Immersed Boundary Method

○ 藤原裕夢，東海大，神奈川県平塚市北金目 4-1-1，6bed1203@mail.u-tokai.ac.jp
水野裕介，東海大，神奈川県平塚市北金目 4-1-1，7btad010@mail.u-tokai.ac.jp
山下璃良威，東海大，神奈川県平塚市北金目 4-1-1，6bed3116@mail.u-tokai.ac.jp
高橋俊，東海大，神奈川県平塚市北金目 4-1-1，takahasi@tokai-u.jp
福島直哉，東海大，神奈川県平塚市北金目 4-1-1，fukushima@tsc.u-tokai.ac.jp
Hiromu FUJIWARA, Tokai Univ., 4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa, JAPAN
Yusuke MIZUNO, Tokai Univ., 4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa, JAPAN
Rirai YAMASHITA, Tokai Univ., 4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa, JAPAN
Shun TAKAHASHI, Tokai Univ., 4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa, JAPAN
Naoya FUKUSHIMA, Tokai Univ., 4-1-1 Kitakaname, Hiratsuka, Kanagawa, JAPAN

A numerical scheme based on Cartesian mesh with immersed boundary method applied to the hypersonic flow simulation in order to investigate pressure and temperature distribution around shock and the object surface. Though the flow simulation under the hypersonic condition is usually conducted by body fitted coordinate grid, the applicability and the validity of the immersed boundary method on Cartesian mesh is investigated in this study. AUSM+ scheme was employed to estimate the inviscid flux accurately even in the hypersonic flow condition. As results, the present pressure distribution on the surface of the blunt body showed agreement with the previous studies quantitatively. On the other hand, the temperature distribution is in agreement qualitatively due to the strong mesh dependency.

1.はじめに

現在，極超音速流を解く場合において構造格子法や非構造格子法を用いた研究は世界的に多くなされているが，直交格子法を用いた研究は少なく，いまだ多くの知見は得られていない．その理由の一つは構造格子法や非構造格子法が直交格子法に比べて物体壁面近傍での解像度を容易に上げられるという点がある．しかしながら，これらの手法では複雑形状に対して自動で格子が生成できず手動での格子の修正を行う場合もある．また流体計算のための格子生成自体にもかなりの時間が必要である．また Gnoffo ら[1]によると，熱流束の計算は格子形状が歪むほど得られる解の誤差が大きくなることがわかっている．そのため境界適合格子法や非構造格子法のような物体形状によって格子形状が影響される格子では，複雑形状を計算しようとすると，温度場の計算は困難になることが考えられる．

対して直交格子法は完全自動で格子生成が可能で，短時間での生成が可能であり，誰でも同じ品質の格子を失敗なく短時間で作成できるといった利点がある．また複雑形状の再現が容易でありロバスト性を損なわないという利点や空間の格子分布が一様で数値誤差が少なく，解析領域全域で同じスケールの流れの変化を観察するのに適している利点もある．しかしながら複雑な形状を近似して表すことはできても物体近傍に効率的に格子を配置するのは難しい．また外部流れなどでは物体から離れた領域に多くの格子点を使用することになり，効率の面からはあまり良くない．そこで我々はこれまでに開発した埋め込み境界法[2]を適用した直交格子の物体近傍は格子密度を高くし，それ以外のところでは格子密度を低くすることでそれらを解決した．

本研究では極超音速飛行現象把握に向けて，研究室で開発が進められている鈍頭物体周りの極超音速流を解く 3 次元解析コードの性能を検証する．開発した解析コードの精度を先行研究[3]の結果と比較することで本計算の妥当性を確認する．

