気体論スキームの誤差評価に関する研究
On error estimation of Gas-Kinetic schemes

○ 山田 浩史，龍大院，〒520-2194 滋賀県大津市瀬田大江町横谷 1-5, t17m048@mail.ryukoku.ac.jp
大津 広敬，龍大，〒520-2194 滋賀県大津市瀬田大江町横谷 1-5, hirotaka.otsu@gmail.com
Hiroshi Yamada, Graduate school of Ryukoku Univ., 1-5 Yokotani, Setaoecho, Otsu, Shiga, JAPAN
Hirotaka Otsu, Ryukoku Univ., 1-5 Yokotani, Setaoecho, Otsu, Shiga, JAPAN

The purpose of this study is to develop a numerical fluid analysis with accuracy guarantee. We revised the proof in the Descrete Velocity BGK (DV-BGK) model (Bouchut[2-3], Bouchut et al.[4], Berthelin[5]) and applied it to the Gas-Kinetic Flux Vector Splitting (KFVS) method in the high-dimensional finite volume method of the polyhedral element, and considered it. As a result, it was shown that the entropy condition and the boundness of numerical solution (necessary for proof of the weak convergence and the error estimation can be derived). However, the proof of the weak convergence and error estimation of KFVS is carried out at another time.

1. はじめに

数値流体解析結果の信頼性は、幾つかの問題を除き、経験的にしか保証されていない。数値流体解析手法の精度保証が本研究の目的である。双曲型発展方程式の場合、エントロピー条件を充たすエントロピー解であるかどうかが、物理的に正しい解である条件である事が知られている。これは、数値解析にも当て嵌まり、数値解の厳密解への収束に関わる。

本研究では、気体論スキーム (Gas-Kinetic Scheme, GKS) の中、Gas-Kinetic Flux Vector Splitting 法について考察した。気体論スキームとは、流体力学の基礎方程式が Boltzmann 方程式の極限である事に基く差分法である[7]。

Berthelin[5]は、Bouchut[3]が証明したエントロピー条件を用い、ポリトロープ過程等の仮定の下、GKS の一種である BGK-FVS の風上差分の 1 次元 Euler 方程式における厳密解への弱収束を証明した。また、Bouchut et al.[4]が、直交格子上の 2 次精度 BGK-FVS の 3 次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式における厳密解への弱収束を、Bouchut[3]のエントロピー条件を用いて証明している。

Bouchut[2-3]、Bouchut et al.[4]、Berthelin[5]の証明は、GKS の性質によって、エントロピー条件による収束の証明が行い易く、見通しが良く、比較的簡便で、有力な手法であると考えられる。

しかし、Aregba-Driollet et al. [1]、Bouchut[3]、Bouchut et al. [4]、Berthelin[5]の用いている気体論スキームは、分子速度を有限可算空間の要素として近似した BGK 方程式に基く為 (Descrete Velocity BGK Model, DV-BGK)、分子速度に近似の無い気体論スキームの証明には不十分である。

本研究では、多面体要素の高次元有限体積法における KFVS 法に対して Bouchut[2-3]、Bouchut et al.[4]、Berthelin[5]の証明を適用し、誤差評価式の証明に必要な評価式が導けるかどうかについて考察した。そこで、分子速度に近似の無い気体論スキームの中、最も単純である KFVS を研究対象としている。最初に Bouchut[2-3]、Bouchut et al. [4]、Berthelin[5]の証明の基礎知識を示し、分子速度に近似の無い気体論スキームの場合の証明に修正して行った。そうして最後に、弱収束や誤差評価式の証明に必要な、エントロピー条件や、数値解の有界性が導出可能である事を示した。

