

反応性流体解析における音速抑制法の適用 Reduced speed of sound technique for reacting flow

- 林伸治, 三菱自動車, 岡崎市橋目町字中新切 1, shinji1.hayashi@mitsubishi-motors.com
久保雅彦, 三菱自動車, 岡崎市橋目町字中新切 1, masahiko.kubo@mitsubishi-motors.com
口田征人, 三菱自動車, 岡崎市橋目町字中新切 1, masato.kuchita@mitsubishi-motors.com

Reduced speed of sound technique (RSST) is applied for the combustion reaction flow. The RSST formulation including the effect of the multi-component flow is derived from governing equations of fluid dynamics and thermodynamics. The numerical calculation results of one-dimensional flame propagation analysis using RSST are shown for the case that the reduction parameters of the speed of sound is uniform and non-uniform. As a result, it is found that RSST for combustion analysis is effective only when the reduced speed of sound parameter is small.

1. 緒言

従来, エンジン開発では決められた開発期間に対応するため, 時間ステップを比較的大きくとれる陰解法ベースの商用 CFD コードを用いた燃焼解析が一般的に行われてきた. 一方, 近年乗用車用ガソリンエンジンは高効率化のため高圧縮比化されていることからノッキングの発生が問題となってきたり, 強い圧力波が発生するようなノッキング現象を陰解法ベースのソルバーで再現することは難しい. そのため我々は, ノッキング現象を精度よく計算可能な陽解法のソルバーを開発し, 定容燃焼容器を対象としたノックの解析を行ってきた. しかしながら, 陽解法のソルバーは CFL 条件のため時間ステップが制限され, エンジンの燃焼計算の様に長時間のシミュレーションを行うことは難しい.

このような CFL 条件の問題を解決するため, 近年堀田らは音速抑制法(RSST: Reduced speed of sound technique)を提案している²⁾. この手法は, 音速を意図的に減速させることで CFL 条件を緩和させ, より大きな時間ステップを取ることを可能とする手法である.

燃焼 CFD においても, 既燃部の大きな音速によって時間ステップが制限されるため, RSST を用いれば大きな時間ステップを取ることが可能となり, 計算速度の向上が期待される. しかしながら, 堀田らが提案したオリジナルの RSST は, 基本量を時間発展させる必要があること, 密度変化が背景場より十分小さい場合のみ有効であること, また平均場を設定する必要があることから, 燃焼 CFD への応用は難しかった. これに対し, 近年飯島らは上記の問題を解決した新たな RSST の form を提案した³⁾. 本研究ではこの飯島らが提案した form を燃焼 CFD に適用するため, 多成分系の化学種の輸送にも対応した RSST の form を導出し, 燃焼現象を対象とした解析を行って計算速度の向上が可能か検討した.

2. PVS form を用いた多成分系の支配方程式の定式化

2.1 多成分系 PVS form

本研究では保存量の連続の式, 運動量の保存式, エネルギーの保存式および化学種の保存式に対して, 飯島らが提案した準保存系の RSST の一つである PVS form³⁾を適用する. Euler 方程式に対して PVS を適用すると下記の(1)~(4)式となる.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = - \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s \Delta P \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) + \frac{\partial P}{\partial x_i} = - \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) \left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial P}\right)_{v,s} \Delta P \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + P)\mathbf{v}] = - \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) \left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_{v,s} \Delta P \quad (3)$$

$$\frac{\partial (\rho Y_n)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} Y_n) = - \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) \left(\frac{\partial \rho Y_n}{\partial P}\right)_{v,s} \Delta P \quad (4)$$

ここで, ρ は密度, v_i は i 方向の流速, a は抑制前の音速, E は全エネルギー, P は圧力, Y_n は化学種 n の質量分率である. また, ξ は音速を抑制するパラメータであり, 実効的な音速を $1/\xi$ に減速させることができるため, 計算速度は ξ 倍となる. ΔP は音速を減速する前の圧力の時間変化を表す. 次に, (1)~(4)式の右辺に表れる保存量に対する圧力の偏微分を(5)~(8)式に示す.

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s = \frac{1}{a^2} \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial P}\right)_s = \frac{v_i}{a^2} \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_{v,s} = \frac{e + P + \rho v^2 / 2}{\rho a^2} \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial \rho Y_n}{\partial P}\right)_s = \frac{Y_n}{a^2} \quad (8)$$

また, この圧力の時間変化 ΔP を基本量 $\rho, e, Y_1, \dots, Y_{N-1}$ で表記すると(9)式となる.

$$\Delta P = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{e,Y} \Delta \rho + \left(\frac{\partial P}{\partial e}\right)_{\rho,Y} \Delta e + \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial Y_n}\right)_{\rho,e,Y_{m \neq n}} \Delta Y_n \right\} \quad (9)$$

ここで, e は内部エネルギー, $Y_{m \neq n}$ は Y_n 以外の化学種の質量分率である. また, $\Delta \rho, \Delta e, \Delta Y_n$ は各変数の時間変化を表す. 本研究では(9)式に示す化学種の時間変化を含む ΔP を導出し, 多成分系の化学種の輸送を考慮した PVS form を構築した.

