

多成分流体解析における Lagrange 点と MOF 法を用いた 界面再構成法および界面曲率算出法の提案

Interface reconstruction and interface curvature estimation using MOF method with Lagrangian surface points
in multicomponent flow analysis

- 立田 康介, 阪大院, 大阪府吹田市山田丘 2-1, E-mail : tatsuta@fluid.mech.eng.osaka-u.ac.jp
大森 健史, 阪大工, 大阪府吹田市山田丘 2-1, E-mail : t.omori@mech.eng.osaka-u.ac.jp
梶島 岳夫, 阪大工, 大阪府吹田市山田丘 2-1, E-mail : kajisima@mech.eng.osaka-u.ac.jp
Kosuke TATSUTA, Osaka University, 2-1 Yamadaoka, Suita, Osaka, 565-0871 Japan
Takeshi OMORI, Osaka University, 2-1 Yamadaoka, Suita, Osaka, 565-0871 Japan
Takeo KAJISHIMA, Osaka University, 2-1 Yamadaoka, Suita, Osaka, 565-0871 Japan

In the analysis of the multicomponent flow, it is important to find the accurate prediction of fluid acceleration due to interfacial tension. For its prediction, to find interface normal vector and interface curvature is needed. The volume-of-fluid (VOF) method require the volume fraction data of the neighbor computational cells for interface normal vector and interface curvature. It has hindered the application of those methods to the multicomponent flow with more than 3 components. The conventional moment-of-fluid (MOF) method reconstruct piecewise linearly from only one computational cell the volume fraction and centroids data. So, it is possible to find interface normal vector from only one cell, but data of the neighbor computational cells is required for interface curvature. The present study proposes a MOF interface reconstruction with fitting ellipsoid, which enables not only the interface reconstruction but also the interface curvature estimation on the local computational cell with high accuracy.

1. 緒言

互いに混じり合わない多成分流体解析において界面張力に起因する流体加速度への寄与を正確に求めることは重要な課題であり、Navier-Stokes 方程式への付加項の離散形式として様々なものが提案されている。界面張力に起因する流体加速度を求めるためには、界面の外向き単位法線ベクトルおよび平均曲率を求める必要があり、これらを精度よく求めることが重要である。

多成分流体解析において界面を表現する方法として、本研究では各成分についてそれぞれで体積の保存則を満たすことができる Moment-of-Fluid (MOF) ⁽¹⁾ 法を基礎とした方法を提案する。MOF 法は各計算セルにおける各流体成分の体積率に加えて重心座標を界面の再構成に用いる方法で、Volume-of-Fluid (VOF) ⁽²⁾ 法を一般化したものと考えられる。MOF 法では VOF 法と異なり、界面法線ベクトルを求める際に周囲計算セルの情報を参照する必要がないため、多成分流体解析で現れるような複数の界面が存在する計算セルにおける界面再構成を精度よく行うことができる。一方で、従来の MOF 法では界面を平面（二次元では直線）で再構成するため、界面曲率の算出においては VOF 法と同様に多数の周囲計算セルを参照する必要があり、精度良く求めることができないという問題があった。そこで、本研究では、MOF 法に界面を追跡する Lagrange 点を活用することにより平面ではなく二次曲面で界面を再構成し、界面の平均曲率についても単一の計算セルの体積率、重心座標の参照で高精度に算出することを可能とした。

昨年度の講演 ⁽³⁾ では提案手法の二成分が存在する計算セルにおける界面再構成の検証問題への適用結果について述べたが、本講演では手法の詳細と多成分が存在する計算セルにおける界面再構成および大変形する界面の動的な再構成問題における検証結果を報告する。

2. 数値計算法

2.1 基礎方程式

各相の流体は非圧縮 Newton 流体とし、全領域で以下の連続の式および運動量保存式にしたがう。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [\mu \{ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \}] + \mathbf{a}_s + \mathbf{g} \quad (2)$$

t は時間、 \mathbf{v} は流体の速度、 p は静圧、 \mathbf{g} は重力加速度、 ρ は流体の密度、 μ は流体の粘度であり、界面張力に起因する流体加速度は \mathbf{a}_s と表している。

各計算セルにおける密度、粘度は

$$\rho = \sum_{i=1,N} F_i \rho_i \quad (3)$$

$$\mu = \sum_{i=1,N} F_i \mu_i \quad (4)$$

とする。ここで、各成分の体積率を F_i 、密度を ρ_i 、粘度を μ_i とし、成分の総数を N とした。

界面張力に起因する流体加速度は以下のようなになる。

$$\mathbf{a}_s = \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_s \delta_s \quad (5)$$

