

Helmholtz 分解に基づく有限フィルター要素を用いる直交格子法

Cartesian grid method using finite filter elements based on the Helmholtz decomposition

○ 今村純也, *imi* 計算工学研究室, 351-0114 和光市本町 31-9-803, E-mail: jimamura@ra2.so-net.ne.jp
Junya Imamura, *imi* Computational Engineering Laboratory, 351-0114 Wako-shi, Honcho 31-9-803

Based on the Helmholtz decomposition, this paper proposes a numerical scheme for incompressible flow fields using scalar potential Φ and vector potential Ψ called strain potential. The potential Ψ and displacement vector U have same dimensions,; however, the former has no boundary, while the latter has boundaries. Ψ represents the strains with $\nabla\Psi$, and the Ψ -function does not necessarily require the slice value, i.e.; the slice can be set to 0. Such elements are called finite filter elements and are locally used in the domain of U_i elements. The filter elements are used to exclude the cancellation of significant digits. The system is based on Cartesian grid.

1. 目的と背景

(1) 目的

2D では流れ関数 ψ が適用できる。Helmholtz の定理に基づくものである。

任意のベクトル場 V はスカラーポテンシャル ϕ の勾配と、ベクトルポテンシャル ψ の回転で表せる、と定義する分解法である。通常、変位ベクトル場 u を $u = \nabla\phi + \text{curl}\psi$ で表す。

本稿ではひずみベクトル場 V を、 $V = \nabla\Phi + \text{curl}\Psi$ で表す。⁽¹⁾ 2D では ψ 同様、渦度は Ψ で表示できる。

$\langle x-y \rangle 2D$ モデルは、 z 方向は無限に *const.* なモデル化を指す。 $\psi \equiv \psi_3$, $\Psi \equiv \Psi_3$ であり、 Ψ_3 は x 方向、 y 方向の平衡式の応力項に、 z 方向速度の $\langle x-y \rangle$ 面内変化として表れる。

2D では $\{\Psi_3^{(000)}\} = 0$ とするが、 Ψ_3 の $\langle x-y \rangle$ 面内の勾配は z 軸に無関係な導関数としてモデル化できる。(固体で言う平面ひずみモデルと平面応力モデルの混合モデル。)

3D では Ψ_1, Ψ_2 も同様に計算して、それらの和で表す。

本稿は“Helmholtz 分解に基づく連続体理論への有限要素法の適用に関する研究”の一環である。([Appendix-1] 参照のこと。)

上述の視点に到り、 $u = \nabla\phi + \text{curl}\psi$ から $V = \nabla\Phi + \text{curl}\Psi$ 表示法に、いわゆる乗り換える、こととした。

圧力 P は Navier-Stokes 方程式には勾配 ∇P のみ表れ、数値計算には P の要素間連続は必ずしも要求されない。そこで本稿では、有限要素内で切片 $\{P^{(000)}\}_0 = 0$ とする関数を用い、 ∇P のみ有効な有限フィルター要素を媒介させる数値計算技法を示す。ポテンシャル ϕ, ψ も同様とする。

P の連続量分布は、数値計算の最後に 1 回計算する。

非圧縮流れ場計算では、体積率偏差(湧き出し) $\nabla^2\phi$ の offset(相殺)計算の負荷軽減が大きな課題である。本稿の第一目的はそこにある。

数値微分は桁落ちし易い。桁落ちがなければ時間ステップ n の空間微分を用いて陽的な外挿が可能となる。

本稿は桁落ちを緩和・排除して、陽的計算法の確立を目指すものである。

$\nabla^2\phi$ 計算の負荷が大きい原因は、初回の計算値から誤差を取り除くため反復計算を必要とする、ことにあると推測する。ただ、非線形式を解くための反復もあり、誤差は複合する。

そこで本稿では $\nabla^2\phi$ に代え、微分階数の低い $\nabla\Phi$ をフィルターとして解く方法を確立する。

(2) 背景

微分方程式問題は、数値微分の計算問題である。既報⁽²⁾で回転 *curl* や *div* などの勾配変数に対し、共役(共軛)変数の概念を導入し、桁落ち(spurious)誤差を緩和・排除する技法を提案した。

勾配変数と共役変数とは互いに、互いの spurious 誤差を緩和し合う、相互関係にある。([Appendix-2] 参照のこと。)

