

# FEM 流れソルバーにおけるオーバーセット手法の改良

山出吉伸, 加藤千幸, 渡邊啓悦

- 山出吉伸, みずほ情報総研, 東京都千代田区神田錦町, yoshinobu.yamade@mizuho-ir.co.jp  
 加藤千幸, 東大生研, 東京都目黒区駒場 4-6-1, ckato@iis.u-tokyo.ac.jp  
 渡邊啓悦, 荏原, 神奈川県藤沢市本藤沢 4-2-1, watanabe.hiroyoshi@ebar.com  
 Yoshinobu YAMADE, Mizuho Information & Research Institute,  
 Inc., 2-3 Kanda-Nishiki-cho, Chiyoda-ku, Tokyo 101-8443, Japan  
 Chisachi KATO, Institute of Industrial Science, The University of Tokyo,  
 4-6-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153-8505, Japan  
 Hiroyoshi WATANABE, Ebara Corp., 4-2-1 Honfujisawa, Fujisawa-shi, Kanagawa, 251-8502, Japan

Overset method implemented to finite-element-method (FEM) based flow solver for large eddy simulation (LES) was improved for higher rate of convergence and lower numerical errors. In the improved method, pressure is implicitly interpolated in a matrix solver for solving continuity equation with an additional term to guaranty continuity of velocity field at overset boundary. The method was tested in LES of internal flow of a centrifugal pump which composed of 12 impeller blades with a diameter of 318 mm. The accuracy of LES were evaluated by comparing predicted results of pump performance, torque power and discharge flow rate with those measured.

## 1. はじめに

ターボ機械内部流れに代表されるような、移動境界を伴う流れの計算に対する手法としてオーバーセット手法が広く使われている。オーバーセット手法は独立した計算格子をオーバーラップさせ、計算実行中にお互いの情報を交換することにより全体として連なった計算を実現する。オーバーセット法は幅広い計算対象に対し研究成果が報告されているが、圧縮性流体と非圧縮性流体では、注力する点が異なる。圧縮性流体の分野では、音(波)の伝播が計算対象になる場合があることから、オーバーセット境界で生じる散逸エラー、分散エラーを極力小さくすることが重要視されており、これを実現するためにオーバーセット境界における補間処理の高精度化に関する論文が多く報告されている[1-5]。一方、非圧縮性流体の分野ではオーバーセット境界における質量保存をいかに満足するかが重要であり、オーバーセット境界で流量保存を満足する保存型の手法が提案されている[6, 7]。また、非保存型であっても、Volknerらは流量エラーに応じた速度補正を加えることにより、オーバーセット境界における流量誤差およびこれに起因する圧力変動を抑制できることを報告している[8]。

本稿の筆者の一人である加藤は、乱流を高精度に予測できる large eddy simulation (LES) をベースとする、流れ解析コード (FrontFlow/blue, 以下 FFB) を開発し、オーバーセット手法を用いてターボ機械内部の流れ解析を実施した[9, 10]。FFB はこれまで、種々のターボ機械内部流れに適用され、非設計点における複雑な流動や空力騒音等、乱流現象の予測や解明に対する LES の有用性が示された[11-15]。本稿では、FFB に実装されるオーバーセット手法の課題および改良手法を示すとともに、改良したオーバーセット手法の検証として、遠心ポンプ内部流れの LES 解析について報告する。

## 2. 計算手法

### 2.1 基礎方程式

本研究で使用する流れ解析コード FFB は乱流現象を高精度に予測することができる LES をベースとする有限要素法流れ解析コードである。本コードは空間フィルタ操作を施された速度  $u_i$  および静圧  $p$  に対する非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式 (1) を連続の式とともに解く。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu + \nu_{SGS}) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (式1)$$

ここで、 $\nu_{SGS}$  は渦動粘性係数であり、式 (2) で計算される。

$$\nu_{SGS} = (C_s \Delta)^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (式2)$$

$\Delta$  はグリッドフィルタ幅であり、流体解析コード FFB では各要素を構成する辺の長さの最小値を用いている。 $S_{ij}$  はひずみ速度テンソルである。 $C_s$  はモデル係数であり本コードではダイナミックスマゴリンスキー[16, 17]により計算する。