ここで δ_s は界面上を原点とし、原点における界面の法線ベクトル方向に座標 n をとった時、 $\delta_s(n)$ で表される 1 次元デルタ関数である。このとき、 $\mathbf{f}_s \delta_s$ は

$$\mathbf{f}_s \delta_s = \sigma \kappa \mathbf{n} \delta_s \quad (6)$$

となる。ここで、 σ は界面張力係数、 κ は平均曲率、 \mathbf{n} は単位法線ベクトルである。

2.2 時間発展方法

以下に時刻 t^n から t^{n+1} に時間刻み Δt だけ方程式系を時間積分する手順を示す。ここで n は時間ステップ数である。

- (1) 各成分の体積率および重心位置については Lagrangian Explicit (LE) 法 ⁽⁴⁾ を、各 Lagrange 点については 1 次 Euler 陽解法を用い、移流をそれぞれ行う。

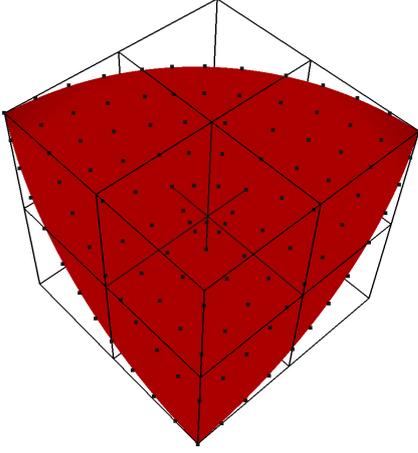


Fig. 1: The example of arrangement of Lagrange points.

- (2) 3 節で詳述する方法で界面を再構成し，再構成した界面上に Lagrange 点を再配置する．
- (3) 式 (3) および式 (4) から ρ^{n+1} および μ^{n+1} を求める．
- (4) 式 (5), (6) から界面張力に起因する流体加速度 \mathbf{a}_s を求める．
- (5) 圧力項を除いた式 (2) の離散式から部分段階速度 \mathbf{v}^F を計算する．
- (6) 圧力方程式

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^{n+1}} \nabla p^{n+1} \right) = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^F \quad (7)$$

を解き，得られた p^{n+1} を用いて以下のように部分段階速度を修正することで，式 (1) を満たす速度 \mathbf{v}^{n+1} を得る．

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^F - \frac{\Delta t}{\rho^{n+1}} \nabla p^{n+1} \quad (8)$$

本研究では界面の再構成および曲率計算の方法について議論するため，以上の手順のうち (1) から (4) を対象とする．

3. 界面再構成法

界面再構成は以下の手順で行い，それぞれ 3.1 節と 3.2 節にて詳述する．

- (1) 界面セルとその周囲の $3 \times 3 \times 3$ の計算セルにある移流された Lagrange 点 (Front) から楕円面をフィッティングする．Lagrange 点の配置方法の一例を Fig. 1 に示す．形状は半径が 2.0 格子幅の球面とし，球面を赤色，配置した Lagrange 点を黒色の点で示し，対称性を考慮して球面の 8 分の 1 のみを表示している．
- (2) フィッティングされた楕円面を移流された体積率の保存を満たし，さらに重心位置の誤差が最小となるように MOF 法により平行移動させる．

3.1 楕円面のフィッティング

二次曲面の式は以下のようにかける．

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx + gx + hy + iz + j = 0 \quad (9)$$

行列表記すると

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d/2 & f/2 \\ d/2 & b & e/2 \\ f/2 & e/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + j = 0 \quad (10)$$

左辺第一項の行列を Q とする．このとき，二次曲面の分類は Q のみで決まる．本研究では二次曲面の分類のうち楕円面に限定する．楕円面となるための条件は Q の固有値がすべて正または負となるときである． Q の固有方程式は