2. 原理

2.1 流体力学の支配方程式

本研究では、流体力学の支配方程式として、理想気体における、外力の無い Euler 方程式、

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{x}}=\mathbf{0}, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho\boldsymbol{u}\\ \rho e_t\end{bmatrix}, \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})+p\boldsymbol{I}\\ (\rho e_t+p)\boldsymbol{u}\end{bmatrix},$$

$$\rho e_t=\rho e_i+\frac{1}{2}\rho u^2, e_i=\frac{p}{(\gamma-1)\rho}, p=\rho RT$$

を用いた。ここで、ρは密度、pは圧力、$\boldsymbol{u}$は速度ベクトル、e_tは比エネルギー密度、e_iは比内部エネルギー、Tは温度、γは比熱比、Rは気体定数、$\boldsymbol{I}$は単位行列、tは時間、$\boldsymbol{x}$は空間座標ベクトル。

2.2 気体論の支配方程式

本研究では、気体論の支配方程式として、衝突項を BGK 作用素(Bhatnagar-Gross-Krook operator) とした、外力の無い Boltzmann 方程式、

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}=Q[f], \quad Q[f]=\frac{1}{\tau}(M-f), \quad (t,\boldsymbol{x})\in\,]0,\infty[\,\times\mathbb{R}^D, (\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\in\Xi \tag{2.2}$$

を用いた。ここで、$f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})$は任意の速度分布関数、$M(\boldsymbol{U},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})$は Maxwell の速度分布関数、$\boldsymbol{v}$は分子速度ベクトル、$\boldsymbol{\xi}$は分子内部速度ベクトル、$Q[f]$は衝突項、$\tau$は緩和時間、$D$は空間の次元、$D_f$は内部自由度の次元である。$\Xi$は測度$\mu$を有する$D+D_f$次元 Lebesgue 可測空間であり、近似無しでは$\Xi=\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}^{D_f}$で定義し、DV-BGK では有限可算集合で定義する。

以下、$\mathcal{E}$を空では無いC^2級凸関数族、$\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{D+2}$を開凸集合、$\mathbf{M}[\boldsymbol{U}](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\psi}\,M(\boldsymbol{U},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})$とする。

定義 2.1 (Bouchut[2])

$$\begin{cases}\boldsymbol{U}=\langle\mathbf{M}[\boldsymbol{U}]\rangle\\ \boldsymbol{G}=\langle\boldsymbol{v}\otimes\mathbf{M}[\boldsymbol{U}]\rangle\\ \langle\boldsymbol{\psi}Q[f]\rangle=\mathbf{0}\end{cases} \tag{2.3}$$

$$\langle\cdot\rangle=\int_{\Xi}(\cdot)\,d\mu, \boldsymbol{\psi}=\begin{bmatrix}1\\ \boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{\xi}^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\end{bmatrix} \tag{2.4}$$

$$\text{a.e.}\,(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\in\Xi.\forall\boldsymbol{U}\in\mathcal{U}.\begin{cases}\mathbf{M}[\cdot](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^{D+2})\\ \mathbf{M}[\boldsymbol{U}](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\in D_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})}\text{ convex}\end{cases} \tag{2.5}$$

を充たす$M(\boldsymbol{U},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})$を Maxwell 分布と云う。以下、$D_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})}=\mathrm{conv}_{\boldsymbol{U}\in\mathcal{U}}\,\mathbf{M}[\boldsymbol{U}](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})$とする。

定義 2.2 (Bouchut[2])

$$\text{a.e.}\,(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi}).\,H_\eta[\cdot](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi}):D_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})}\to\mathbb{R}\text{ is convex.}\tag{2.6}$$

$$\langle H_\eta[\mathbf{M}[\boldsymbol{U}](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\rangle=\eta(\boldsymbol{U})+cst.\tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}\forall\boldsymbol{f}\in\{\boldsymbol{f}:\Xi\to\mathbb{R}^{D+2};\text{a.e.}\,(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\in\Xi.\,\boldsymbol{f}\in D_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})}\}.\\ \langle H_\eta[\mathbf{M}[\boldsymbol{U}](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\rangle\le\langle H_\eta[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\rangle,\\ \boldsymbol{U}_f=\langle\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\rangle\end{gathered}\tag{2.8}$$