2.解析手法

2.1 支配方程式

本研究では支配方程式を式(1)の 3 次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式とする．

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial z}=\frac{\partial E_v}{\partial x}+\frac{\partial F_v}{\partial y}+\frac{\partial G_v}{\partial z}$$

$$Q=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ \rho e\end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ (\rho e+p)u\end{bmatrix},$$

$$F=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho vu\\ \rho v^2+p\\ \rho vw\\ (\rho e+p)v\end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix}\rho w\\ \rho wu\\ \rho wv\\ \rho w^2+p\\ (\rho e+p)w\end{bmatrix},$$

$$E_v=\begin{bmatrix}0\\ \tau_{xx}\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{xx}u+\tau_{xy}v+\tau_{xz}w+\kappa T_x\end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$F_v=\begin{bmatrix}0\\ \tau_{yx}\\ \tau_{yy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{yx}u+\tau_{yy}v+\tau_{yz}w+\kappa T_y\end{bmatrix},$$

$$G_v=\begin{bmatrix}0\\ \tau_{zx}\\ \tau_{zy}\\ \tau_{zz}\\ \tau_{zx}u+\tau_{zy}v+\tau_{zz}w+\kappa T_z\end{bmatrix}$$

ここで E, F, G, E_v, F_v, G_v はそれぞれ x, y, z 軸方向の非粘性流束，粘性流束であり，Q は保存変数ベクトルである．式中の圧力 p と単位質量当たりのエネルギー e は，密度 ρ, 各軸方向の速度 u, v, w 比熱比 γ を用いて式(2)の状態方程式で関係づける．

$$\rho e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= \frac{2}{3}\mu(2u_x - v_y - w_z) \\
\tau_{yy} &= \frac{2}{3}\mu(2v_y - w_z - u_x) \\
\tau_{zz} &= \frac{2}{3}\mu(2w_z - u_x - v_y) \\
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu(u_y + v_x) \\
\tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu(v_z + w_y) \\
\tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu(w_x + u_z)
\end{aligned} \tag{3}$$

$$C_p T = \frac{\rho e + p}{\rho} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \tag{4}$$

また，粘性応力項 τ と温度 T は式(3)と式(4)から求められる． ここで，μ, Cp, κ はそれぞれ粘性係数，定圧比熱，熱伝導係数である．上記の式の全ての変数は解析に当たって一様流の密度，音速， 代表長さによって無次元化される．またこれらの方程式はセル中心の等間隔直交格子上で離散化される．式(1)の非粘性流束は 3 次精度 MUSCL 内挿により高次精度化された AUSM+スキームによって計算される．

2. 2. 埋め込み境界法

本研究では物体境界はレベルセット法とゴーストセル法を利用して埋め込み境界で取り扱う．レベルセット関数は各セル中心の座標から物体境界までの垂直距離に符号がついた符号付距離の値である．図 1 にレベルセット関数の模式図を示す．本研究では，このレベルセット法を複数物体の解析に適用するため重合格子法の最小距離アルゴリズムを拡張した．レベルセット関数の値からセルを 3 種類(流体セル，物体セル，ゴ ーストセル)に分類する．レベルセット関数の値 φ から流体セル，物体セル，ゴーストセルの 3 種類に分類された物体境界近傍のセルを図 2 に示す．ゴーストセルは流体領域と物体領域の間で境界条件を与えるガードセールとして機能し，本研究では 2 層分定義するように式(5)に基づいてセルを分類した．下付き文字の FC，GC，OC はそれぞれ流体セル，ゴーストセル，物体セルを指している．

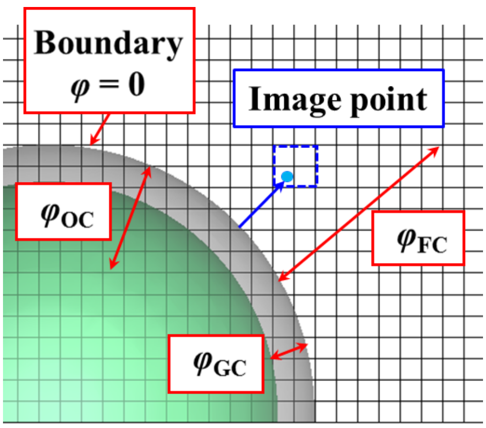


Fig. 1 Level set function.

$$\begin{aligned}
&\varphi_{FC} > 0 \\
&\varphi_{GC} \le 0 \ and \ \varphi_{GC} \ge -2\sqrt{3}\Delta x \\
&\varphi_{OC} < -2\sqrt{3}\Delta x
\end{aligned} \tag{5}$$