$$\lambda^3 - \alpha\lambda^2 + \beta\lambda - \gamma = 0 \quad (11)$$

である．ただし，

$$\alpha = a + b + c \quad (12)$$

$$\beta = ab + bc + ca - \frac{1}{4}(d^2 + e^2 + f^2) \quad (13)$$

$$\gamma = abc + \frac{1}{4}(def - be^2 - cd^2 - af^2). \quad (14)$$

このとき，式 (11) の解がすべて正または負となる条件は

$$\beta > 0 \quad (15)$$

$$\alpha\gamma > 0 \quad (16)$$

である．式 (15) を満たすように

$$\beta = 3 \quad (17)$$

と規定しても一般性は失われない． c について解くと

$$c = \frac{-ab + \frac{1}{4}(d^2 + e^2 + f^2) + 3}{a + b}. \quad (18)$$

となる．式 (16) については以下で述べる．式 (17) の条件の下，最小自乗法により楕円面をフィッティングする．これは以下の S_1 を最小化する問題となる．

$$S_1 = \sum_{i \in \text{Front}} (ax_i^2 + by_i^2 + cz_i^2 + dx_iy_i + ey_iz_i + fz_ix_i + gx_i + hy_i + iz_i + j)^2 + \sum_{i \in \text{Front} + \text{Vertex}} P_i \quad (19)$$

右辺第二項のペナルティー関数については 3.1.1 節で述べる． S_1 の最小化には準ニュートン法を用いる．ただし，式 (16) を満たすために，各反復ステップにおいて，Armijo のステップサイズのルールを満たすように直線探索をする際に，式 (16) を満たしていることを条件とする．また，準ニュートン法では，初期値が必要となるが，これについては 3.1.2 節で述べる．

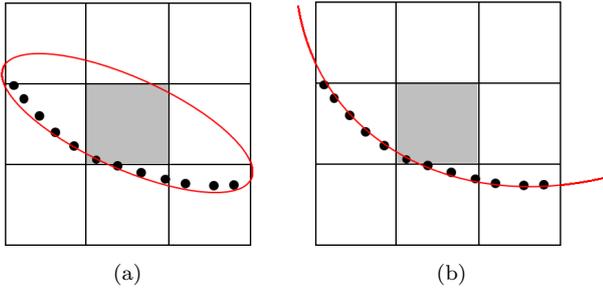


Fig. 2: The example of result of fitting.

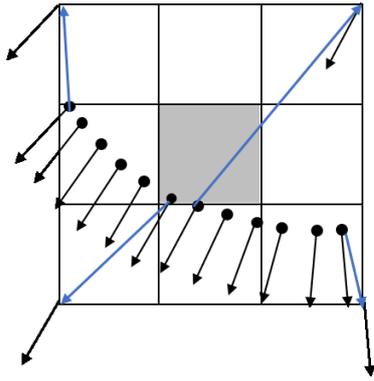


Fig. 3: The example of defining unit normal vector of vertex of fitting domain.

3.1.1 ペナルティー関数

S_1 は複数の局所最適解をもち、収束した解がどの局所最適解であるかは初期値に依存する。その中でも Fig. 2 に黒色の点で示した移流された Lagrange 点の分布に対して (a) と (b) の赤色の線で示したフィッティングの結果は明確に区別する必要がある。そのために、各 Lagrange 点の 1 時間ステップ前の単位法線ベクトルを用いる。界面セルとその周囲の $3 \times 3 \times 3$ の計算セルの頂点での単位法線ベクトルを各頂点から最も近い Lagrange 点の 1 時間ステップ前の単位法線ベクトルと定義し、一例を Fig. 3 に示す。このとき、Fig. 4 に、定義された単位法線ベクトルを黒色の矢印、楕円面の式から求められる単位法線ベクトルを赤色の矢印で示す。これらと比較することで、Fig. 2 (a) と (b) は明確に区別することができる。以上の考察から、定義された単位法線ベクトルと楕円面の式から求められる単位法線ベクトルのなす角を θ_i として、ペナルティー関数を以下のように定義する。

$$P_i = \begin{cases} 0 & (\theta_i \leq \frac{\pi}{2}) \\ 10^3(1 + \cos(2\theta_i)) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

3.1.2 初期値

初期値については 3 つの候補を用いる。

- (1) 線形最小自乗法を用いた球面のフィッティング
球面のフィッティングは以下の S_2 を最小化する問題となる。

$$S_2 = \sum_{i \in \text{Front}} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + Ax_i + By_i + Cz_i + D)^2 \quad (20)$$

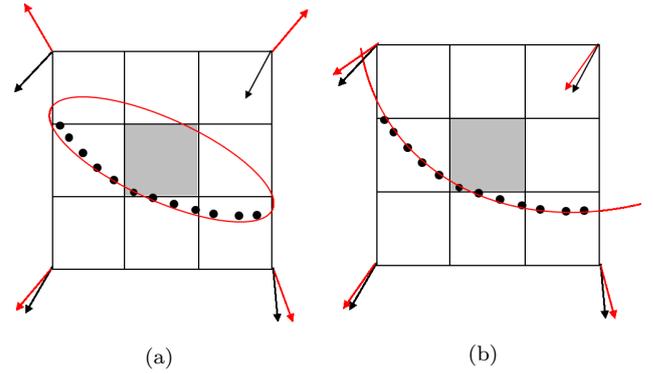


Fig. 4: The example of difference of unit normal vector.