本稿ではその技法を、有限フィルター要素法として spurious 誤差排除に適用する。

直交格子法は三角形要素・四面体要素法に比べ、労力軽減の点でメリットが多い、ことは広く知られている。

課題はせん断ロックング、体積ロックング現象が顕れる点であった。既報⁽²⁾で Locking-free な有限要素法を提案して課題を解決した。

そこで本稿では、直交格子法を前提として、有限フィルター要素を適用する。

本稿は先に述べた“Helmholtz 分解適用法”の長年研究の、現時点の到達点をまとめたものである。

上述のように Helmholtz 分解はベクトル場を $\nabla\Phi$ と $\text{curl}\Psi$ に分解する。その分解に“ Ψ のせん断形成分を加えるべき”との視点と、Lateral 成分にも“ Φ の勾配の差の成分を加えるべき”との考えに到った。それらが共役変数である。

本稿はそれら視点・思考から、Helmholtz 分解の新たな適用法をまとめたものである。

2. 方法

(1) 有限要素および要素関数

変位を u_i , 速度は U_i で表し、3重1次要素とする。

別法⁽³⁾で、 $\Psi-U$ 法の概念は示した。本稿では Ψ にフィルター要素を適用するものである。

Ψ と U の違いは、 Ψ はひずみベクトル場のポテンシャルであり、境界条件なしで、無限遠点でゼロである。

対して U は、無限に広がる Ψ を、境界条件を設けて切り取って定義した変位である。単位は同じである。

Ψ は相対量(勾配)が問題であり、 $\Psi^{(000)}$ の連続性は必ずしも必要ではない。

固体とは異なり、流れ場は具体的には 3D しかないが、説明は 2D で可能な場合が多い。特に共役変数を導入すれば、2D モデルを容易に 3D 化できる。

例えば流れ関数同様 Ψ を $\Psi_3 \langle x-y \rangle$ 計算と見なし、 $\Psi_1 \langle y-z \rangle$, $\Psi_2 \langle z-x \rangle$ 計算を加えれば 3D となる。

そこで本稿では、2D → 3D 化の容易な箇所は 2D 説明で済ます。

関数表示は有限 Taylor 級数とし、式(1)に示す。{ }内は総和規約には依らず、ベクトル項を表す。

$$\mathbf{u}_i = \left\{ \frac{x^j y^k z^l}{j!k!l!} \right\}^T \cdot \left\{ \frac{\partial^{j+k+l} \mathbf{u}_i}{\partial x^j \partial y^k \partial z^l} \right\}_0 \quad (1)$$

導関数は $u_i^{(jkl)}$ で表すとし、式(2)に 2D の 2 次のケースを例示する。(j,k,l は x,y,z 軸それぞれの階数。)

$$\{u_i^{(jkl)}\}_0^T \equiv \{u_i^{(00)} u_i^{(10)} u_i^{(01)} u_i^{(20)} u_i^{(11)} u_i^{(02)} u_i^{(21)} u_i^{(12)}\}_0^T$$

$$\mathbf{u}_i = \left\{ 1, x, y, \frac{x^2}{2}, xy, \frac{y^2}{2}, \frac{x^2 y}{2}, \frac{xy^2}{2} \right\} \cdot \{u_i^{(jkl)}\}_0^T \quad (2)$$

フィルター関数は、有限 Taylor 級数の切片を $f^{(000)}|_{0=0}$ に固定して表す。

本稿では双 1 次フィルターは有限要素表示して、頂点ノード k のひとつを $f^{(000)}|_{k=0}$ に固定することで同等とする。

既報²⁾の Locking-free 有限要素とは、双 1 次要素のケースでは、ひずみ表示に関数のゆがみ項 $\{u_i^{(11)}\}_0$ を無視してせん断ロッキングを解消し、 \mathbf{u}^l と \mathbf{u}^T を分離要素とすることで体積ロッキングを解消する要素法である。本稿でも適用する。

ただ本稿では非圧縮として、Hodge の直交条件を満たすことで、 \mathbf{u}^l と \mathbf{u}^T を単一の \mathbf{u} 要素で表す。 \mathbf{u}^l と \mathbf{u}^T でその成分特性を表す。

(2) 添え字記号と新しい演算子、並びに共役変数

添え字は $(i=1,2,3)$ のほか、 $(i+1=2,3,1)$ ($i-1=3,1,2$) を適用する。すなわち、 $i+2=i-1, i-2=i+1$ である。これにより $curl$ などが添え字付きで容易に数式表示できる。また、スカラーを表す(と判定可能な)項は、総和規約による。

$\nabla \mathbf{u}$ の対角項を $\nabla_{diag} \mathbf{u}$ で表し、非対角項を $\nabla_{offd} \mathbf{u}$ で表す。

また、 $\nabla \mathbf{u}$ の対称テンソルと反対称テンソルの和分解形の表示に、式(3)のベクトル記号を定義する。

$$\nabla \mathbf{u} = \{ \nabla_{diag} \mathbf{u} + \nabla_{shr} \mathbf{u}, \nabla_{curl} \mathbf{u} \} \quad (3)$$