2.2 化学種の輸送を考慮した圧力の時間変化 ΔP の導出

次に, 基本量で記述された圧力の時間変化 ΔP を保存量の輸送方程式の移流成分を含む form に変形する.

そのため, (9)式の計算に必要な基本量に対する圧力の偏微分値と基本量の時間変化を求める. まず, (9)式右辺第一項は, ρ, P, e について Maxwell の関係式⁴⁾を用いると

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{e,Y} = - \left(\frac{\partial e}{\partial P}\right)_{\rho,Y}^{-1} \left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_{\rho,Y} \quad (10)$$

となる. ここで, (10)式の右辺は, 熱力学第一法則を用いると下記の(11), (12)式となる.

$$\left(\frac{\partial e}{\partial P}\right)_{\rho,Y} = \frac{\rho T}{P_s} \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_{\rho,Y} = \frac{e + P}{\rho} - \frac{\rho T a^2}{P_s} \quad (12)$$

ここで, S はエントロピーである. また, P_s は(13)式となる.

$$P_s = \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_{\rho, Y} = \frac{P}{C_v} \quad (13)$$

次に, (9)式の第 3 項について定式化を行う. この項は, 化学種の質量分率が変化することで圧力が変化する効果である. そこで(10)式と同様に, e, P, Y_n に対して Maxwell の関係式を立てる.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Y_n} \right)_{\rho, e} = - \left(\frac{\partial e}{\partial P} \right)_{\rho, Y}^{-1} \left(\frac{\partial e}{\partial Y_n} \right)_{\rho, P} = -\rho \left(\frac{\partial e}{\partial P} \right)_{\rho, Y}^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial Y_n} \right)_{\rho, P} \quad (14)$$

ここで計算の便宜上, $(\partial e / \partial Y_n)_{\rho, P}$ については内部エネルギー e (J/m³) の代わりに比内部エネルギー u (J/kg) を用いて表した. また, 化学種の保存性を考慮して u を下記(15)式のように表す⁵⁶⁾.

$$u = \sum_{n=1}^N u_n Y_n = \sum_{n=1}^{N-1} (u_n - u_N) Y_n + u_N \quad (15)$$

(15)式を Y_n で偏微分すると(16)式を得る.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial Y_n} \right)_{\rho, P} &= u_n - u_N + \sum_{m=1}^{N-1} \left(\frac{\partial u_m}{\partial Y_n} - \frac{\partial u_N}{\partial Y_n} \right) Y_m + \frac{\partial u_N}{\partial Y_n} \\ &= u_n - u_N + C_v \left(\frac{\partial T}{\partial Y_n} \right)_{\rho, P} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで(16)式の右辺第 3 項は, 状態方程式を用いて

$$\left(\frac{\partial T}{\partial Y_n} \right)_{\rho, P} = -\frac{T}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial Y_n} \right)_{\rho, P} = -\frac{T}{R} (R_n - R_N) \quad (17)$$

となる. ここで, R (J/kg · K) はガス定数であり, $R = \sum R_n Y_n$ である. (16)と(17)式から, (14)式は下記の(18)式となる.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Y_n} \right)_{\rho, e} = -\rho \left(\frac{\partial e}{\partial P} \right)_{\rho, Y}^{-1} \left\{ u_n - u_N - \frac{T}{\gamma - 1} (R_n - R_N) \right\} \quad (18)$$

次に, 保存量 $\Delta \rho$, $\Delta(\rho v_i)$, ΔE , $\Delta(\rho Y_n)$ の時間変化と基本量の時間変化 Δe , ΔY_n を導出する. まず保存量の時間変化は(19)式となる.

$$\begin{aligned} \Delta \rho &= -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \\ \Delta(\rho v_i) &= -\nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) - \frac{\partial P}{\partial x_i} \\ \Delta E &= -\nabla \cdot [(E + P) \mathbf{v}] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\Delta(\rho Y_n) = -\nabla \cdot (\rho v Y_n)$$

次に, Δe は運動量保存則とエネルギー保存則を用いると,

$$\begin{aligned} \Delta e &= \frac{\partial}{\partial t} \left(E - \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \\ &= \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\mathbf{v} \cdot \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right] \\ &= -\nabla \cdot [(E + P) \mathbf{v}] + v_i \left[\nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) + \frac{\partial P}{\partial x_i} \right] - \frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \\ &= \Delta E - v_i \Delta(\rho v_i) + \frac{1}{2} v^2 \Delta \rho \end{aligned} \quad (20)$$

となる. ここで, i については Einstein 規約によって総和を省略した. 次に, ΔY_n は化学種の保存則を用いると(21)式となる.

$$\Delta Y_n = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho Y_n}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho v Y_n) + \frac{Y_n}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (21)$$

さらに, (18)式と(21)式を用いると(9)式の第 3 項は(22)式となる.