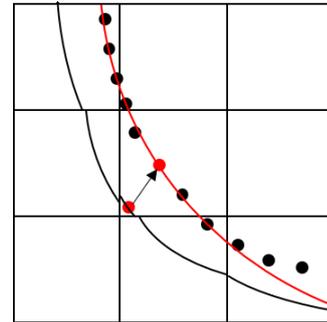


Fig. 5: The example of initial value of ellipsoid fitting.

S_2 の括弧内は係数に対して線形であるため線形最小自乗法を用いる。

- (2) 平均曲率が小さな球面

平均曲率が小さい場合、(1) では精度よくフィッティングすることができない。そのため、平面のフィッティングを利用して平均曲率が小さな球面を作成し、初期値の候補とする。平面のフィッティングは以下の S_3 を最小化する問題となる。

$$S_3 = \sum_{i \in \text{Front}} (Ax_i + By_i + Cz_i + 1)^2 \quad (21)$$

S_3 の括弧内も係数に対して線形であるため線形最小自乗法を用いる。平面の式は式 (17) を満たさないため、楕円面をフィッティングする際の初期値としてそのまま用いることはできない。そのため、格子中央に最も近い Lagrange 点を通り、その点で単位法線ベクトルがフィッティングした平面に一致する、半径が領域の 1 辺の長さの球面をフィッティングの初期値とする。

- (3) 前のステップの情報を用いる

上記の 2 つの候補は球面であるために、2 つの主曲率が大きく異なる楕円面の場合に準ニュートン法の収束が遅い。そこで、1 時間ステップで大きく界面は変形しないことに着目する。まず、移流された Lagrange 点のうちもっとも格子中央に近い Lagrange 点を探る。そして、その Lagrange 点が 1 時間ステップ前に属していた界面の式をその Lagrange 点が移流された量だけ平行移動させ、初期値とする。一例を Fig. 5 に示す。移流された Lagrange 点のうち格子中央にもっとも近い Lagrange 点を赤色の点、その他を黒色の点で示している。また、1 時間ステップ前の再構成された界面を黒色の線、格子中央にもっとも

Tab. 1: Interface reconstruction test for 2 componets (Sec. 4.1.1).. The numerical error was evaluated by Eq. (24), (25)

	$L_{n,2}/\sqrt{N}$	$L_{n,\infty}$
MYC	1.00×10^{-1}	1.26×10^{-1}
MOF	2.71×10^{-2}	4.02×10^{-2}
Present	1.12×10^{-2}	3.57×10^{-2}

Tab. 2: Interface reconstruction test for 2 componets (Sec. 4.1.1). The numerical error was evaluated by Eq. (26), (27)

	$L_{\kappa,2}/\sqrt{N}$	$L_{\kappa,\infty}$
Difference	1.36×10^0	2.37×10^0
Present	4.08×10^{-2}	8.15×10^{-2}

も近い Lagrange 点が 1 時間ステップ前に属していた界面を平行移動したものを赤色の線で示している。

3 つの初期値の候補のうち S_1 が最も小さいものを初期値として採用する。

3.2 MOF 法による平行移動

3.1 節でフィッティングした楕円面と格子に囲まれた領域は移流された体積率の保存則を満たしていない。そこで、これを満たし、さらに移流された重心位置の誤差を最小化するようにフィッティングした楕円面を平行移動させる。ここで、移流された参照相の体積率と重心位置を F_{ref} , $\mathbf{x}_{\text{ref}}^{\text{cent}}$, 格子幅を h , 楕円面を平行移動させる距離を各座標方向にそれぞれ Δx , Δy , Δz , 平行移動させた楕円面と格子に囲まれた領域の体積率と重心位置を $F(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, $\mathbf{x}^{\text{cent}}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ とすると以下の最適化問題となる。

$$\begin{cases} \min & E_{\text{MOF}} = \|\mathbf{x}^{\text{cent}}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) - \mathbf{x}_{\text{ref}}^{\text{cent}}\|_2 \\ \text{s.t.} & |F(\Delta x, \Delta y, \Delta z) - F_{\text{ref}}| = 0 \\ & -h^2 \leq \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \leq h^2 \end{cases}$$