すなわち、回転とその成分ベクトルを式(4)で、せん断ひずみとその成分ベクトルを式(5)で表す、と定義する。

$$curl \mathbf{u} = \frac{\partial u_{i-1}}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{i-1}}, \nabla_{curl} \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_{i-1}}{\partial x_{i+1}} \\ -\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{i-1}} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$shr \mathbf{u} = \frac{\partial u_{i-1}}{\partial x_{i+1}} + \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{i-1}}, \nabla_{shr} \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_{i-1}}{\partial x_{i+1}} \\ \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{i-1}} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$\nabla^2_{diag}, \nabla^2_{offd}, \nabla^2_{curl}, \nabla^2_{shr}$ はいずれもベクトルを表すとする。

本稿ではスカラーにも、 $\{\phi, \phi, \phi\}$ としてベクトル演算子を適用する。(e.g. $div \phi \equiv \phi^{(100)} + \phi^{(010)} + \phi^{(001)}$)

その他、式(6)および式(7)の演算子を定義する。

$$imiu = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{i+1}}, \nabla_{imiu} \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{i+1}} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$nauu = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{i+1}}, \nabla_{nauu} \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ -\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{i+1}} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$shr \mathbf{u}$ と $curl \mathbf{u}$ は互いに共役変数である。 $imiu$ と $nauu$ も互いに共

役変数であり、式(8)と式(9)で対応付けられ、意義付けられる。

$$2 div \mathbf{u} = (u^{(100)} + v^{(010)}) + (v^{(010)} + w^{(001)}) + (w^{(001)} + u^{(100)}) \quad (8)$$

$$(u^{(100)} - v^{(010)}) + (v^{(010)} - w^{(001)}) + (w^{(001)} - u^{(100)}) = 0 \quad (9)$$

$\langle x-y \rangle$ 座標の法線応力と、 $\pi/2$ 回転した $\langle s-n \rangle$ 座標のせん断応力の関係式(10)は力学的に重要な式として知られている。

よって、共役変数 $(u^{(100)}, v^{(010)})$ は、 $\langle s-n \rangle$ 座標のせん断ひずみとして意義付けられる。

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\tau_{sn} \quad (10)$$

ラプラシアン $\nabla^2 \mathbf{u}$ の共役変数の、式(11)と式(12)なども調和式を解く上で重要である。

$$2\nabla^2 \mathbf{u} = (u^{(200)} + u^{(020)}) + (u^{(020)} + u^{(002)}) + (u^{(002)} + u^{(200)}) \quad (11)$$

$$(u^{(200)} - u^{(020)}) + (u^{(020)} - u^{(002)}) + (u^{(002)} - u^{(200)}) = 0 \quad (12)$$

共役変数 $shr \mathbf{u} : curl \mathbf{u}$ も式(8) : 式(9)同様に、対比して表せば分かり易い。すなわち、はじめに述べた研究の到達点として \mathbf{u}^l と \mathbf{u}^T をそれぞれ、6成分に分解するものである。

(3) 圧縮計算への拡張性

非圧縮変位ベクトル場 \mathbf{u} の \mathbf{u}^l 成分を $\nabla_{diag} \Psi$ で表し、 $\nabla \phi$ は圧縮成分のみ表すとする修正 Helmholtz 分解 ($iH-d$) 表示法を提案している。 Ψ 要素では圧縮方程式には $\nabla \phi + \Psi$ を代入して $\nabla \phi$ を求めることとなる。

すなわち、圧縮変位場は式(13)で表す。([Appendix-3] 参照のこと。)

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \Psi \quad (\nabla^2 \phi \neq 0) \quad (13)$$

圧縮成分の変位は $\nabla \phi$ で表すが、適合要素は C^1 連続を要す。非適合要素では \mathbf{u}^l 要素との、 $\phi - \mathbf{u}^l$ ハイブリッド要素法を適用して計算する。($curl \mathbf{u}^l = 0, shr \mathbf{u}^l = 0$)

(4) 基礎方程式

Navier-Stokes (NS) 方程式を式(14)とし、質量保存式を式(15)に、Bernoulli 関数式を式(16)に示す。(密度 : ρ , 速度 : \mathbf{U} , 圧力 : P , 粘性係数 : μ , 重力ポテンシャル : Ω .)