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N-1} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial Y_n} \right)_{\rho, e, Y_{m \neq n}} \Delta Y_n \right] \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ -\rho \left(\frac{\partial e}{\partial P} \right)_{\rho, Y}^{-1} \left[u_n - u_N - \frac{T}{\gamma - 1} (R_n - R_N) \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{Y_n}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho v Y_n) \right] \right\} \\ &= - \left(\frac{\partial e}{\partial P} \right)_{\rho, Y}^{-1} \left\{ \left[u - u_N - \frac{T}{\gamma - 1} (R - R_N) \right] \Delta \rho \right\} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \left[u_n - u_N - \frac{T}{\gamma - 1} (R_n - R_N) \right] \Delta(\rho Y_n) \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

ここで, m は n 以外の化学種を表す. 以上を纏めると, (9)式は下記の(23)式となる.

$$\begin{aligned} \Delta P &= \left(\frac{\partial e}{\partial p} \right)_{\rho, Y}^{-1} \left\{ \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{2} v^2 - \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_{\rho, Y} + \left[u - u_N - \frac{T}{\gamma - 1} (R - R_N) \right] \right\} \Delta \rho \right. \\ &\quad \left. - v_i \Delta(\rho v_i) + \Delta E \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \left[u_n - u_N - \frac{T}{\gamma - 1} (R_n - R_N) \right] \Delta(\rho Y_n) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

このように, 圧力の時間変化 ΔP を化学種の輸送 $\Delta(\rho Y_n)$ が考慮された form に PVS を拡張することができた.

3. 数値計算手法

本研究で開発したソルバーは, 流体計算と化学反応計算を分離して時間積分を行う時間分離法を用いている. 流動計算の時間積分には 3 次精度 TVD Runge-Kutta 法を用い, 化学反応計算の時間積分には陰解法ベースの Sparse Solver を使用した. 移流項は基本量を MUSCL 法で補間して高次精度化し, 数値流束を HLLC のスキームで評価している. この HLLC に用いる特性線の音速は, RSST によって抑制された音速を用いた. また, 数値振動を抑えるため minmod 制限関数を利用している. 輸送係数の評価については, 粘性係数に Wilke の半経験式, 熱伝導率に Wassiljewa の式, 拡散係数に Chapman と Cowling の式を用いた. これらの輸送係数の評価は非常に計算負荷が高いため, 化学種バンドル法⁸⁾を用いて高速化した. また, Block structured AMR 法を用いて高速化を行った.