上式を制約条件付き最適化問題において高速な解法であると知られている逐次二次近似法を用いて解く。二次計画問題には有効制約法を用いる。

4. 検証計算

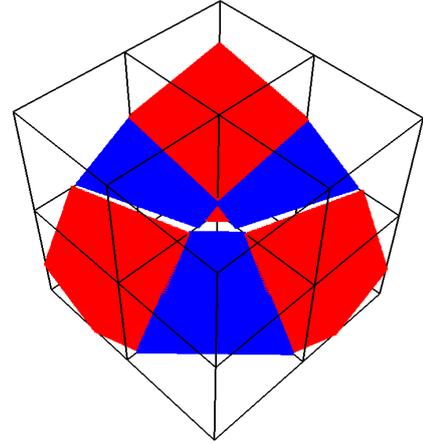
4.1 界面再構成法の精度検証

ここでは 2 成分のみが存在する場合と 3 成分が存在する場合について既知の形状の体積率などの情報から界面を再構成し、界面再構成法の精度検証を行う。

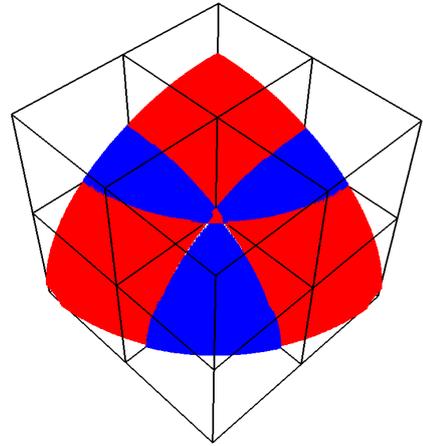
4.1.1 2 成分

単位法線ベクトルの算出には一般的な VOF 法で用いられる Mixed-Youngs-and-Centered (MYC) 法⁽⁵⁾, MOF 法, 提案手法を用いた。また, 界面曲率の算出には体積率の勾配を陽に用いる方法 (Difference), 提案手法を用いた。体積率の勾配を陽に用いる方法は以下の関係式を用いる方法である。

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (22)$$



(a) MOF



(b) Present

Fig. 6: Reconstructed surface for 2 components (Sec. 4.1.1).

$$\kappa = -\nabla \cdot \mathbf{n} \quad (23)$$

ここで F は体積率である。単位法線ベクトルに対して $L_{n,2}/\sqrt{N}$, $L_{n,\infty}$, 平均曲率に対して $L_{\kappa,2}/\sqrt{N}$, $L_{\kappa,\infty}$ を以下のように定義することで定量的に検証を行った。

$$\frac{L_{n,2}}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i \in \text{InterfacialCell}} |\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{ai}|^2}{N}} \quad (24)$$

$$L_{n,\infty} = \max_{i \in \text{InterfacialCell}} |\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{ai}| \quad (25)$$

$$\frac{L_{\kappa,2}}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i \in \text{InterfacialCell}} \left| \frac{\kappa_i - \kappa_{ai}}{\kappa_{ai}} \right|^2}{N}} \quad (26)$$

$$L_{\kappa,\infty} = \max_{i \in \text{InterfacialCell}} \left| \frac{\kappa_i - \kappa_{ai}}{\kappa_{ai}} \right| \quad (27)$$

ここで, N は界面セルの個数, \mathbf{n}_{ai} は単位法線ベクトルの解析解, \mathbf{n}_i は再構成された界面から求めた単位法線ベクトル, κ_{ai} は平均曲率の解析解, κ_i は再構成された界面から求めた平均曲率であり, 界面セルの集合を InterfacialCell と表記した。単位法線ベクトル, 平均曲率は格子中央で