### 2.2 オーバーセット手法とその改良

FFB では圧力解法に、Fractional Step を適用しており、式1から圧力勾配を除いた式を用いて中間速度  $\tilde{u}_i$  を計算し、これを連続の式を満たすよう求められた圧力の勾配で修正することにより、次ステップの速度  $u_i^{n+1}$  を計算する。速度修正の式を式3に示す。

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \Delta t \quad (式3)$$

改良前のオーバーセット手法では、上記の速度修正を行う際に、オーバーセット節点に対して、圧力勾配のオーバーセット処理(補間処理)を行っている。壁面境界、入口境界では圧力勾配を0セットしているため、壁面、入口およびオーバーセット境界のみで囲まれた領域を考えると、その領域は全領域において圧力勾配固定(速度固定)を課していることになる。この場合、境界で流量の保存が満たされる保証がないため、修正後の速度場に対して連続の式を満たそうとすると、収束解がないため計算が振動する。ここでは、速度修正の式を計算するにあたり、オーバーセット節点において圧力勾配をオーバーセットするのではなく、圧力をオーバーセットする手法を導入する。圧力のオーバーセットは、補間処理された要素圧力データをそのまま、オーバーセット要素に代入するのではなく、その要素の圧力勾配を計算するための境界条

件として用いる。上記の方法では、圧力境界での圧力勾配の連続性が保証されないため、修正した速度の連続性が保証されない。この不連続性を緩和させるために、圧力境界で計算された圧力勾配とオーバーセットされた圧力勾配の差異に係数をかけた強制力項を付加する。以降、2.3 節では改良オーバーセット手法の空間離散化について、2.4 節では速度の連続性を保つための強制力項について示す。

### 2.3 空間離散化

FFB では、式 3 における圧力勾配を計算する際に、重み付き残差法を適用する。圧力勾配を表す式 4 の両辺に重み関数  $\phi^*$  をかけ、解析領域  $\Omega$  にわたって積分する (式 5)。

$$F_i = \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (式 4)$$

$$\int_{\Omega} \phi^* F_i d\Omega = \int_{\Omega} \phi^* \frac{\partial P}{\partial x_i} d\Omega \quad (式 5)$$

式 5 右辺に部分積分およびガウスの発散定理を適用すると以下を得る。

$$\int_{\Omega} \phi^* F_i d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} P d\Omega + \int_{\Gamma} \phi^* P n_i d\Gamma \quad (式 6)$$

ここで、 $\Gamma$  は境界、 $n_i$  は境界における法線ベクトル (外向きを正) である。式 6 の右辺第 2 項は全ての境界において計算する必要があるが、速度境界、入口境界では圧力勾配が 0 (既知) であるため重み関数を 0 にすることができ、この項は消える。また、自由境界では圧力 0 とするため、同様にこの項は消える。したがって、式 6 右辺の第 2 項は、オーバーセット境界でのみ考えればよい。これ以降は、 $\Gamma$  をオーバーセット境界として扱う。

式 6 の解析領域  $\Omega$  にわたる積分を、要素内積分とその重ね合わせに書き換える。

$$\sum_e \left[ \int_{\Omega_e} \phi^* F_i d\Omega_e \right] = - \sum_e \left[ \int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} P d\Omega_e \right] + \sum_e \left[ \int_{\Gamma_e} \phi^* P n_i d\Gamma_e \right] \quad (式 7)$$

ここで、圧力勾配  $F_i$  および重み関数  $\phi^*$  に、同一の形状関数  $N$  を適用し、圧力は要素一定として要素積分の外にだすことにより以下の式を得る。

$$\sum_e \left[ \left\{ \int_{\Omega_e} N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega_e \right\} F_{i\beta} + P^{(e)} \left\{ \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x_i} d\Omega_e \right\} - P^{(e)} n_i \left\{ \int_{\Gamma_e} N_{\alpha} d\Gamma_e \right\} \right] \phi_{\alpha}^* = 0 \quad (式 8)$$

式 8 が任意の  $\phi^*$  に対して満足するよう連立一次方程式を組み、これを解けば、圧力勾配  $F_i$  を求めることができる。ここでは、式 8 の第一項の質量マトリックスを対角集中化し、圧力勾配を陽的に計算する。