本研究ではイメージポイントを用いるゴーストセル法を採用する．この手法の長所はアルゴリズムの簡便さと計算の安定性にある．図 2 にイメージポイントの模式図を示す．イメージポイントはゴーストセルから物体壁面に対して垂直方向に伸びたプローブの先端にある点である．このプローブ長さ d_{IP} は本研究では格子幅の 1.75 倍(1.75Δx) で固定する．この 1.75Δx という長さは再帰参照をさけるためセルの斜辺の長さ$\sqrt{3}\Delta x$ より大きくなるように設定した．このイメージポイントを囲む流体セル群からイメージポイントに流れの諸量を内挿する．本研究ではこの内挿には Tri-linear 内挿を用いた．このイメージポイントの値からゴーストセルにおける値を決定する．

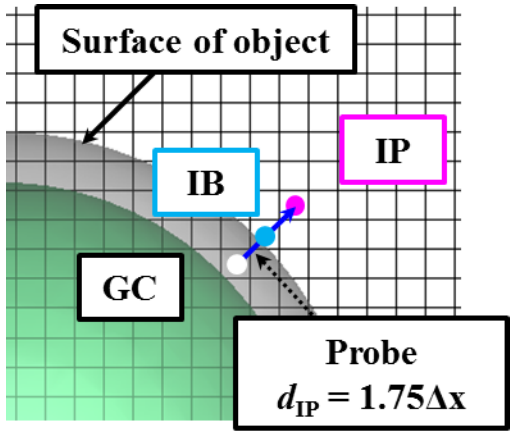


Fig.2 Schematic of ghost cell method.

速度は Probe に沿って線形に分布していると仮定して，式(6)に基づいて値を決定する．圧力と密度は式 (7) のように 0 次で外挿される．

$$\begin{aligned}
u_{GC} &= u_{IP} - \frac{d_{IP} + |\varphi_{GC}|}{d_{IP}}(u_{IP} - u_{IB}), \\
v_{GC} &= v_{IP} - \frac{d_{IP} + |\varphi_{GC}|}{d_{IP}}(v_{IP} - v_{IB}), \\
w_{GC} &= w_{IP} - \frac{d_{IP} + |\varphi_{GC}|}{d_{IP}}(w_{IP} - w_{IB}),
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
P_{GC} &= P_{IP}. \\
\rho_{GC} &= \rho_{IP},
\end{aligned} \tag{7}$$

2.3. AUSM+スキーム

本解析では非粘性流束を AUSM+法を用いて求める[4]．本解析の x 軸方向成分の数値流束は, 式(8)として評価される．ここで a, M と $h=(e+p)/\rho$ は音速，Mach 数，エンタルピーを示す．n はセル界面における単位法線成分である．音速，Mach 数は以下の式(9), (10)から求める．

$$E_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} a_{i+\frac{1}{2}} \left(M_{i+\frac{1}{2}} (\varphi_{i+1} + \varphi_i) - \left| M_{i+\frac{1}{2}} \right| (\varphi_{i+1} - \varphi_i) \right) + P_{i+\frac{1}{2}},$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho h \end{pmatrix}, P = P_{i+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix}_{i+\frac{1}{2}} \tag{8}$$

$$a_L = \sqrt{2h_L \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}$$

$$a_R = \sqrt{2h_R \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}$$

$$a_L^* = \frac{a_L}{\max(a_L, |u_L|)} \tag{9}$$

$$a_R^* = \frac{a_R}{\max(a_R, |u_R|)}$$

$$a_{i+\frac{1}{2}} = \min(a_L^*, a_R^*)$$

$$M_L = \frac{|\boldsymbol{u}_L^2|_{i+\frac{1}{2}}}{a_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$M_R = \frac{|\boldsymbol{u}_R^2|_{i+\frac{1}{2}}}{a_{i+\frac{1}{2}}} \tag{10}$$

$$M_{i+\frac{1}{2}} = M_L^+ + M_R^-,$$

として求める．ここで，M_L^+と M_R^-は M_L と M_R の大きさの条件より，

$$M_L^+ = \begin{cases} \frac{1}{2}(M_L + |M_L|) & , if|M_L| \geq 1 \\ \frac{1}{4}(M_L + 1)^2 + \beta(M_L^2 - 1)^2, otherwise \end{cases}$$

$$M_R^+ = \begin{cases} \frac{1}{2}(M_R + |M_R|) & , if|M_R| \geq 1 \\ -\frac{1}{4}(M_R + 1)^2 - \beta(M_R^2 - 1)^2, otherwise \end{cases} \tag{11}$$