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} + \nabla P - \mu \nabla^2 \mathbf{U} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho div \mathbf{U} = 0 \quad (15)$$

$$\rho \frac{1}{2} \mathbf{U}^2 + P = \rho \Omega \quad (16)$$

(5) 数値計算スキーム

数値計算スキームの概要は、先ず時間ステップ ($n=0,1,2,\dots$) の $n=0$ で \mathbf{U} 要素に境界値を与えて初期分布を仮定し、ステップ n で式(14)を有限体積法で陽的に外挿し、 $n+1$ の初期値とする。すなわち n の空間数値微分値を代入して外挿する。

n のステップに戻れば、初期値 \mathbf{U} の分布は桁落ち誤差を含むので、その空間微分値としての誤差を緩和・排除して、式(14)の空間微分値として代入する。

その空間微分値誤差の緩和・排除スキームを述べる。

本稿では、① 桁落ちを緩和・排除するための共役変数最小化ステップを加える。(Ψ の特性を \mathbf{U} に反映させる。)

かつ、② $\nabla \phi$ で連続の式を、フィルター要素を介して高速に満たして行く。

上述 ①, ② によって桁落ち誤差を最小化するものであり, いずれもフィルター要素を適用するスキームである。

まず ① は, NS 方程式(14)の応力項は, 非圧縮では式(21)の 3 形式で表し得ることに基づく。([Appendix-4] 参照のこと。)

$$\left. \begin{aligned} 2\nabla_{diag}^2 \mathbf{U} + \nabla_{shr}^2 \mathbf{U} - \frac{2}{3}\nabla \operatorname{div} \mathbf{U} \\ = \nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{3}\nabla \operatorname{div} \mathbf{U} \\ = -\nabla_{curi}^2 \mathbf{U} + \frac{4}{3}\nabla \operatorname{div} \mathbf{U} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式(21)の変形は $\nabla \operatorname{div} \mathbf{U}$ の操作によるが, 座標回転の操作と解釈する。

それぞれ, せん断形, ラプラシアン形, および回転形と呼ぶ。一般には, 応力項は 3 形式のいずれか 1 形式のみで解く。その方法では, 精度保証つき計算法概念が必要となる。($\nabla \operatorname{div} \mathbf{U}=0$ がその役割を果たす, と既往の計算法から推測できる。)

Helmholtz 分解では, $\nabla \operatorname{div} \mathbf{U}$ の操作は $\nabla \nabla^2 \phi$ の操作である。式(21)の操作には $U^i \rightarrow U^j$ 変換が含まれているので, $\nabla^2 \phi=0$ が条件となる。

$\nabla^2 \phi=0$ は $\pi/2$ 回転した座標でも, $-\pi/2$ 回転した座標でも満たされなければならない。そのためには $\phi^{(10)}, \phi^{(01)}, \phi^{(10)}$ がいずれも $=0$ でなければならず, 回転した座標でも同様に ($\phi^{(01)}=0$) であるためには ($\phi^{(200)} - \phi^{(020)}=0$) etc. が満たされなければならない。

これが共役変数最小化の概念であるが, $\operatorname{curl} \mathbf{U}$ と $\operatorname{shr} \mathbf{U}$ との間などにも, 一般化して適用できる。

② は, MAC 法系統の方法では局所加速度項に含まれる $\nabla \phi$ 成分を offset して, 勾配 $\nabla \mathbf{U}$ はその数値微分誤差を残したまま適用する。それを, \mathbf{U} レベルの変数 Φ で $\operatorname{div} \mathbf{U}$ を直接 offset すべしとする主張である。かつ, Φ をフィルター要素として計算負荷を軽減する。

(6) フィルター要素数値計算スキーム

具体的には ① は, (A+B) と (A-B) を双対変数として, 式(22)のステップを加えるものである。([Appendix-5] 参照のこと。)

$$\int_{\Omega} [\delta A \cdot \{ \Delta A - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \} + \delta B \cdot \{ \Delta B - \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \}] d\Omega = 0, \quad (22)$$

$$\text{where } \int_{\Omega} [\delta \alpha \cdot \{ \alpha - (A - B)^{m-1} \}] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} [\delta \beta \cdot \{ \beta - (A + B)^{m-1} \}] d\Omega = 0$$

式(21)の U^T は, (A+B)= $\operatorname{shr} \mathbf{U}$ と (A-B)= $\operatorname{curi} \mathbf{U}$ であり, ΔA および ΔB は式(4), 式(5)に対応する増分 $\Delta \mathbf{U}$ である。($U^m = U^{m-1} + \Delta \mathbf{U}$) α および β をフィルター Ψ_i 要素で表す。

U^i に関しては, (A+B)= $\operatorname{imi} \mathbf{U}$ と (A-B)= $\operatorname{nai} \mathbf{U}$ であり, ΔA および ΔB は式(6), 式(7)による。式(21)では $\operatorname{div} \mathbf{U}$ の項である。 α および β はフィルター Φ 要素で表す。