4. 解析条件

本研究では, 図 1 に示す 1 次元の層流火炎伝播を対象とした解析を行い, RSST の効果と計算精度の検証を行った. 燃料には CH₄

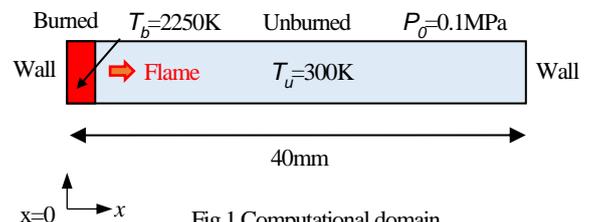


Fig.1 Computational domain

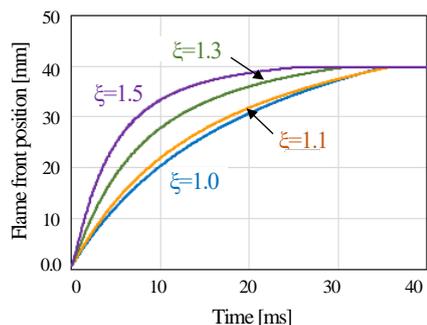


Fig.2 Flame front position history with uniform ξ

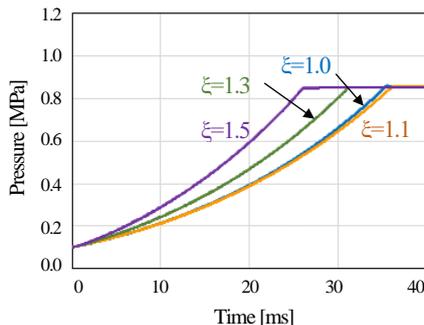


Fig.3 Pressure history with uniform ξ

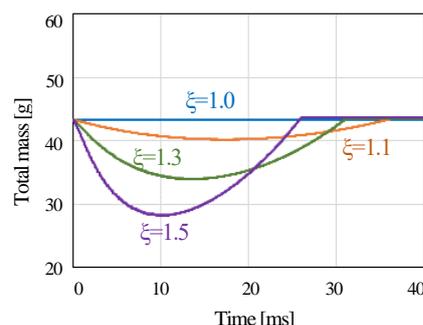


Fig.4 Total mass history with uniform ξ

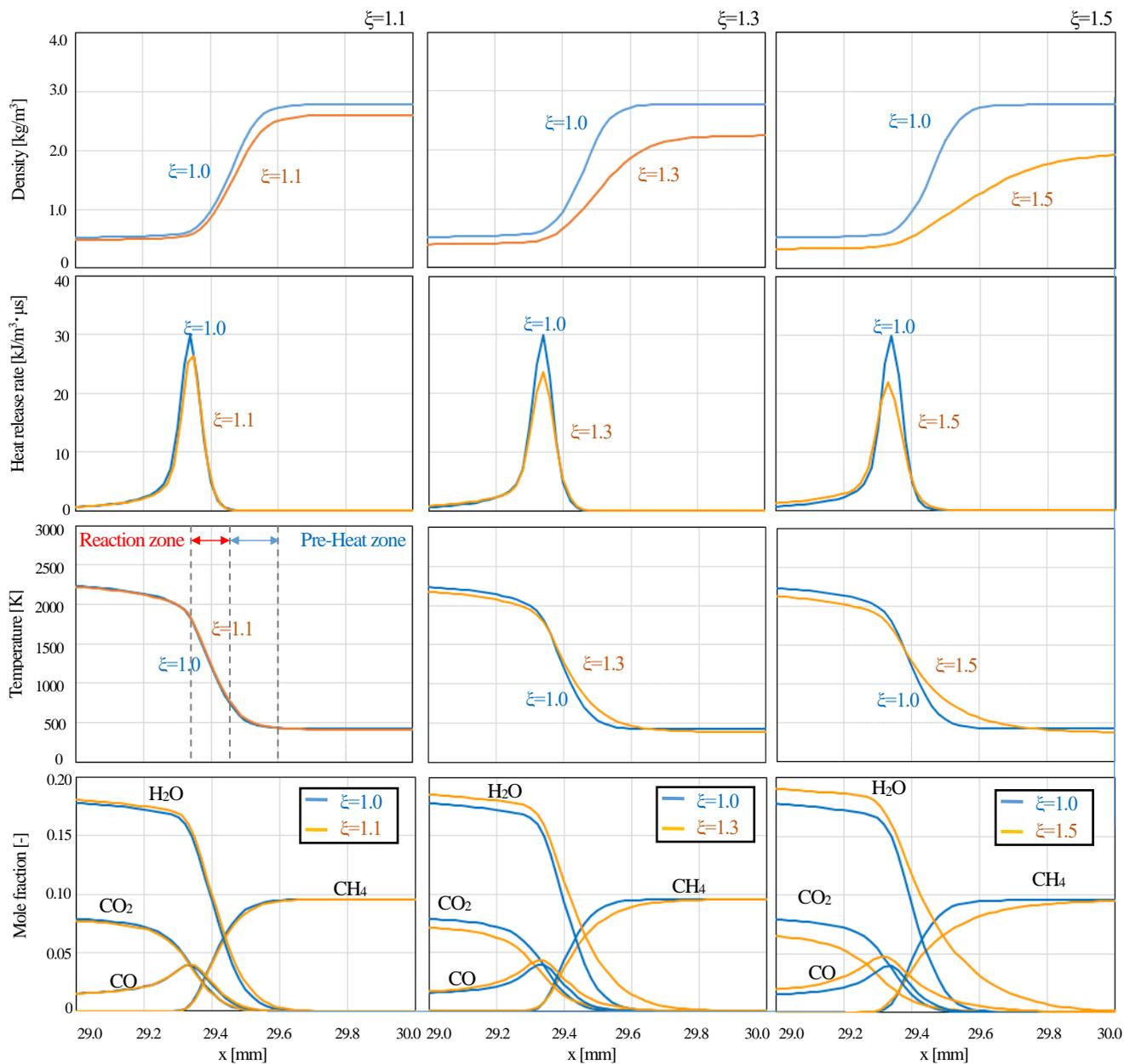


Fig.5 Distribution of density, heat release rate, temperature, mole fraction with uniform ξ

を用い、 $\text{CH}_4/\text{O}_2/\text{N}_2$ の混合気とした。 O_2 と N_2 の体積比は21:79である。混合気の当量比は1.0とし、混合気の初期圧力 P_0 を0.1MPa、初期温度 T_0 を300Kとした。点火は、 $x=0.0\sim 1.0\text{mm}$ の間に2650Kの既燃ガスを与えることで模擬し、火炎伝播を発生させる。メッシュサイズは、火炎面付近のように化学種が急激に変化する場所で $20\mu\text{m}$ となるようにAMRを設定した。時間ステップは音速の

CFL条件が0.8となるように設定した。壁面の境界条件は断熱としている。化学反応機構には、GRI Mechanism Ver3.0 (53化学種, 325反応式)をリダクションしたLuらのskeletalモデル⁹⁾ (30化学種, 184反応式)を用いた。