として求める．一方で，独立して求める圧力項に関しては，M_L と M_Rの大きさの条件により，

$$P_L^+ = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + sgn(M_L)) & , if|M_L| \geq 1 \\ \frac{1}{4}(M_L + 1)^2(2 - M_L) + \alpha M_L(M_L^2 - 1)^2, otherwise \end{cases}$$

$$P_R^+ = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + sgn(M_R)) & , if|M_R| \geq 1 \\ -\frac{1}{4}(M_R + 1)^2(2 - M_R) - \alpha M_R(M_R^2 - 1)^2, otherwise \end{cases} \tag{11}$$

$$p_{i+\frac{1}{2}} = P_L^+ P_R + P_R^- P_R,$$

として求められる．y 軸方向のも同様な処理をして求める．ここで，α と β はそれぞれ 3/16 と 1/8 とした．高次精度化には 3 次精度の MUSCL スキームを用いた．物体壁面での数値流束は速度成分を 0 として，

$$F_w = \begin{pmatrix} 0 \\ p_w n_x \\ p_w n_y \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

として壁面における圧力成分と壁面に対する単位法線成分から求める．

3. 検証計算

本章では，3 次元鈍頭物体周りの流れ場において，先行研究の結果と比較して検証計算を行い，流れ場の再現性と物体壁面の圧力，熱流束の計算精度について検証する．

3.1. 計算条件

計算条件を表 1 に示す．図 3 に D/100 の計算領域を x-y 平面で示す．z 軸方向においても y 軸方向と同じ計算領域の量である．物体周りに生成される格子を図 4 に示す．格子解像度は球直径を D として，D/50，D/100，D/150 の 3 ケースである．流れが流入してくる境界面に対しては，境界面における変数の値を直接指定する Dirichlet 条件，上下境界と流出境界の諸量には Neumann 条件を課す．壁面条件は滑りなしで，等温(T_w=300 K)としている．なお，最小格子幅に基づくセル Reynolds 数は D/50 で 4.89×10^2，D/100 で 2.45×10^2，D/150 で 1.63×10^2 である．MPI 用の領域分割および並列数はそれぞれ 4 分割，1 ノードとした．CFL 数は 0.1．Reynolds 数は 1.4×10^5 である．格子においては，物体近傍の領域は等間隔の格子 (1.5D×3D×3D)でそれ以降の領域は格子幅を 1.1 倍で伸長した不等間隔格子を用いた．P_∞，T_∞，ρ_∞，M_∞はそれぞれ一様流の圧力，温度，密度，Mach 数である．

Table. 1 Calculation grid parameters

	総セル数	格子 Reynolds 数
D/50	13,552,000	4.89×10^2
D/100	27,104,000	2.45×10^2
D/150	40,656,000	1.63×10^2

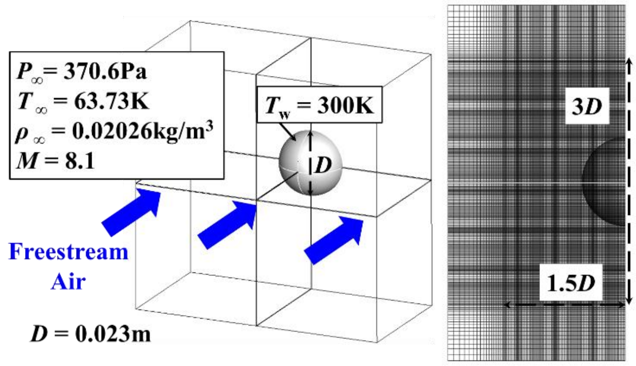
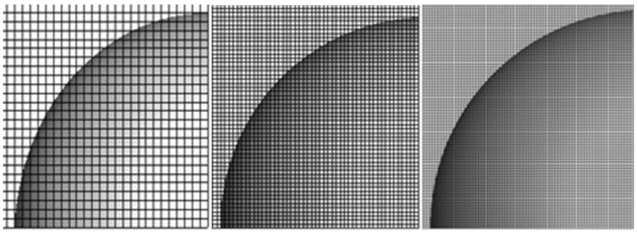