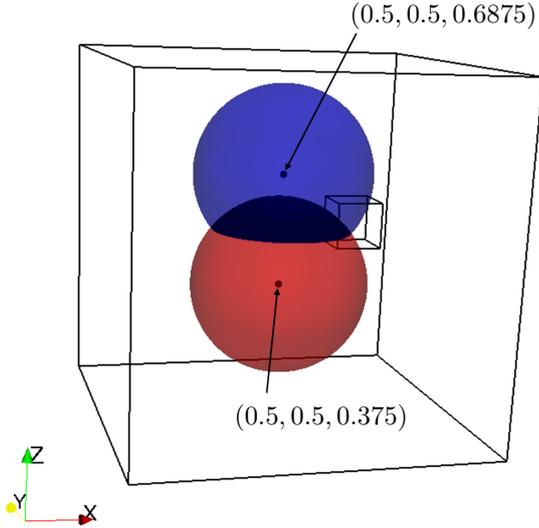


Fig. 7: The analytical solution of interface reconstruction test for 3 components (Sec. 4.1.2).

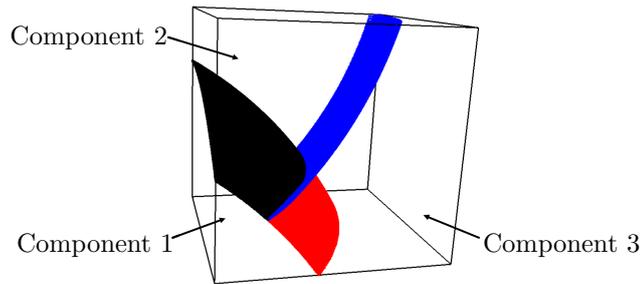


Fig. 8: The analytical solution of interface reconstruction test for 3 components in the computational cell (6, 4, 5) (Sec. 4.1.2).

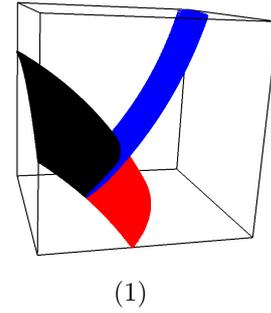
界面の式から算出した。検証対象は領域 $1.0 \times 1.0 \times 1.0$, 格子数 $4 \times 4 \times 4$ に対し以下の式で表される楕円面とした。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (28)$$

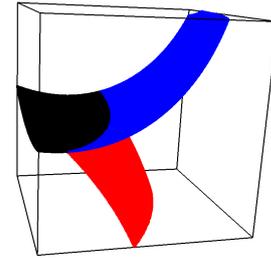
ただし, $a = 0.5$ (2.0 格子), $b = 0.5$ (2.0 格子), $c = 0.375$ (1.5 格子) とした。Fig. 6 に再構成した界面を属している界面のセルによって異なる色で表しており, 対称性を考慮して 8 分の 1 のみ表示している。提案手法では MOF 法と比較すると, 平面ではなく二次曲面で界面を再構成しているため, 界面の不連続が小さく, 精度よく界面が再構成できていることがわかる。単位法線ベクトルに対して, Tab. 1 に各手法における誤差をまとめており, 提案手法では MYC 法や MOF 法よりも精度よく界面を再構成出来ていることがわかる。また, 平均曲率に対して, Tab. 2 に各手法における誤差をまとめており, 提案手法では体積率の勾配を陽に用いる方法よりも精度よく平均曲率の算出が出来ていることがわかる。

4.1.2 3 成分

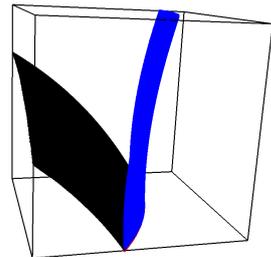
検証対象は Fig. 7 に示すような 2 つの曲面が交わった形状で, 領域 $1.0 \times 1.0 \times 1.0$, 格子数 $8 \times 8 \times 8$ に対して中



(1)



(2)



(3)

Fig. 9: Reconstructed surface for 3 components (Sec. 4.1.2).

心 $(0.5, 0.5, 0.375)$, 半径 0.25 (2.0 格子) の球面の内側を成分 1, 中心 $(0.5, 0.5, 0.6875)$, 半径 0.25 (2.0 格子) の球面の内側を成分 2, 重なり合っている部分は成分 1 とし, それ以外の部分は成分 3 とした。成分 1 と成分 2 の界面を黒色, 成分 2 と成分 3 の界面を青色, 成分 3 と成分 1 の界面を赤色で示している。また, 示している計算セルは 3 成分が存在する計算セル (6, 4, 5) であり, 以下ではこの計算セルにのみ着目する。単位法線ベクトルに対して以下のように誤差を定義することで定量的に検証を行った。