を充たす$H_\eta[\cdot](\cdot,\cdot)$を kinetc entropy、

$$\begin{gathered}G_\eta(\boldsymbol{U},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})=H_\eta\big[\mathbf{M}[\boldsymbol{U}]\big](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi}),\\ G_\eta\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^{D+2})\end{gathered}\tag{2.9}$$

を充たす$G_\eta(\cdot,\cdot,\cdot)$を macroscopic entropy と云う。

補題 2.1 (Bouchut[2])

$H_\eta[\cdot](\cdot,\cdot)$が (2.6) と

$$\forall\boldsymbol{U}\in\mathcal{U}.\,\text{a.e.}\,(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\in\Xi.\,\eta'(\boldsymbol{U})\in\partial_{\boldsymbol{f}}H_\eta\big[\mathbf{M}[\boldsymbol{U}]\big](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\tag{2.10}$$

を充たせば、(2.8) も充たされる。ここで。

$$\begin{aligned}\partial_{\boldsymbol{f}}H_\eta[\boldsymbol{f_0}](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})=\{&\boldsymbol{L}\in(\mathbb{R}^{D+2})';\forall\boldsymbol{f}\\ &\in D_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})}.\,H_\eta[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\\ &\ge H_\eta[\boldsymbol{f_0}](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})+\boldsymbol{L}(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f_0})\}\end{aligned}\tag{2.11}$$

である。また、$H_\eta[\cdot](\cdot,\cdot)$が (2.6) – (2.8) を充たし、

$$\begin{gathered}\forall\boldsymbol{f}\in\{\boldsymbol{f}:\Xi\to\mathbb{R}^{D+2};\text{a.e.}\,(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\in\Xi.\,\boldsymbol{f}\in D_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})}\}.\\ \boldsymbol{U}_f=\langle\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\rangle\in\mathcal{U},\end{gathered}\tag{2.12}$$

または$\mathcal{U}$が開である時、(2.10) が充たされる。

すなわち、(2.6) – (2.8) と(2.6)、(2.7)、(2.10) は同値。

定理 2.1 (Bouchut[2])

(a) $\mathcal{E}$の稠密集合に含まれるηは$\eta''>0$、かつ$\eta'(\mathcal{U})$が凸。
(b) $\text{a.e.}\,(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi}).\,\mathbf{M}[\cdot](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\in C^1:\mathcal{U}\to D_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})}$が上への微分同相。

の孰れかを仮定する時、kinetc entropy $H_\eta[\cdot](\cdot,\cdot)$と macroscopic entropy $G_\eta(\cdot,\cdot,\cdot)$ が存在して、

$$\text{a.e.}\,(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\in\Xi.\,\mathbf{M}[\cdot](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\in\mathcal{M}_+^\varepsilon\tag{2.13}$$

$$\text{a.e.}\,(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\in\Xi.\,\forall\boldsymbol{U}\in\mathcal{U}.\,G_\eta{}'(\boldsymbol{U},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})=\mathbf{M}'[\boldsymbol{U}]^T\eta'(\boldsymbol{U})\tag{2.14}$$

である。ここで。

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^\varepsilon=\{&\boldsymbol{W}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{D+2};\forall\eta\in\mathcal{E}.\,\forall\boldsymbol{U}\\ &\in\mathcal{U}.\,\boldsymbol{W'}^T\eta''\text{ is symmetric}\}\end{aligned}\tag{2.15}$$

$$\mathcal{M}_+^\varepsilon=\{\boldsymbol{W}\in\mathcal{M}^\varepsilon;\forall\eta\in\mathcal{E}.\,\forall\boldsymbol{U}\in\mathcal{U}.\,\boldsymbol{W'}^T\eta''\ge0\}\tag{2.16}$$