圧力勾配は, 加速度項を $n-1 \sim n$ の差分値とし, 空間微分値は予測値を代入し, フィルター要素で予め計算して置く。かつ, その計算の増分 ΔP に桁落ち誤差修正項を, ペナルティ項として加えて解く。加速度項を $n \sim n+1$ とすれば, 反復計算を要す。(反復計算によって修正されるのは, 主として U^i 成分である。一様流中の翼周り計算など, 閉空間問題では微小である。)

なお, 速度は陽的に外挿する方法を示したが, ラプラシアン形 NS 方程式の仮想仕事式に, 圧力計算同様, 桁落ち防止スキームをペナルティ項として加えて解いてもよい。

Helmholtz 分解の共役変数を挙げれば式(23)となる。(γ や ω などのように常用記号の無い変数は演算記号のまま示した。かつ展開式は 2D で示した。)

目的変数	共役変数	
$\gamma: \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$	$\omega: \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}$	}
$\theta: \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$	$\operatorname{nai}u: \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$	
$\operatorname{imi}P: \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}$	$\operatorname{nai}P: \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$	

なお, \mathbf{U} の高次要素では $\nabla \operatorname{div} \mathbf{U}$ を offset するのが望ましい。そのためには圧力ポテンシャル p をフィルター要素で表して適用する。([Appendix-6] 参照のこと。)

3. ベンチマークテスト問題

共役変数は $\pi/2$ 回転座標系の表示式であることを述べた。概念は, 桑原邦郎氏が提案した多方向差分法に同じ, と考えている。

別稿にも示したが, 有限要素法では Fig.1 の幾何学的に $\langle s-n \rangle$ 座標系の要素関数を, $\pi/2$ 回転した $\langle x-y \rangle$ 座標系で表示して解くことと同じである。

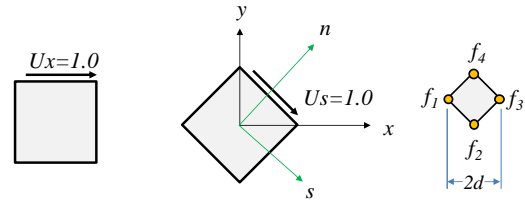


Fig.1 Bench-mark test problem

すなわち, 要素関数式(24)の連立方程式 $[A]\{U_{xy}\} = \{B_{xy}\}$ と要素関数式(25)の連立方程式 $[A_{sn}]\{U_{xy}\} = \{B_{sn}\}$ の和の連立方程式を解くことと同じである。

$$\left. \begin{aligned} u = u_0^{(00)} + u_0^{(10)}x + u_0^{(01)}y + u_0^{(11)}xy \\ v = v_0^{(00)} + v_0^{(10)}x + v_0^{(01)}y + v_0^{(11)}xy \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} u = u_0^{(00)} + u_0^{(10)}x + u_0^{(01)}y + u_0^{(20)}\frac{x^2}{2} + u_0^{(02)}\frac{y^2}{2} \\ v = v_0^{(00)} + v_0^{(10)}x + v_0^{(01)}y + v_0^{(20)}\frac{x^2}{2} + v_0^{(02)}\frac{y^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式(25)の係数項の導関数は, 式(26)でノードパラメータ表示する。ただし, $2d$ は正方要素の対角線長さである。

$$\left. \begin{aligned} f_0^{(00)} &= \frac{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}{4} \\ f_0^{(10)} &= \frac{f_3 - f_1}{2d} \\ f_0^{(01)} &= \frac{f_4 - f_2}{2d} \\ f_0^{(20)} &= \frac{f_3 - (f_2 + f_4)/2 + f_1}{d^2} \\ f_0^{(02)} &= \frac{f_4 - (f_1 + f_3)/2 + f_2}{d^2} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

4. まとめと今後の課題

- Helmholtz 分解は速度ベクトル場 \mathbf{U} を, 回転ゼロを代数的に満たす U^i 成分と, 体積率偏差ゼロを代数的に満たす U^j 成分に分解して表す。
- ただそれは, ポテンシャル表示した $x-y$ 座標系を, z 軸周りに回

転するなどして、その特性が表れる状態を示しているに過ぎない、ことを示した。

- 適合条件 / 平衡条件を一般化して満たすには、更に回転した座標系でも、両条件を満たさなければならない。それらを、共役変数の概念を導入して表示した。
- 一般にはせん断形など、1 の条件式のみで解く。したがって、 $\nabla \text{div} \mathbf{u} = 0$ が回転形の役割を果たしていると推測するが、解明には至っていない。
- 共役変数の概念は桁落ちの緩和・排除の方法として発想した。
- 結果として桁落ち誤差 ϵ は、*curl* と *shr* で表示されることから、2 つの回転座標系でのひずみエネルギー最小化は桁落ち誤差も最小化する。
- ポテンシャルは物理量を勾配で表し、その切片の値は問われない。本稿では、その特性をフィルター要素と呼んで活用し、局所的に計算して取り込む方法を提案した。
- 簡単なベンチマークテスト問題による検証が直近の課題である。