### 2.4 速度の連続性を保つための強制力

前述の通り、オーバーセット境界では速度の連続性が保証されない。速度のオーバーセット境界における速度の連続性を保つため、式 3 に示す速度修正において、自領域の速度  $u_i^{n+1}$  とオーバーセットされる多領域の速度  $u_i'^{n+1}$  の差に比例した強制力を付加す

る。すなわち、

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} \Delta t + \alpha (u_i'^{n+1} - u_i^{n+1}) \quad (式 9)$$

強制力項は、オーバーセット領域間で速度ベクトルが一致すれば 0 となる項であり、差があれば、その差が小さくなる方向に作用する。 $\alpha$  は、領域間の拘束の大きさを示す係数であり、これが大きいほど、境界において他領域の速度  $u_i'^{n+1}$  に近い値をとる。ここで、他領域で計算される速度  $u_i'^{n+1}$  が式 3 に従うとすれば、他領域における中間速度  $\tilde{u}_i'$  および圧力  $P'$  を用いて、式 10 のように表すことができる。

$$u_i'^{n+1} = \tilde{u}_i' - \frac{\partial P'}{\partial x_i} \Delta t \quad (式 10)$$

中間流速  $\tilde{u}_i'$  は式 11 を満たすよう計算される。

$$\tilde{u}_i' = \tilde{u}_i \quad (式 11)$$

式 11 を式 10 に代入すると式 12 を得る。

$$u_i'^{n+1} = \tilde{u}_i - \frac{\partial P'}{\partial x_i} \Delta t \quad (式 12)$$

式 12 を式 9 に代入して整理すると式 13 を得る。

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i - \frac{1}{1+\alpha} \left\{ \frac{\partial P}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial P'}{\partial x_i} \right\} \Delta t \quad (式 13)$$

ここで、 $\alpha \rightarrow \infty$  とすると、圧力勾配のみをオーバーセットする速度境界になり、一方、 $\alpha \rightarrow 0$  とした場合は圧力のみをオーバーセットする圧力境界になる。式 13 の各圧力勾配項にかかる係数の和が 1 であることより、以下のように書き直すことができる。

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i - \left\{ C_1 \frac{\partial P}{\partial x_i} + C_2 \frac{\partial P'}{\partial x_i} \right\} \Delta t \quad (式 14)$$

$$C_1 + C_2 = 1$$

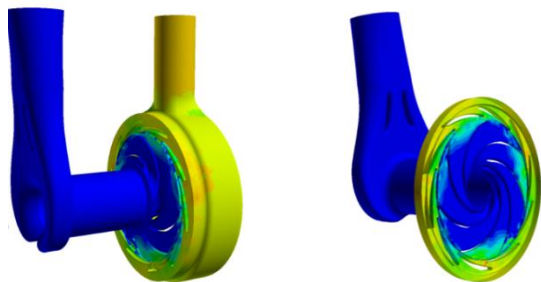
なお、ここに示した圧力勾配の計算方法は、圧力を計算した後の速度の修正だけでなく、圧力を計算する Poisson 方程式を解くマトリックスソルバーにおける圧力のラプラシアンを計算にも適用される。すなわち、式 14 に示すオーバーセット処理は、連続の式を解くマトリックスソルバー内で陰的に処理される。

## 3. テストポンプ

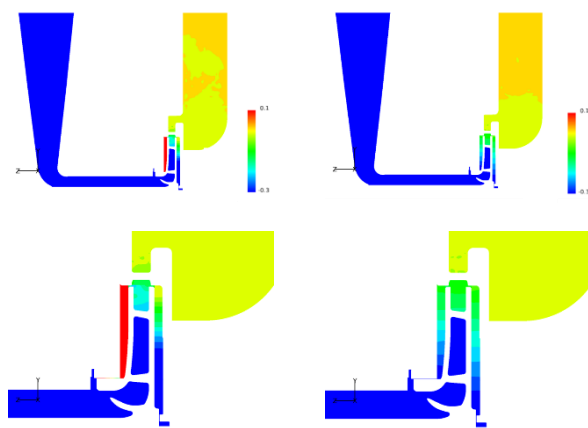
前節に示したオーバーセット手法を検証するため、羽根車直径 318 mm、回転数 1600 rpm、羽根車翼枚数 7、ディフューザ翼枚数 11 の単段遠心ポンプの内部流れの LES 解析を実施した。遠心ポンプの緒言を Table 1 に示す。単段遠心ポンプの外観を Fig. 1 に示す。計算モデルでは、吸込配管、羽根車、ディフューザおよび吐出配管といった主要流路に加え、羽根車背面流路、ライナリング、バランスピストンおよび戻り流路といった漏れ流路の流れも解析対象である。なお、Fig. 1 ではピストン流路から吸込配管への戻り流路の表示を省略している。本解析の計算モデルは 10 領域から構成されており総グリッド数は約 1.8 億グリッドであり、要素タイプは六面体である。