である。

系 2.1 (Bouchut[2]) $\mathcal{E}$が少なくとも狭義凸関数 η_0を含み、かつ$\mathbf{M}[\cdot](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\in\mathcal{M}^\varepsilon\cap C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^{D+2})$とすると、全ての$\boldsymbol{U}\in\mathcal{U}$に対して$\mathbf{M}'[\boldsymbol{U}]$は実対格化可能である。更に$\mathbf{M}[\cdot](\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\in\mathcal{M}_+^\varepsilon$とすると$\mathbf{M}'[\boldsymbol{U}]$の固有値は非負である。

以上より、$\mathbf{M}'[\boldsymbol{U}]\ge0$である。

2.3 エントロピー不等式

双線形方程式

$$\begin{gathered}\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U})}{\partial\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{U}\in\mathcal{U}.\,\boldsymbol{G}(\cdot)\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^D)\end{gathered}\tag{2.17}$$

において、

$$\begin{gathered}\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{\vartheta}}{\partial\boldsymbol{x}}\le0,\\ \eta\in\mathcal{E}\subset C^2(\mathcal{U},\mathbb{R}^D),\boldsymbol{\vartheta}\in C^2(\mathcal{U},\mathbb{R}^D)\end{gathered}\tag{2.18}$$

が充たされる時、式 (2.18) をエントロピー不等式、$(\eta,\boldsymbol{\vartheta})$をエントロピー対と云う。

定義 2.3 (Bouchut[2]) 凸関数$\eta\in\mathcal{E}$に対して$\boldsymbol{W}\in\mathcal{M}^\varepsilon$が$\eta$-散逸的 ($\eta$-dissipative) であるとは、

$$\begin{gathered}\forall\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}.\,[\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{u})]^T\eta''(\boldsymbol{u})=\eta''(\boldsymbol{u})^T[\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{u})],\\ \boldsymbol{G}_\eta[\boldsymbol{W}]'(\boldsymbol{u})=\eta'(\boldsymbol{u})\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{u})\end{gathered}\tag{2.19}$$

である時、基本エントロピー散逸 (Elementary Entropy Dissipation)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_\eta[\boldsymbol{W}](\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=&\,\boldsymbol{G}_\eta[\boldsymbol{W}](\boldsymbol{u})-\boldsymbol{G}_\eta[\boldsymbol{W}](\boldsymbol{v})\\ &+\eta'(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{W}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{W}(\boldsymbol{u})]\end{aligned}\tag{2.20}$$

が

$$\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathcal{U}.\,\boldsymbol{D}_\eta[\boldsymbol{W}](\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\le\boldsymbol{0}\tag{2.21}$$

を充たす事を云う。

定義 2.4 (Berthelin[5]) 凸関数$\eta\in\mathcal{E}$に対して$\boldsymbol{W}\in\mathcal{M}^\varepsilon$が狭義 η-散逸的 (strictly η-dissipative) であるとは、η-散逸的な$\boldsymbol{W}$が

$$\begin{aligned}\exists\alpha(\boldsymbol{W})>0.\,\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathcal{U}.\,&\boldsymbol{D}_\eta[\boldsymbol{W}](\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\\ &\le-\alpha(\boldsymbol{W})|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2\end{aligned}\tag{2.22}$$

を充たす事を云う。

補題 2.2 (Bouchut[3]) 狭義凸関数$\eta_0\in\mathcal{E}$および$\boldsymbol{W}\in\mathcal{M}^\varepsilon$に対して$\eta_0{}'(\mathcal{U})$が凸である時、$\boldsymbol{W}$は$\eta_0$-散逸的である。

ここで、$\eta'(\mathcal{U})$が凸である$\eta\in\mathcal{E}$に対して、$\eta+\varepsilon\eta_0(\varepsilon>0)$も補題 2.1 を充たす為、$\varepsilon\downarrow0$の極限を取ると、以下の補題が導ける