音速の抑制パラメータ ξ は、空間的に一様とする方法と、空間的に変化させた方法を試行した。

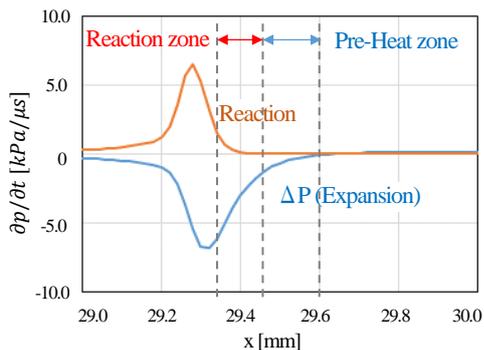


Fig.6 Time variation of pressure at flame zone

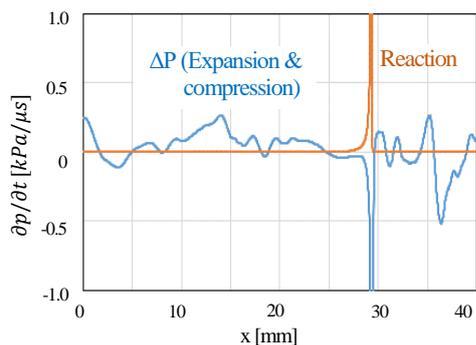


Fig.7 Time variation of pressure

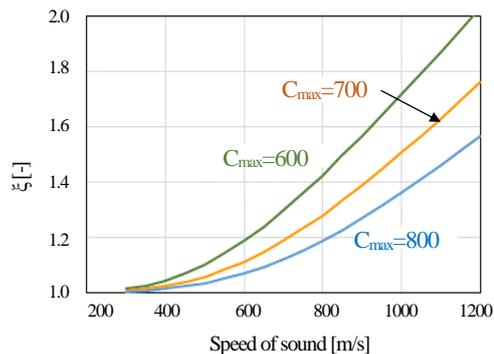


Fig.8 Relation ξ to speed of sound

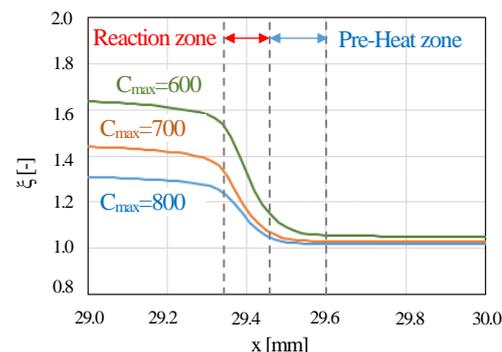


Fig.9 Distribution of ξ at flame zone

5. 解析結果

5. 1 ξ を空間的に一様にした場合

まず、 ξ を空間的に一様とした場合の結果を示す。 ξ は $\xi=1.0, 1.1, 1.3, 1.5$ の 4 パターンとした。ここで、 $\xi=1.0$ は RSST を用いない場合と同等である。まず図 2 に示す火炎面位置の時間変化を見ると、 $\xi=1.1$ の場合は $\xi=1.0$ と大きな差はないが、 ξ の増大に伴って火炎伝播速度が速くなり、圧力の上昇も速くなった。このことから、 ξ の増大によって計算精度が悪化することがわかる。そこで、この要因を調べるため火炎面が 30mm 付近まで進んだ状態の火炎帯の構造を $\xi=1.0$ の場合と比較した。まず、単位体積当たりの熱発生率 dQ を比較すると、 ξ の増大に伴って熱発生率は低下しており火炎伝播速度の関係と逆の傾向となっている。この原因は、容器全体で密度 ρ が ξ の増大に伴って低下しているためと考えられる。また、図 4 に示すように容器内の総質量も ξ の増大に伴って初期の質量から低下していることから、火炎伝播速度が増加した要因は、質量の保存性の悪化による燃焼速度の増大であると考えられる。

次に RSST によって質量の保存性が悪化する要因について考察する。(1)式から、RSST では質量保存則に補正項を付加するため質量の保存性が成立しなくなることがわかる。この RSST による補正項は、 ξ と圧力の時間変化 ΔP が大きいほど影響が強く、質量の保存性を悪化させる。そこで、容器全体の圧力の時間変化 ΔP を調べた。まず、圧力が最も変化すると考えられる火炎帯付近の圧力の時間変化 ΔP は、図 6 に示すように反応帯では化学反応による大きな圧力上昇に匹敵する圧力低下が予熱帯から反応帯にかけて見られた。これは、化学反応による圧力上昇を緩和させる膨張効果である。一方、容器全体の圧力の時間変化 ΔP を見てみると、図 7 に示すように容器全体で圧力が変化していることがわかる。これは、火炎帯で発生した圧力波が容器内を伝播するために発生するものと考えられる。このような現象は、火炎伝播では必ず発生するものである。このため燃焼 CFD に RSST を適用すると、圧力

変化に相当する RSST の補正項が、質量保存式の中で生成項の様に働き、質量保存を著しく悪化させてしまうと考えられる。さらに、図 15 に示す化学種分布を見ると、 ξ の増大によって火炎体内の構造や平衡濃度が著しく悪化する様子が見られる。これも、RSST による補正項の付加によって化学種のバランスが変化した結果であると考えられる。このように、燃焼現象では大きな圧力変化を伴うため、燃焼 CFD に対して音速抑制法を適用するのは原理的に困難であることがわかった。