Fig.3 Computational grid



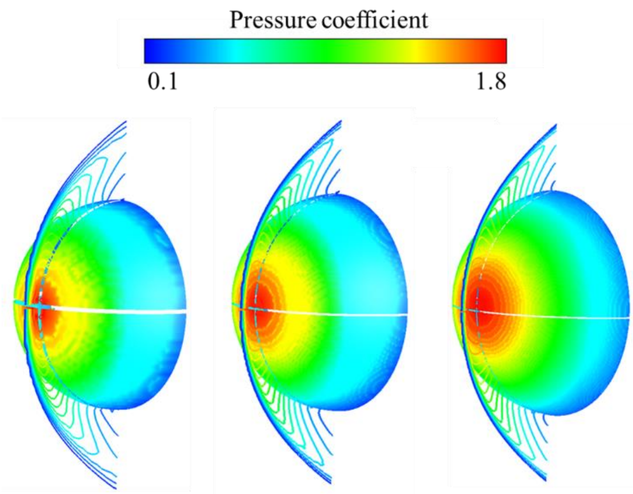
(a) *D*/50　(b) *D*/100　(c) *D*/150

Fig.4 Grids generated around the object

3.2. 結果と考察

図 4 に圧力係数の可視化図を示す. *D*/100 と *D*150 では大きな差は確認できないが *D*/50 では正しく離脱衝撃波が形成されていない．これは物体と離脱衝撃波の間の格子点数が十分でないことが考えられる．今回の検証ケースでは *D*/150 が最も先行研究と同様の分布を示した.

図 5 に壁面圧力分布を示す. 横軸は淀み点を 0°，後流側を 90°とする角度である．黒の実線は Kitamura らによって行われた解析結果[3]である．*D*/50，*D*/100，*D*/150 全てのケースで先行研究と近い結果を得ることができた．また今回検証したケースで *D*/150 では圧力にばらつきが少なくなり，先行研究により近い値を示している．これは格子幅を細かくしたことにより，流れ場全体がより正確に捉えられたためであることや，イメージポイントを囲む流体セル群からイメージポイントに流れの諸量を内挿しているための誤差であることや，参照点が格子の配置位置に依存しているためである．以上のことから *D*/150 で格子収束を確認した.



(a) *D*/50　(b) *D*/100　(c) *D*/150

Fig. 5 Pressure coefficient distribution

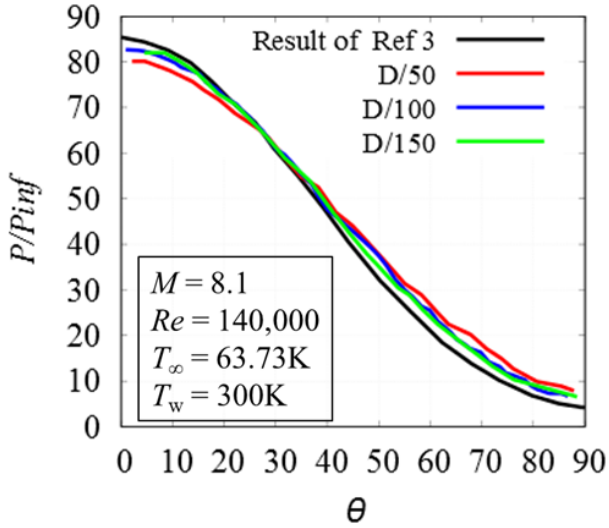
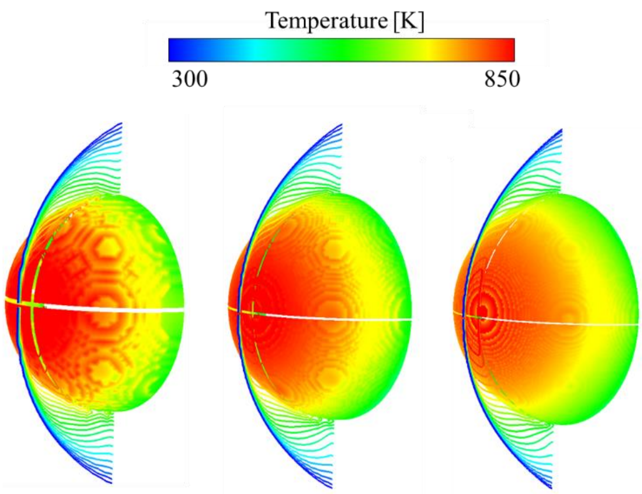