補題 2.3 凸関数$\eta\in\mathcal{E}$と$\boldsymbol{W}\in\mathcal{M}^\varepsilon$に対して$\eta'(\mathcal{U})$が凸である時、$\boldsymbol{W}$は$\eta$-散逸的である。

補題 2.4 (Berthelin[3]) 凸関数$\eta\in\mathcal{E}$に対して、$\mathcal{U}$上狭義η-散逸的な$\boldsymbol{W}$は$\boldsymbol{W}\in\mathcal{M}_\alpha^\varepsilon$である。ここで、$\alpha>0$であり、

$$\mathcal{M}_\alpha^\varepsilon=\{\boldsymbol{W}\in\mathcal{M}_+^\varepsilon;\forall\eta\in\mathcal{E}.\,\forall\boldsymbol{U}\in\mathcal{U}.\,\boldsymbol{W'}^T\eta''\ge2\alpha\}\tag{2.23}$$

である。

2.4 FVS 法

定義 2.5 有限体積法における 1 次元 1 次精度 FVS 法は、

$$\begin{gathered}\boldsymbol{U}_j{}^{n+1}=\boldsymbol{U}_j{}^n-\frac{\Delta t^n}{\Delta x}\big[\boldsymbol{G}_{j+1/2}^n-\boldsymbol{G}_{j-1/2}^n\big],\\ \boldsymbol{G}_{j\pm\frac{1}{2}}=\boldsymbol{G}^\pm\big(\boldsymbol{U}_j{}^n\big)+\boldsymbol{G}^\mp\big(\boldsymbol{U}_{j\pm1}{}^n\big),\end{gathered}\tag{2.24}$$

で表される。ここで、Δtは時間刻み、Δxは格子間隔、添え字のjは格子点番号、nは時間ステップである。高次元 1 次精度の場合、

$$\begin{gathered}\boldsymbol{U}_h=\sum_{\substack{K\in\mathcal{T}\\ n\in\mathbb{N}}}\boldsymbol{U}_K{}^n\chi_{[t_n,t_{n+1}[\times K}\\ \boldsymbol{U}_K{}^{n+1}=\boldsymbol{U}_K{}^n-\frac{\Delta t^n}{|K|}\sum_{(K|L)\in\partial K}|(K|L)|\boldsymbol{G}_{K|L}^n,\\ \boldsymbol{G}_{K|L}^n=\boldsymbol{G}^+\big(\boldsymbol{U}_K{}^n,\boldsymbol{n}_{K|L}\big)+\boldsymbol{G}^-\big(\boldsymbol{U}_L{}^n,\boldsymbol{n}_{K|L}\big),\end{gathered}\tag{2.25}$$

$$[0,\infty[\times\mathbb{R}^D=\bigcup_{\substack{K\in\mathcal{T}\\n\in\mathbb{N}}}[t_n,t_{n+1}[\times K,$$

$$h=\sup_{K\in\mathcal{T}}\{diam(K)\},$$

$$\exists\alpha>0.\forall K\in\mathcal{T}.\begin{cases}\alpha h^D\le|K|\\|\partial K|\le\alpha^{-1}h^{D-1}\end{cases}$$

である。ここで、$\mathcal{T}$はメッシュ集合、Kはメッシュ要素、$K|L$はメッシュKとLの接する面要素、$\boldsymbol{n}_{K|L}$は$K|L$面要素の外向き法線ベクトルである。

2.5 KFVS 法

定義 2.6 (Xu[8]) KFVS 法は、Maxwell 分布

$$M(\boldsymbol{U},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})=\rho\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{D_f+D}{2}}e^{-\beta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})^2-\xi^2},\beta=\frac{1}{2RT}\tag{2.26}$$

を用い、一次元の場合、

$$\boldsymbol{G}^{\pm}(\boldsymbol{U}^n)=\int_{\pm v\ge0}\psi v\,\mathbf{M}[\boldsymbol{U}^n]\,d\mu,\tag{2.27}$$