Table 1 specifications of test centrifugal pump

項目	内容
羽根車直径	318 mm
回転数	1600 rpm
設計流量	1.5 m <sup>3</sup> /min
羽根車翼枚数	7
ディフューザ翼枚数	11



(a) From suction side (b) From discharge side  
Fig. 1 Overview and cross section of meridional plane of test centrifugal pump.

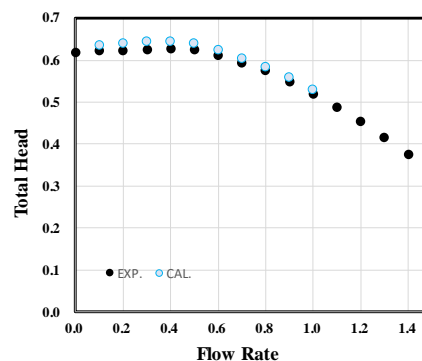


(a)  $C_1 = 0.0$  (b)  $C_1 = 0.1$   
Fig. 2 Comparisons of static pressure on meridional plane

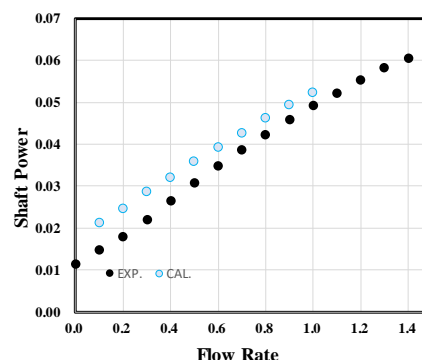
#### 4. 計算結果

オーバーセット手法の効果を検証するため、設計流量条件で、式 14 に示す係数 $C_1$ を、0.0 および 0.1 に設定した計算を実施した。 $C_1 = 0.0$ の条件では圧力勾配の算出の際にオーバーセットされた圧力勾配のみが参照されるのに対し、 $C_1 = 0.1$ の条件では、オーバーセットされた圧力勾配が 90%、オーバーセットされた圧力から計算される圧力勾配が 10%の割合でオーバーセット節点における圧力勾配が計算されることを示している。さらに大きな $C_1$ を用いた計算も実行したが、計算が不安定になることを確認している。理由は、オーバーセット境界における速度の不連続が大きくなったためと考えられる。Fig. 2 にポンプ子午面における静圧分布の比較を示す。Fig. 2 の上側がポンプ全体であり、下側は羽根車近傍である。圧力勾配の計算の際にオーバーセットされた圧力の値を参照しない $C_1 = 0.0$ の条件では、羽根車流路と上流側漏れ流路のオーバーセット境界において圧力の不連続が生じているのに対し、 $C_1 = 0.1$ の条件ではこの不連続が解消していることにより、本手法の有用性を確認することができた。

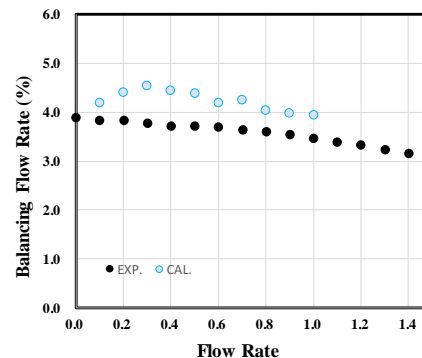
係数 $C_1 = 0.1$ の条件で、設計点流量以下、10 %流量までの全流量域に対する内部流れの LES 解析を実施した。計算は設計点から開始し、羽根車 12 回転分の計算を実行し、この結果から速度場を 9/10 倍して流量比 90 %の初期値とした。流量比 90 %以降はそれぞれ羽根車 4 回転計算し、2 回転計算した後の計算結果をとなりの流量比 10%減の低流量側の計算の初期値とした。各流量点の計算の最後の羽根車 2 回転の時間平均場を用いて、全揚程、軸動力、戻り流量を評価した。これらを実験値と比較した結果を Fig. 3 に示す。全揚程に関しては実験値とよく一致している。実験値では流量比 30%以下で右上がりの特性となっているが、計算においてもその傾向をとらえている。軸動力に関しては設計点で 6 %過大評価しており、低流量側ほど実験値との差異は大きくなっている。戻り流量に関しては全体的に過大評価しているものの低流量側で戻り流路が増える傾向はとらえられている。