謝辞: Helmholtz 分解の有限要素法への適用の研究に関し、長年慶應義塾大学名誉教授 棚橋隆彦先生にアドバイスを頂いた。記して感謝の意を表します。

[Appendix-1] Helmholtz の定理の考察

数学ハンドブック(丸善)によれば、任意のベクトル場 \mathbf{V} は一般にスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\psi}$ によって

$$\mathbf{V} = \nabla \phi + \text{curl} \boldsymbol{\psi} \quad (\text{div} \boldsymbol{\psi} = 0)$$

$$\phi = - \iiint_V \frac{\text{div} \mathbf{V}}{4\pi r} dV, \quad \boldsymbol{\psi} = \iiint_V \frac{\text{curl} \mathbf{V}}{4\pi r} dV$$

のごとく表される。

この分解法は $\text{curl} \nabla \phi = 0, \text{div}(\text{curl} \boldsymbol{\psi}) = 0$ が代数的に満たされるように選んでいる。

デカルト座標で表し、座標回転すれば、回転や発散は必ずしも $= 0$ とはならない。

$\nabla \boldsymbol{\psi}$ の分解形は対称テンソルと反対称テンソルより成る。後者が Helmholtz 分解形の Transverse 成分に充てられている。

z 軸を法線とする平面内のスカラー ψ_3 の単純せん断; $\partial \psi_3 / \partial y$ と $\partial \psi_3 / \partial x$ の和を $-\pi/2$ 回転した y 軸への投影量が Helmholtz 表示形であり、 $\pi/2$ 回転した y 軸への投影量の回転や発散は必ずしも $= 0$ とはならない、ことを指す。(対称テンソルの非対角項。)

変位 \mathbf{u} の微分式 $f = \nabla \text{div} \mathbf{u} + \text{div}(\text{curl} \mathbf{u})$ は $\nabla \text{div} \mathbf{u}$ を作用させれば、ラプラシアン形やせん断形に変形できる。 \mathbf{u} に $\boldsymbol{\psi}$ を代入しても同様である。よって $\boldsymbol{\psi}$ をせん断形表示すれば、作用変数 $\text{div} \boldsymbol{\psi}$ には $\text{curl} \boldsymbol{\psi}$ 表示形を保証する特性が要求される。それが Coulomb ゲージと解釈する。原始変数法では連続の式である。

[Appendix-2] 数値微分誤差の考察と最小化

数値微分は基本的に差分計算である。ノード A の値 A_x と、ノード B の値 B_x の差を、間隔 h で除すことで得る。i.e.; $(A_x - B_x) / h$

関数の局所原点から遠く離れた 2 点では、差演算の桁落ち誤差は大きい。(乗・除算誤差は比較的小さい。)

2 点の値に ϵ_x が加わっていても $\langle i.e.; (A_x + \epsilon_x) - (B_x + \epsilon_x) \rangle$, 結果は変わらないが、 ϵ_x が桁落ちするからである。

かつ反復計算では、 ϵ_x が増大しない保証はない。

それを食い止めるには、反復計算で局所原点(local origin)の値が、global origin から離れて行くのを防ぐ他ない。(local origin はノード値で決まる。)

ϵ_x はノード A_x の嵩上げ分(下駄)であり、 $(A_x + \epsilon_x) + (B_x + \epsilon_x) \equiv R$ の値を最小化 ($R \rightarrow 0$) することで下駄の値を最小化 $2\epsilon_x \rightarrow 0$ して、増大しないよう保つ。($\rightarrow 0$ は最小 2 乗法などによることを表す。)

変分式に表れる $(A_x - B_x)$ を目的変数、 $(A_x + B_x)$ を共役変数と呼ぶものである。

$(A_x + B_x)$ が目的変数の変分式では、 $(A_x - B_x)$ を共役変数と呼ぶ。 ϵ_x の値は予め分らないから、共役変数を最小化する。

[Appendix-3] 変形と体積変化、並びに共役変数

Transverse(横)成分の変形はせん断ひずみ・回転(剛体回転)であり、体積変化しない特性を有す。

Lateral(縦)成分の変形は法線(直)ひずみであり、ここでは体積変化無しの変形に留まる状態と、その後体積変化する場合がある、と考える。

3D は 2D の和で表されるので、以下 2D で示す。2D は 3D の断面であるが、アイソメトリック投影面なので体積と記す。

スカラー f のゆがみ項 $f^{(1)}$ は体積変化しない。(単純せん断)

f のラプラシアン $f^{(20)} + f^{(02)}$ は体積変化を表す。(圧縮・膨張)