で表される FVS スキームである[4]。本研究では、

$$\boldsymbol{G}^{+}\left(\boldsymbol{U}_K{}^n,\boldsymbol{n}_{K|L}\right)=\int_{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_{K|L}\ge0}\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_{K|L}\right)\mathbf{M}[\boldsymbol{U}_K{}^n]\,d\mu,$$
$$\boldsymbol{G}^{-}\left(\boldsymbol{U}_L{}^n,\boldsymbol{n}_{K|L}\right)=\int_{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_{K|L}\le0}\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_{K|L}\right)\mathbf{M}[\boldsymbol{U}_L{}^n]\,d\mu,\tag{2.28}$$

と拡張したものを用いる。

補題 2.3 より、(2.26) のマクスウェル分布はη-散逸的である。

定理 2.3 高次元1次精度KFVS法およびFVS-BGKにおいて、CFL 数λ が CFL 条件

$$\lambda\Delta t\le h\tag{2.29}$$

を充たし、任意の$K\in\mathcal{T}$で

$$-\boldsymbol{G}^{-}\left(\cdot,\boldsymbol{n}_{K|L}\right),$$
$$Id-\frac{1}{\alpha^2\lambda^n}\sum_{(K|L)\in\partial K}\left(\boldsymbol{G}^{+}\left(\cdot,\boldsymbol{n}_{K|L}\right)\right)/c^n\tag{2.30}$$

が全てη−散逸的、かつ

$$\forall\{\boldsymbol{U}_K{}^n\}_{K\in\mathcal{T}}.\left(\{\boldsymbol{U}_K{}^n\}_{K\in\mathcal{T}}\subset\mathcal{U}\to\{\boldsymbol{U}_K{}^{n+1}\}_{K\in\mathcal{T}}\subset\mathcal{U}\right)\tag{2.31}$$

である時、

$$\eta\left(\boldsymbol{U}_K{}^{n+1}\right)-\eta\left(\boldsymbol{U}_K{}^n\right)+\frac{1}{\alpha^2\lambda^n}\sum_{(K|L)\in\partial K}\boldsymbol{\vartheta}^n_{\eta,K|L}=S^{n+1}_{\eta,K}\le0,$$
$$\boldsymbol{\vartheta}^n_{\eta,K|L}=\boldsymbol{\vartheta}^{+}_{\eta}\left(\boldsymbol{U}_K{}^n,\boldsymbol{n}_{K|L}\right)+\boldsymbol{\vartheta}^{-}_{\eta}\left(\boldsymbol{U}_L{}^n,\boldsymbol{n}_{K|L}\right),\tag{2.32}$$
$$\left(\boldsymbol{\vartheta}^{\pm}_{\eta}\left(\cdot,\boldsymbol{n}_{K|L}\right)\right)'=\eta'(\cdot)(\boldsymbol{G}^{\pm})'\left(\cdot,\boldsymbol{n}_{K|L}\right)$$

となり、エントロピー不等式が存在する。

Bouchut[3]および Bouchut et al. [4]は直交格子における FVS-BGK の場合に以上の定理を示しているが、Maxwell 分布 (2.26) は$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})$に関して急減少関数であり、

$\lambda=$

$$\operatorname*{ess.sup}_{\substack{\|\boldsymbol{z}\|=1\\(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\xi})\in\Xi\\K\in\mathcal{T}}}\boldsymbol{z}^T\frac{1}{\alpha^2}\left[\sum_{(K|L)\in\partial K}\left(\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_{K|L}\right)_{+}\mathbf{M}'[\cdot]\right)\right]\boldsymbol{z}\tag{2.33}$$
$$<\infty$$