(a) Total head



(a) Shaft power



(c) Balancing flow rate

Fig. 3 Comparisons of pump performance.

流れ場の可視化結果例として、羽根車およびディフューザの中央高さ断面における静圧および半径方向速度の瞬時分布を Fig. 4

に示す。流量比 50%では一部のディフューザの前縁において逆流が生じており、流量比 10%ではこれがほぼ全周にわたって確認できる。ディフューザからの逆流により羽根車背面流路に角運動量が輸送され、これにより羽根車背面流路の圧力分布が変わり、軸スラストの変動が生じている。今後、LES 解析で得た非定常データを分析することにより、内部流れと軸スラストの非定常特性を詳細に分析する予定である。

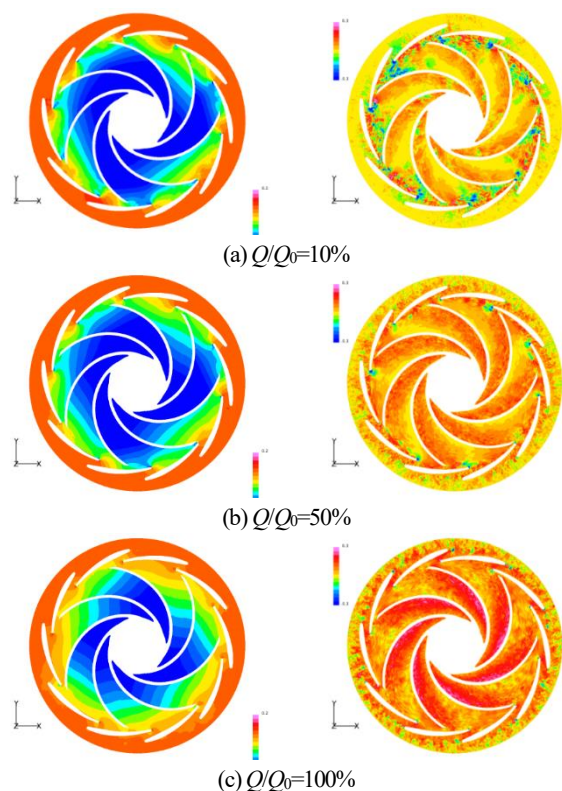


Fig. 4 Distributions of instantaneous static pressure (left) and radial velocity on a mid-span cross section in impeller and diffuser

## 5. まとめ

有限要素法による非圧縮性流れ解析コードに適用するオーバーセット手法に関して、圧力勾配を計算する際に、オーバーセットされた圧力を用いる手法を適用した。オーバーセット境界における速度の連続性を保証するため、オーバーセットされる速度との差に比例する強制力を付加した。この手法は、オーバーセットされた圧力より計算される圧力勾配とオーバーセットされた圧力勾配を重ね合わせることに相当する。上記のオーバーセット手法を、羽根車直径 318 mm、回転数 1600 rpm、羽根車翼枚数 7、ディフューザ翼枚数 11 の単段遠心ポンプの内部流れを対象とする LES 解析に適用した。改良したオーバーセット手法により、オーバーセット領域における圧力の連続性が向上し、その有用性を確認することができた。LES 解析により予測されたポンプ性能は、実験値とよく一致した。今後は、LES 解析で得た非定常データを分析することにより、内部流れと軸スラストの非定常特性を詳細に分析する予定である。

## 謝辞

本研究で用いた遠心ポンプの形状データおよび計測結果は、一般社団法人ターボ機械協会のターボ機械 HPC 実用化分科会 WG2 「多段遠心ポンプの非定常流動・LES 解析」において提供されたものである。また、本研究成果 (の一部) は、理化学研究所のスーパーコンピュータ「京」を利用して得られたものである (課題番