ラプラシアンの共役変数 $f^{(20)} - f^{(02)}$ は $-\pi/2$ 回転座標上のゆがみ項 $f_{sn}^{(1)}$ に等しい。($f^{(1)}$ は $\pi/2$ 回転座標上の $(f^{(20)} - f^{(02)})_m$ に等しい。)

Helmholtz 分解 $\mathbf{u} = \nabla \phi + \text{curl} \boldsymbol{\psi}$ の、Lateral 成分 $\nabla \phi$ の回転は代数的に $= 0$ となり、 $\text{curl} \boldsymbol{\psi}$ の発散は代数的に $= 0$ となる。

分解を変位要素で表示し、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}^L + \mathbf{u}^T$ とすれば、その特性が裏目に出て、 \mathbf{u}^L に含まれる $\phi^{(1)}$ 成分と、 \mathbf{u}^T に含まれる $-\phi^{(1)}$ 成分とは互いに独立なので、回転が $= 0$ となる保証は無くなくなる。

\mathbf{u}^T に含まれる $\psi^{(1)}$ と、 \mathbf{u}^L に含まれる $-\psi^{(1)}$ の関係も同様である。それらが独立して成長すれば、数値的発散(桁落ち)の原因となる。

それらに元の特性を取り戻させるには、先ず作業用の ϕ 要素に、 $(\phi^{(20)} - \mathbf{u}^L \rightarrow 0)$ 、 $(\phi^{(02)} + \mathbf{u}^L \rightarrow 0)$ 、 $(\phi^{(1)} - \mathbf{u}^T \rightarrow 0)$ 、 $(\phi^{(1)} + \mathbf{u}^T \rightarrow 0)$ で揃い上げる。

上述では分離要素としたが、 \mathbf{u}^L は非圧縮とするので Hodge の条件を満たし、 \mathbf{u} 要素単独で表す。

[Appendix-4] ベクトル場の力学的分解と Helmholtz 分解

Navier-Stokes 方程式(コーシーの運動方程式)は応力項を法線応力とせん断応力に分解して表す。ニュートン流体では粘性係数を介して、法線ひずみとせん断ひずみに分解して表わせる。

力学的特性として、法線ひずみは圧縮性と非圧縮性の両特性を有す。対してせん断ひずみは非圧縮のみである。

せん断ひずみはスカラー u_i の単純せん断の和で定義される。単純せん断の形状は平行四辺形であり、体積変化はゼロであることによる。

Helmholtz 分解はベクトル場を Lateral 成分と Transverse 成分に分解して表す。前者は圧縮性と非圧縮性の両特性を有し、後者は非圧縮のみであり、かつ代数的に非圧縮性を満たすことから、ひずみを表すにはたいへん都合よい。

すなわち、ポテンシャル $\nabla \phi$ と $\text{curl} \boldsymbol{\psi}$ で、 $\boldsymbol{\epsilon} = \nabla^2 \text{diag} \phi, \boldsymbol{\gamma} = \text{shr}(\text{curl} \boldsymbol{\psi})$ で表わせば都合がよい。

ただし、デカルト座標で成り立つそれら特性は、 $\pm \pi/2$ 回転しても成り立たなくては、一般性はない。

変位ベクトル場 \mathbf{u} も同様であり、 $x-y$ 座標上の $\mathbf{u}^L, \mathbf{u}^T$ は、 z 軸周りに $\pi/2$ 回転した $s-n$ 座標上では、2D 表示して、

$$u_s^L = (\varphi^{(10)} + \varphi^{(01)}) / \sqrt{2}, \quad v_n^L = (\varphi^{(10)} - \varphi^{(01)}) / \sqrt{2}$$

$$u_s^T = (\psi^{(01)} - \psi^{(10)}) / \sqrt{2}, \quad v_n^T = (\psi^{(01)} + \psi^{(10)}) / \sqrt{2}$$

であり、適合性(条件)は $x-y$ 座標系と同等に満たされなければならない。

らない。要素間適合条件式は $(\Delta \mathbf{u}_{sr}^L \Rightarrow 0)$, $(\Delta \mathbf{u}_{sr}^T \Rightarrow 0)$ である。

ひずみベクトル場 $\mathbf{V} = 2\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\gamma}$ は $=2\nabla_{\text{imi}} \nabla \phi + \text{shr}(\text{curl} \boldsymbol{\psi})$ で表される。 $\pi/2$ 回転した $s-n$ 座標上では、