5. 2 ξ を空間的に変化させた場合

5.1 節で述べた保存性の問題に対応するため、 ξ を空間的に変化させた解析を行った。本研究では先行研究で提案されている ξ の form を利用した。

$$\xi = [1 + (a/C_{max})^4]^{1/4} \quad (24)$$

ここで、 C_{max} は実効音速 a/ξ の上限値を意味し、実効音速 a/ξ は $a \rightarrow \infty$ で C_{max} に漸近する。この form を用いれば、音速に応じて ξ が変化するため音速が小さい低温(未燃)部では ξ を小さく、音速が大きい高温(既燃)部では ξ を大きくすることが可能となる。そのため、図 9 に示すように大きな圧力低下が発生している予熱帯の補正効果のある程度制限できると考えられる。この C_{max} を、本研究では $C_{max}=800, 700, 600$ と設定して解析を行った。この場合の ξ は音速に対して図 8 のように変化する。これを本解析に適用させると、 ξ は火炎帯付近では図 9 のような分布となり、未燃部および火炎帯において ξ を小さくできる一方で、音速が大きい既燃部では ξ を大きくすることが可能となる。これによって、最も圧力の変化が大きい火炎帯付近で質量の保存性が改善されることが期待される。ここで、各 C_{max} に対する ξ の最大値は、 $C_{max}=800$ の場合 $\xi=1.37$ 、 $C_{max}=700$ の場合 $\xi=1.51$ 、 $C_{max}=600$ の場合 $\xi=1.73$ となる。

この ξ を用いた計算結果を図 10~13 に示す。まず図 10~12 の火炎面位置、圧力、全質量の履歴を見ると、 C_{max} が 700 以上では概ね $\xi=1.0$ の場合を再現できており、火炎帯の密度分布や熱発生