Fig.6 Normalized surface pressure distribution

図 7 に温度分布を示す．特によどみ点において温度変化は大きく，温度は最大となっている．これはよどみ点で空気の流れがせき止められたことで運動エネルギーが熱エネルギーに変換されたことで起こる空力加熱の影響を捉えている．そして，圧力分布と同様に，非常に滑らかで，流れ場そのものが正しく解けているといえる.

壁面熱流束分布は，よどみ点（θ=0°）で熱流束は最大となり，後流（θ=90°）に近づくにつれ減少するという先行研究と近い傾向が得られた．しかし，よどみ点では格子幅が異なると大きなばらつきがみられる．また，すべてのケースで 70°あたりで値が減少している．これは格子解像度が足りていないか，埋め込み境界法で圧縮性流体を取り扱うときに，壁面近傍で保存則を満たさないために生じた現象だと考えられる.



(a) *D*/50　(b) *D*/100　(c) *D*/150

Fig. 7 Temperature distribution

3.3. 本解析コードの評価

今回の検証ケースでは直径 *D* に対して格子を 150 点用意することで先行研究に近い値が得られた．定性的，定量的にみても本解析コードでは，物体壁面の圧力は高精度に予測できているといえる．一方，熱流束は全体的な傾向は予測できているが，高精度の

予測は現状では困難である．

4. Mach 数の影響

既存のデータと比較を行い，本研究手法(直交格子法)の適応性を把握する．Mach 数の影響について考察する．

4.1. 計算条件

格子条件は前述の結果から *D*/150 の条件を用いる．計算条件を表 2 にまとめる．

Table2 Flow conditions.

M	5.73	12
Re	2050	135736
T_∞[K]	38.08	218
T_w[K]	201	555
D [m]	0.012	0.025

4.2. 結果と考察

4.2.1. Mach 5.73 の解析結果

図 8 に圧力分布と温度分布を示す．淀み点で最大値をとっており後流に進むにつれて徐々に値が低下しているのを確認した．衝撃波周りで温度が大きく上昇しており，壁面表面はよどみ点を中心に温度上昇している様子が確認出来，定性的に良好な傾向が見て取れる．一方で壁面圧力においては後流の圧力はよどみ点より低下しており，過去の研究とは類似の傾向が見られる．

図 9 に壁面圧力係数を示す．黒の実線は Kopriva によって行われた解析の結果である[9]．横軸は淀み点を 0°，後流側を 90°とする角度である．よどみ点（$\theta = 0°$）で圧力係数は最大となり，後流（$\theta = 90°$）に近づくにつれ減少するという先行研究と近い傾向が得られた．また，先行研究の結果とも良い一致を示す．