$$E = |\mathbf{n} - \mathbf{n}_a| \quad (29)$$

ただし, \mathbf{n}_a は単位法線ベクトルの解析解, \mathbf{n} は再構成された界面から求めた単位法線ベクトルである。解析解を Fig. 8 に示し, 計算結果を Fig. 9 に示す。また, それぞれの界面での単位法線ベクトルの誤差 E を Tab. 3 に示す。ただし, 成分 1 を始めに再構成する場合を (1), 成分 2 を始めに再構成する場合を (2), 成分 3 を始めに再構成する場合を (3), 成分 1 と成分 2 の界面を Interface 1, 成分 2 と成分 3 の界面を Interface 2, 成分 3 と成分 1 の界面を Interface 3 と表記した。Fig. 9 および Tab. 3 より, (1) では再構成する順番が正しく, 精度良く界面を再構成できていることがわかる。しかし, 再構成の順番が正しくない (2) や (3) の場合には, 精度良く界面を再構成する

Tab. 3: Interface reconstruction test for 3 components (Sec. 4.1.2). The numerical error E was evaluated by Eq. (29).

	Interface 1	Interface 2	Interface 3
(1)	3.41×10^{-10}	5.83×10^{-9}	4.15×10^{-10}
(2)	8.77×10^{-1}	4.92×10^{-1}	2.46×10^{-2}
(3)	1.38×10^{-4}	5.93×10^{-1}	2.06×10^{-1}

Tab. 4: The sum of S_1 of interface reconstruction test for 3 components (Sec. 4.1.2).

	S_1
(1)	7.48×10^{-28}
(2)	2.63×10^1
(3)	1.41×10^1

ことができおらず、固気液三相流への拡張を考えた場合に重要である、接触線位置や接触角を精度良く求めることができている。そのため、界面再構成を行う順番が重要である。Tab. 4 にそれぞれの順番でのフィッティングにおいて最小化する式 (19) の S_1 の合計を示す。正しい順番である (1) では S_1 の合計が (2), (3) と比べ小さくなっている。以上より、提案手法においては、 S_1 の合計がもっとも小さい順番を界面再構成を行う順番とする。

4.2 変形を伴う移流を行う場合の精度検証

ここでは時刻 $t = 0$ での球形界面が時刻 $t = T$ で元の位置に戻る速度場を与えることによって、界面再構成法と界面移流法の誤差評価を行う。よって、界面の形状保存誤差として

$$E = \sum \Delta^3 |F_{i,j,k}^T - F_{i,j,k}^0| \quad (30)$$

と定義する。ここで Δ は格子幅、 F は各計算セルにおける体積率であり、総和は全領域に対してとる。速度場としては以下のように与えることによって界面の変形を伴う移流を行う⁽⁶⁾。

$$u(x, y, z, t) = 2 \sin^2(\pi x) \sin(2\pi y) \sin(2\pi z) \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \quad (31)$$

$$v(x, y, z, t) = -\sin(2\pi x) \sin^2(\pi y) \sin(2\pi z) \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \quad (32)$$

$$w(x, y, z, t) = -\sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \sin^2(\pi z) \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \quad (33)$$

このとき、時刻 $t = T/2$ で最大の変形となる。計算条件は領域 $1.0 \times 1.0 \times 1.0$ 、格子数 $100 \times 100 \times 100$ 、初期の球形気泡直径 0.3 (30.0 格子)、初期の球形気泡中心座標 (0.35, 0.35, 0.35)、CFL 数 0.5、 $T = 3.0$ とする。検証は界面捕獲法である提案手法、MOF 法と界面追跡法 (4 次 Runge-Kutta 法) で行う。速度が規定された移流を伴う検証問題においては、界面追跡法では数値積分法の誤差しか含まず、界面捕獲法よりも精度がよいと考えられる。時刻 $t = T/2$ における界面の様子を Fig. 10 に、もっとも変形が大きい $0.41 \leq z \leq 0.49$ のみを Fig. 11 に示す。それぞれ提案手法で再構成した界面を赤色、MOF 法で再

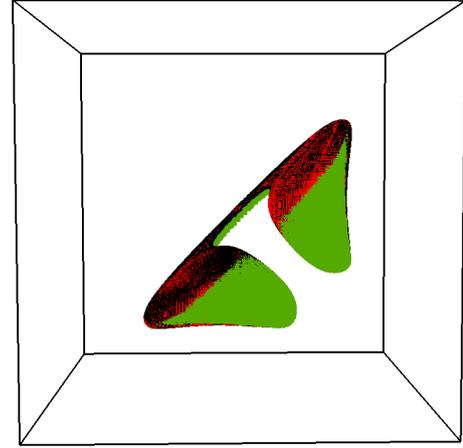


Fig. 10: Interface advection test with deformation (Sec. 4.2) at $t = T/2$.