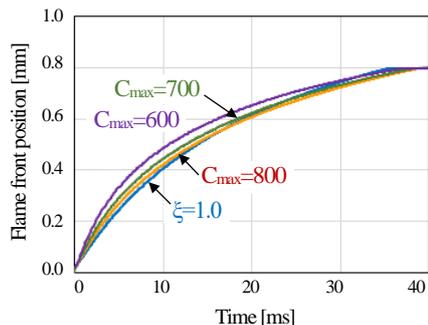


Fig.10 Flame front position history with non-uniform ξ

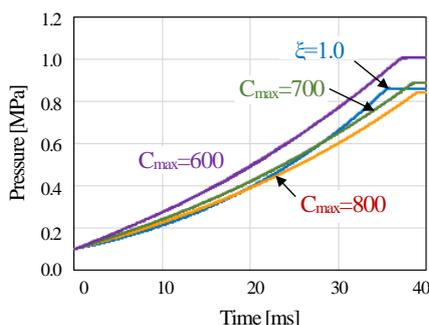


Fig.11 Pressure history with non-uniform ξ

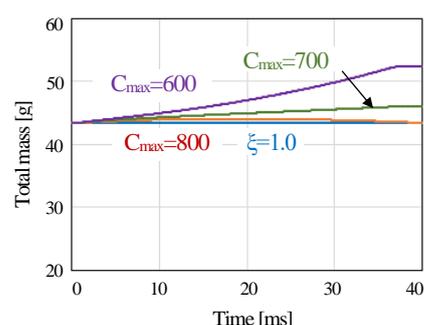


Fig.12 Total mass history with non-uniform ξ

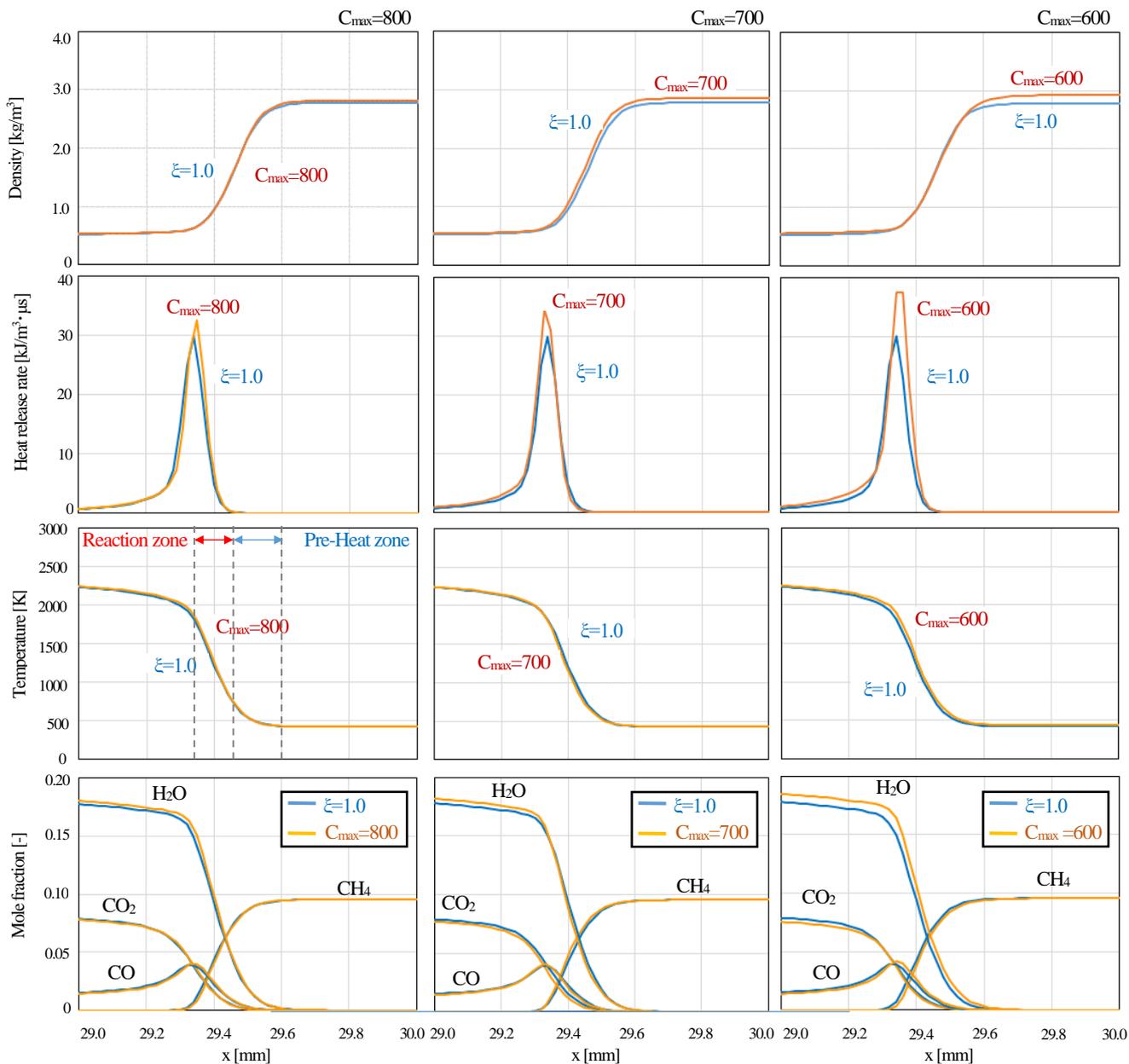


Fig.13 Distribution of density, heat release rate, temperature, mole fraction with non-uniform ξ

率, 化学種分布にも問題がないことがわかる。しかしながら, C_{\max} を 600 まで小さくすると, 火炎伝播速度が $\xi=1.0$ よりも速くなった。これは, ξ が一様の場合と異なり密度分布にさほど誤差がないことを考えると, 熱発生率の増大が原因であると考えられる。この熱発生率の差は化学種の保存性の悪化とそれに伴う化学種のバランスの変化が原因と考えられる。特に ξ が大きいほうが H_2O

の生成量が多く, 発熱量も大きいことを示唆している。また, $C_{\max}=600$ では火炎が壁面に到達した時点の圧力が $\xi=1.0$ よりも大きくなっており, 質量の保存性も悪化している。これは, $C_{\max}=600$ では $C_{\max}=700, 800$ と比べて火炎帯内の ξ が大きくなるためと考えられる。以上のことから, 燃焼 CFD で RSST を用いるためには質量と化学種を保存する手法が必要であると考えられる。