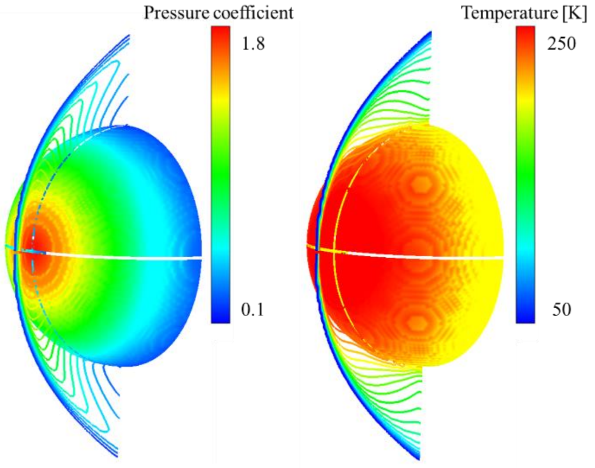


Fig. 8 Pressure coefficient and Temperature ($M = 5.73$)

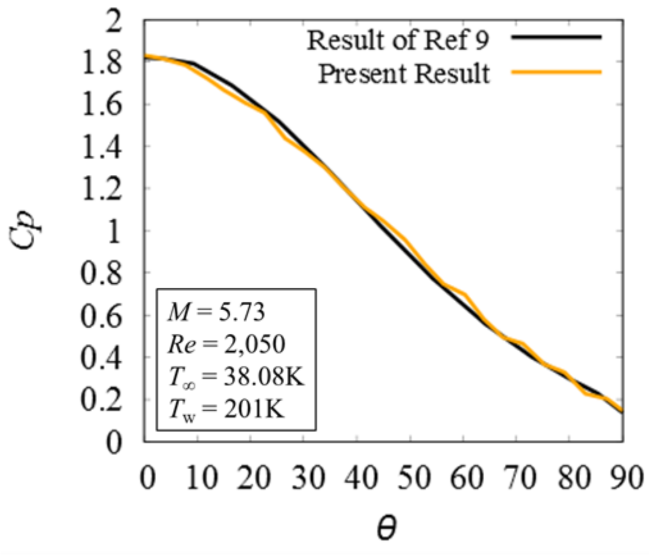


Fig. 9 Pressure coefficient

4.2.1. Mach 12 の解析結果

図 10 に圧力分布と温度分布を示す．Mach5.73 と比較して壁面圧力係数は高圧域と低圧域の差が大きくなっている. また高 Mach 数ゆえ離脱衝撃波面が物体に近付く傾向が見られた．

図 11 に壁面圧力を示す．黒の実線は Josyula,によって行われた解析の結果である[10]．横軸は淀み点を 0°，後流側を 90°とする角度である．全体的な傾向は捉えているが，0°から 40°付近で既存値を下回る結果となった．これには格子解像度の影響か，または時間刻みの影響が考えられる．

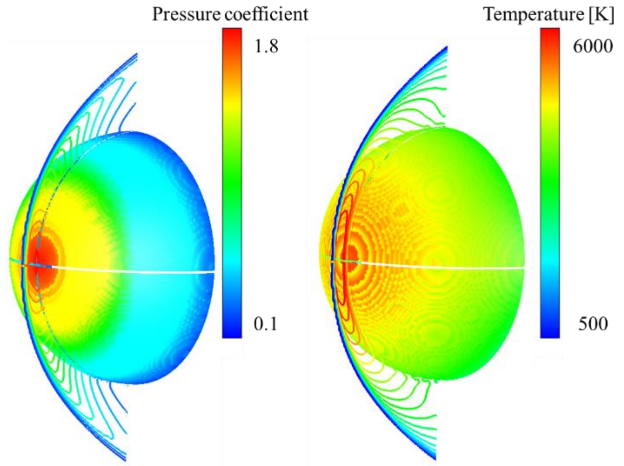


Fig. 10 Pressure coefficient and Temperature ($M = 12$)