Fig. 11: Interface advection test with deformation (Sec. 4.2) at $t = T/2$. The box is a grid.

成した界面を緑色、4 次 Runge-Kutta 法で追跡した界面を黒色で示している。Fig. 11 では、ある成分の厚さが 1 格子幅程度となった場合に、提案手法と MOF 法を比較すると界面位置、界面形状が大きく異なっており、界面追跡法と比較すると、提案手法のほうが MOF 法よりも精度よく界面を表現できている。これは、Fig. 10 より、界面再構成の条件が厳しいある成分の厚さが 1 格子幅程度となる部分以外では、提案手法、MOF 法ともに精度よく界面再構成できているため、移流法よりも界面再構成法の誤差が支配的であり、このような厳しい条件でも提案手法では精度よく界面再構成ができているためであると考えられる。また、時刻 $t = T$ における界面の様子を Fig. 12 に、式 (30) による誤差評価を Tab. 5 に示す。誤差評価としては MOF 法のほうが精度がよい。これは提案手法では球形界面の内部にも体積率分布が存在しているからである。しかし、Fig. 12 より実際の流体解析で問題となる分離された界面が提案手法のほうが少ないことがわかる。

5. 結言

多成分流体解析においても界面曲率を高精度に算出するために、MOF 法に Lagrange 点を活用し、二次曲面で界面を再構成することによって、単一のセルの体積率と重心位置の参照のみで界面再構成だけでなく、界面曲率の算出も可能である手法を開発した。

検証問題では、二成分のみが存在する場合において、既存の手法よりも界面再構成、界面曲率の算出を精度よく行えることを示した。また、三成分が存在する場合には再構成の順番が重要であり、正しい順番で再構成した場合には、精度よく界面再構成を行えることを示し、提案手法において正しい順番を採用できる手法を開発した。

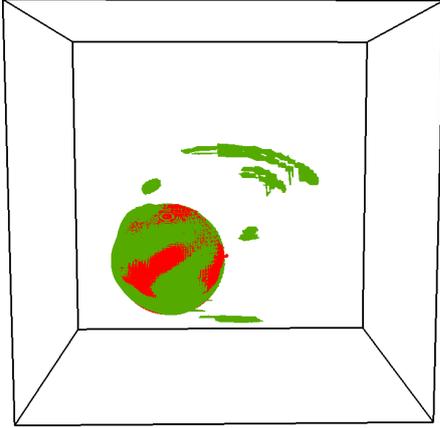


Fig. 12: Interface advection test with deformation (Sec. 4.2) at $t = T$.

Tab. 5: Interface advection test with deformation (Sec. 4.2). The numerical error was evaluated by Eq. (30).

	E
MOF	9.39×10^{-4}
Present	3.63×10^{-3}

参考文献

- (1) V. Dyadechko and M. Shashkov., “Moment-of-fluid interface reconstruction,” Technical report LA-UR-05-7571, Los Alamos National Laboratory, (2005).
- (2) C. W. Hirt and B. D. Nichols., “Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries,” *Journal of Computational Physics*, 39(1), (1981), pp.201–225.
- (3) 立田, 大森, 藤井, 梶島, “二次曲面による MOF 法の提案: 単一セル情報に基づく界面再構成および界面曲率計算,” 第 32 回数値流体力学講演論文集, (2018).
- (4) D. Gueyffier, J. Li, A. Nadim, R. Scardovelli, and S. Zaleski., “Volume-of-Fluid Interface Tracking with Smoothed Surface Stress Methods for Three-Dimensional Flows,” *Journal of Computational Physics*, 152(2), (1999), pp. 423–456.
- (5) E. Aulisa, S. Manservigi, R. Scardovelli, and S. Zaleski., “Interface reconstruction with least-squares fit and split advection in three-dimensional Cartesian geometry,” *Journal of Computational Physics*, 225(2), (2007), pp. 2301–2319.
- (6) R. J. Leveque., “High-resolution conservative algorithms for advection in incompressible flow,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(2), (1996), pp.627–665.