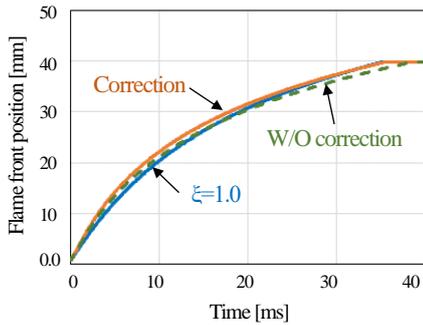


Fig.14 Flame front position history with non-uniform ξ

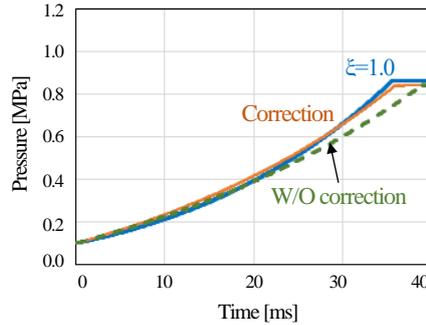


Fig.15 Pressure history with non-uniform ξ

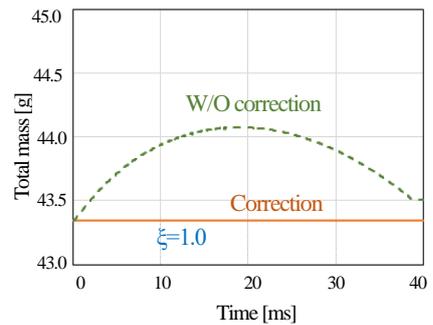


Fig.16 Total mass history with non-uniform ξ

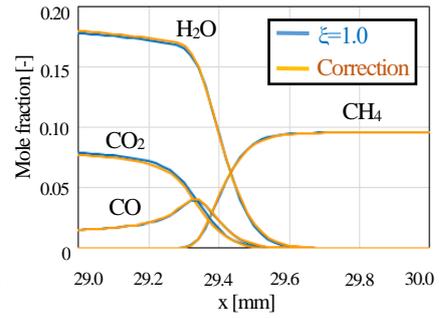
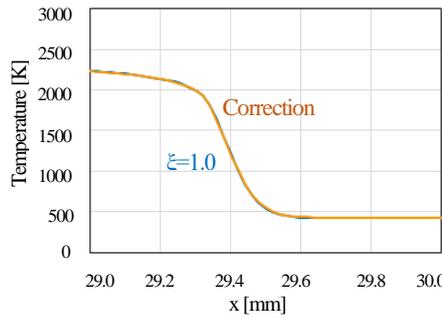
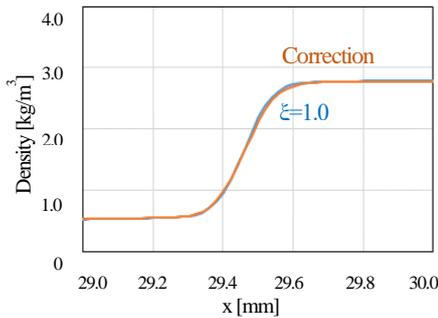


Fig.17 Distribution of density, temperature, mole fraction history with non-uniform ξ ($C_{\max}=800$)

5. 3 質量の保存性を改善する方法の提案

5.1, 5.2 節において, RSST を燃焼 CFD に用いると質量の保存性が悪化する問題があることがわかった。そこで, 近年開発された化学反応計算の高速化技法である, ERENA 法¹⁰⁾の考え方を応用して質量の保存性の改善を試みた。

(1)式から, 全空間領域において Δt 秒間に発生する質量の誤差は, 理論的に(25)式で表すことができる。

$$\Delta M = \Delta t \int_V - \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s \Delta P dV \quad (25)$$

この ΔM を用いて抑制後の密度 ρ と化学種の密度 ρY_n を補正する。

$$\rho' = \frac{1}{1 + \Delta M/M} \rho \quad (26)$$

$$(\rho Y_n)' = \frac{1}{1 + \Delta M/M} \rho Y_n \quad (27)$$

この補正を用いた結果, 図 14,15 に示すように火炎面と圧力履歴に若干の改善が見られ, 図 16 に示すように質量の保存性は改善された。火炎帯付近の様子も $\xi=1.0$ とほぼ一致している。この結果から, 質量の誤差がそれほど大きくない場合にはこのような補正が有効であると考えられる。

6. 結言

燃焼 CFD に音速抑制法を適用させるため, オリジナルの PVS form に対して化学種の輸送に対する圧力の時間変化の効果を追加した form を導いた。この form を用いて 1 次元の火炎伝播解析を実施した結果, ξ が空間的に一様の場合には, ξ の増大に伴って誤差が大きくなった。一方で, ξ を空間的に変化させる方法では, ξ が空間的に一様の場合よりも計算精度が向上した。ただし, 最大実効音速 C_{\max} を小さくしていくと誤差が増大することがわかった。

7. 謝辞

本研究で提案した多成分系の PVS form の導出にあたり, 名古屋大学 宇宙地球環境研究所 飯島 陽久特任助教に助言頂いた。ここに感謝の意を表する。

参考文献

- (1) 林, 久保, 口田, “圧力の輸送方程式に基づいたノック抑制手法の検討,” 第 57 回燃焼シンポジウム講演論文集, (2019)
- (2) Hotta, H., Rempel, M., Yokoyama, T., Iida, Y., Fan, Y., “Numerical Calculation of Convection with Reduced Speed of Sound Technique,” *Astronomy and Astrophysics* 539 A30, (2012)
- (3) Iijima, H., Hotta, H., and Imada, S., “Semi-conservative reduced speed of sound technique for low Mach number flows with large density variations,” *Astronomy and Astrophysics* 622 A157 (2019)
- (4) 棚橋 隆彦, “連続体の力学(2)”, 理工図書: (1986).
- (5) Fedkiw, R. P., Merriman, B., Osher, S., “High Accuracy Numerical Methods for Thermally Perfect Gas Flows with Chemistry,” *JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS* 132, AIAA (1997), pp.175-190
- (6) Shuen, J. S., Liou, M. S., Van Leer, B., “Inviscid flux-splitting algorithms for real gases with non-equilibrium chemistry,” *Journal of Computational Physics* 90 (1990), pp.371-395.
- (7) Toro, E. F., “Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction,” Springer Science & Business Media (2013).
- (8) Lu, T. F., Law, C. K., “Diffusion Coefficient Reduction through Species Bundling,” *Combustion Flame*, Vol.148, No.3 (2007), pp.117-126,
- (9) Lu, T. F., Law, C. K., “A criterion based on computational singular perturbation for the identification of quasi steady state species, A reduced mechanism for methane oxidation with NO chemistry,” *Combustion and Flame*, Vol.154 No.4 (2008), pp.761-774.
- (10) Morii, Y., Terashima, H., Koshi, M., Shimizu, T., Shima, E., “ERENA: A fast and robust Jacobian-free integration method for ordinary differential equations of chemical kinetics,” *Journal of Computational Physics*, Vol.322 (2016), pp. 547-558.
- (11) Adrien, T., “General and exact pressure evolution equation” *Physics Letters A*, 381-44 (2017), pp. 3739-3742