号: hp190115)。ここに記して関連各位に謝意を表す。

## 参考文献

- (1) J.deLarorderiea, F.Duchainea, L.Gicquela, O.Vermorela, G.Wangb and S.Moreaub, Numerical analysis of a high-order unstructured overset grid method for compressible LES of turbomachinery, *Journal of Computational Physics* 363 (2018) 371–398.
- (2) X. X. Chen and X. Zhang, High-Order Interface for Aeroacoustic Computation Using Overset Grid, *AIAA Journal*, 51, No. 2 (2013) 519-523.
- (3) Beatrice Roget, Jayanarayanan Sitaraman, Robust and efficient overset grid assembly for partitioned unstructured meshes, *Journal of Computational Physics* 260 (2014) 1–24.
- (4) Seonghyeon Hahn, Gianluca Iaccarino, Shreyas Ananthan and James D. Baederx, Extension of CHIMPS for Unstructured Overset Simulation and Higher-Order Interpolation, *Proceeding of 19th AIAA Computational Fluid Dynamics*, AIAA 2009-3999.
- (5) Rajiv Shenoy and Marilyn J. Smith, Unstructured Overset Mesh Adaptation with Turbulence Modeling for Unsteady Aerodynamic Interactions, *Journal of Aircraft*, 51, No. 1 (2014) 161-173.
- (6) Z. J. Wang, A Fully Conservative Interface Algorithm for Overlapped Grids, *Journal of Computational Physics*, 122 (1995) 96-106.
- (7) H.S. Tang, S. Casey Jones and Fotis Sotiropoulos, An overset-grid method for 3D unsteady incompressible flows, *Journal of Computational Physics* 191 (2003) 567–600.
- (8) S. Völkner, J. Brunswig and T. Rung, Analysis of non-conservative interpolation techniques in overset grid finite-volume methods, *Computers and Fluids* 148 (2017) 39–55.
- (9) Kato, C., Kaiho, M. and Manabe, A., 2003, An overset finite-element large-eddy-simulation method with application to turbomachinery and aeroacoustics, *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, 70 (2003), 32–43.
- (10) Kato, C., Yamada, Y., Wang, H., Guo, Y., Miyazawa, M., Takaishi, T. and Takano, Y., Numerical prediction of sound generated from flows with a low Mach number, *Computers & Fluids*, 36 (1), (2005) 53–68.
- (11) Olivier Pacot, Chisachi Kato, Yang Guo, Yoshinobu Yamada and François Avellan, Large Eddy Simulation of the Rotating Stall in a Pump-Turbine Operated in Pumping Mode at a Part-Load Condition, *Journal of Fluids Engineering*, 138 (11) (2015)
- (12) 萩谷 功, 加藤 千幸, 山出 吉伸, 長原 孝英, 深谷 征史, LES を用いた斜流ポンプ不安定特性の原因特定, *機論* 82-834 (2016) 15-00533
- (13) 萩谷 功, 加藤 千幸, 山出 吉伸, 深谷 征史, 長原 孝英, 不安定特性発生時の斜流ポンプ動翼内部流れの時間変化, *機論* 84-857 (2018) 17-00363
- (14) Taku Iwase, Hideshi Obara, Yoshinobu Yamada, Guo Yang and Chisachi Kato, Prediction of Flow Field and Aerodynamic Noise for Multiblade Fan of Air-conditioner, *Proceeding of The 13th Asian International Conference on Fluid Machinery* (2015), AICFM13-023.
- (15) Yoshinobu Yamada, Taku Iwase, Yutaka Ohta, Yang Guo and Chisachi Kato, Prediction of Pressure Fluctuation in a Centrifugal Blower by Large Eddy Simulation, *Proceeding of The 13th Asian International Conference on Fluid Machinery* (2015), AICFM13-139.
- (16) Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. and Cabot, W. H., A dynamic subgrid-scale eddy-viscosity model, *Physics of Fluids A*, Vol. 3, No. 7 (1991), pp. 1760-1765.
- (17) Lilly, D. K., A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure model, *Physics of Fluids A*, Vol. 4, No. 3 (1992), pp. 633-635.