が存在する為、定理 2.3 の様に、任意の多面体要素の場合にも、KFVS の場合にも容易に拡張できる。

2.6 $\boldsymbol{L^2},\boldsymbol{L^\infty}$評価

Berthelin[5]の定理を、以下の様に、高次元多面体要素へと一般化する。

定義 2.7 (Eymard et al.[6]) 空間X上の局所可積分関数$v\in L^1_{loc}(X)$が有界変動関数$v\in BV(X)$である時、その BV ノルムは

$$|v|_{BV(X)}=\operatorname*{ess.sup}_{\substack{\|\varphi\|_\infty\le1\\\varphi\in C^1_0(X)}}\left|\int_X v\,\boldsymbol{\nabla}\varphi\right|<\infty\tag{2.34}$$

で定義される。$\alpha(\boldsymbol{W})$

定理 2.4 (Berthelin[5]) 凸関数$\eta\in\mathcal{E}$、初期値

$$\boldsymbol{U}^0\in L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^D,\mathbb{R}^{D+2}),\eta(\boldsymbol{U}^0)\in L^1(\mathbb{R}^D,\mathbb{R})\tag{2.35}$$

に対して (2.7) が全てη-散逸的であるならば、

$$E_{n+1}\le E_n=\sum_{K\in\mathcal{T}}\eta(\boldsymbol{U}_K{}^n)|K|=\int\eta(\boldsymbol{U}^n)d\boldsymbol{x},\tag{2.36}$$
$$\eta(\boldsymbol{U}^n)\in L^1(\mathbb{R}^D,\mathbb{R})$$

である。

(2.26) のマクスウェル分布は (2.30) が全てη-散逸的である為、(2.36) より、$\eta(\boldsymbol{U})=(\boldsymbol{U})^2$ならば

$$\|\boldsymbol{U}^n\|_{L^2}\le\|\boldsymbol{U}^0\|_{L^2}\tag{2.37}$$

$\eta(\boldsymbol{U})=(\boldsymbol{U})^{2p}$ならば、$p\to\infty$の時、

$$\|\boldsymbol{U}^n\|_{L^\infty}\le\|\boldsymbol{U}^0\|_{L^\infty}\tag{2.38}$$

である。よって、KFVS の数値解は有界であると考えられる。

3. まとめ

エントロピー条件や誤差評価式の証明に必要な評価式を KFVS が充たす事の証明が、Bouchut[2-3]、Bouchut et al. [4]、Berthelin[5]の証明を援用する事で可能である事が解った。但し、弱収束や誤差評価式の証明は、(2.26) のマクスウェル分布の狭義η-散逸性が未証明であり、未だ不十分である為、別の機会に譲る事とする。

参考文献

(1) D. Aregba-Driollet, R. Natalini, Discrete Kinetic Schemes for Systems of Conservation Laws, SIAM J. NUMER. ANAL., (2000) **37**, No. 6, pp. 1973–2004.
(2) F. Bouchut, Construction of BGK Models with a Family of Kinetic Entropies for a Given System of Conservation Laws, Journal of Statistical Physics, (1999) **95**, Nos. 1/2., pp.113-170.
(3) F. Bouchut, Entropy satisfying flux vector splittings and kinetic BGK models, Numer. Math., (2003) **94**, pp.623–672.
(4) F. Bouchut et al., Second-order entropy satisfying BGK-FVS schemes for incompressible Navier-Stokes equations, SMAI Journal of Computational Mathematics, Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI), (2018) **4**, pp.1-56.
(5) F. Berthelin, Convergence of flux vector splitting schemes with single entropy inequality for hyperbolic systems of conservation laws, Numer. Math., (2005) **99**, pp.585–604.

(6) R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin. Finite Volume Methods. J. L. Lions; Philippe Ciarlet. Solution of Equation in (Part 3), Techniques of Scientific Computing (Part 3), **7**, Elsevier, pp.713-1020, 2000, Handbook of Numerical Analysis.

(7) B. Perthame, E. Tadmor, A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws, Commun. Math. Phys. (1991) **136**, pp.501-517.

(8) K. Xu, Gas-Kinetic Schemes for Unsteady Compressible Flow Simulations, von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series 1998-03, 29th Computational Fluid Dynamics Feb. 23-27, 1998.