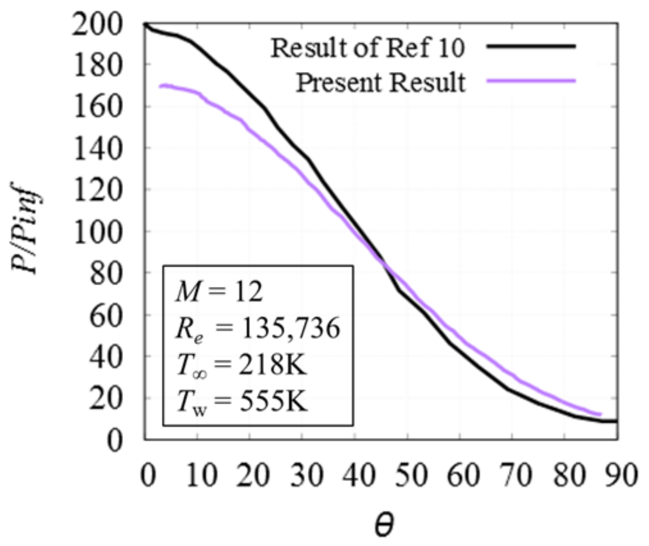


Fig. 11 Normalized surface pressure distribution

5. 結言

本研究では，鈍頭物体周りの極超音速流を解く 3 次元解析コードの性能を先行研究の結果と比較することによって，その性能を検証し，適応性を調査した．検証解析として，Mach 数 8.1，Reynolds 数 140000 の高 Mach 数，高 Reynolds 数の流れ場解析を行い，壁面圧力において定量的かつ定性的に良い一致を示しており，壁面圧力を適切に評価できていることを確認した．しかし，熱流束は全体の傾向は予測できているが，高精度の予測は現状では困難である．今後はこの要因を解決するために研究を進めていく．

Mach 数違いによる影響をみるために Mach 数 5.73 と Mach 数 12 の流れ場を解析した結果，Mach 数 5.73 では既存の結果と良い一致を示した．しかし，Mach 数 12 では壁面圧力は 0°から 40°付近で既存値を下回る結果となった．これには格子解像度の影響か時間刻みの影響が考えられる．

参考文献

(1) Gnoffo, P. A., White, J. A., “Computational Aerothermodynamic Simulation Issues on Unstructured Grids,” AIAA Paper 2004-2371, (2004)
(2) Takahashi, S., Nonomura, T., Fukuda, K., “A Numerical Scheme Based on an Immersed Boundary Method for Compressible Turbulent Flows with Shocks: Application to Two-Dimensional Flows around Cylinders,” Journal of Applied Mathematics 2014, pp.1-21, (2014)
(3) Kitamura, K., “Numerical Analysis on Aerodynamics Heating in Hypersonic Shock Interacting Flow”, Journal of JSASS, Vol.56, No.653, pp.269-277, (2008)
(4) Liou, M. S., “A sequel to AUSM: AUSM+”, Journal of Computational Physics, Vol.129, pp.364-382, (1996)
(5) 水野裕介，高橋俊，山田剛治，山下璃良威，福田紘大，”極超音速流れにおける固体の熱連成解析”，第 51 回流体力学講演会/第 37 回航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム，(2019)
(6) 高橋悠一，今村太郎，“直交格子法を用いた粘性計算における力計算と物体壁面境界の取り扱いについて”，第 26 回数値流体力学シンポジウム，(2012)
(7) Nonomura, T., Onishi, J., “A Comparative Study on Evaluation Methods of Fluid Forces on Cartesian Grids,” Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2017, (2017)
(8) Miller D. S. and Hijman, R., “Mach 8 to 22 Studies of Flow Separations Due to Deflected Control Surfaces”, AIAA Journal, Vol.2, No.2, pp. 312-321, (1964)
(9) Kopriva, D. A., “Spectral Solution of the Viscous Blunt-Body Problem”, Journal of AIAA， pp. 1235-12422， (1993)
(10) Josyula, E., “Numerical Study of Hypersonic Dissociated Air Past Blunt Bodies”, AIAA Journal, Vol. 29, No. 5, pp. 704-711, (1991)
(11) Hejranfar, K., Esfahanian, V., Kamali-Moghadam, R., “Dual-code solution procedure for efficient computing equilibrium hypersonic axisymmetric transitional/turbulent flows”, Aerospace Science and Technology, Vol. 21, pp. 64-74, (2012)
(12) Jiang, Z., Yan, C., Yu, J., Qu, F., Ma, L., “Effective high-order solver with thermally perfect gas model for hypersonic heating prediction”, Journal of Applied Thermal Engineering, Vol. 99, pp. 147-159, (2016)