$V_{sn} = 2\nabla_{\text{imi}} \mathbf{u}_{sn}^L + \text{shr} \mathbf{u}_{sn}^T$ であり、 $\mathbf{u}_{sn}^L, \mathbf{u}_{sn}^T$ にはそれぞれ $\pi/2$ 回転したポテンシャル表示形を代入して表せる。

すなわち、 $V_{sn} = 2\text{imi} \text{nai} \phi + \text{shr}^2 \boldsymbol{\psi}$ であり、 $(\partial/\partial x + \partial/\partial y) \text{nai} \phi = \text{nai}^2 \phi$ に留意すれば、 $=2\text{nai}^2 \phi + \text{shr}^2 \boldsymbol{\psi}$ である。

平衡式の応力項 $\mu(2\nabla_{\text{diag}}^2 \mathbf{u}^L + \text{shr}^2 \mathbf{u}^T - 2/3 \nabla \text{div} \mathbf{u}^L)$ は $\nabla \text{div} \mathbf{u}^L$ を作用させて、 $\mu(\nabla^2 \mathbf{u} + 1/3 \nabla \text{div} \mathbf{u})$ に変形でき、更に $\mu(-\text{curl}^2 \mathbf{u} + 4/3 \nabla \text{div} \mathbf{u})$ に変形可能なことは広く知られている。 (\mathbf{u}^T) に着目して順に、せん断形、ラプラシアン形、回転形、と呼ぶ。

ただ、それらを恒等式と呼ぶ書籍もあるが、Helmholtz 分解の観点からは、非圧縮成分に限られることは明らかであろう。

かつ、座標回転して表した 3 式であり、 $\nabla \text{div} \mathbf{u}$ は回転作用素である。

よって、いずれの式でも平衡式を満たさなくてはならない。特にせん断形と回転形は、互いに $\pi/2$ 回転した座標上の表示形であり、両式を数値的 (最小 2 乗的) に満たす必要がある。

\mathbf{u}^L に着目すれば、 $\text{imi} \mathbf{u}^L$ 表示項と、 $\text{nai} \mathbf{u}^L$ 表示項の適合条件を満たさなければならない点と、同様の応力項の平衡条件を満たさなければならない点は、従来にない指摘である。

$\nabla \mathbf{u}$ の対角項を、 $\text{imi} \mathbf{u} + \text{nai} \mathbf{u}$ に和分解して、それぞれの項で平衡条件を満たすべし、とするものである。

上述は桁落ち (spurious) 誤差の緩和・排除の観点からも説明でき、かつ要求される。

[Appendix-5] 桁落ち誤差の最小化

スカラーの勾配 ∇f の数値微分の桁落ち誤差 e を、 $=\{u, v\}$ の適合誤差で考える。

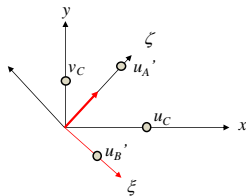
$\langle x-y \rangle 2D$ の変位を $\{u, v\}$, θ 回転した変位を $\{u', v'\}$ とし、 $\theta_A = \pi/2$ 回転変位を $\{u', v'\}_A$, $\theta_B = -\pi/2$ 回転変位を $\{u', v'\}_B$ で表す。

変位に誤差 e が $\{u+e_A, v+e_A\}, \{u+e_B, v+e_B\}$ の 2 パターンで混入していたとする。ただし、 $e_A > 0, e_B > 0$ 。

任意の誤差 e は e_A と e_B の和と差の組み合わせで表わせる。

$\mathbf{u}' = \{\cos \theta, \sin \theta\} \cdot \{u, v\}^T$, $\mathbf{v}' = \{-\sin \theta, \cos \theta\} \cdot \{u, v\}^T$ であるから、 e_A は $\{u', v'\}_A$ では u' 値でしか検出されず、 v' では相殺される。 e_B は $\{u', v'\}_B$ で同様である。

$\mathbf{u}'_B, \mathbf{u}'_A$ は直交しているから、直交座標 $\langle \xi - \zeta \rangle$ 上のパラメータ $\{\xi, \zeta\}$ との差を最小化 ($\xi - u'_B \Rightarrow 0$), ($\zeta - u'_A \Rightarrow 0$) することで、桁落ち誤差も最小化 ($2e_B \Rightarrow 0$), ($2e_A \Rightarrow 0$) する。



すなわち、 $(\xi - (u+v) \Rightarrow 0)$, $(\zeta - (u-v) \Rightarrow 0)$ を計算する。

次いで、 $\{\xi, \zeta\}$ を $\langle x-y \rangle$ 座標で表した $\{u, v\}_c$ と、元の $\{u, v\}$ との差を最小化 $(u - (\xi + \zeta)/2 \Rightarrow 0)$, $(v - (\xi - \zeta)/2 \Rightarrow 0)$ することで、桁落ち誤差を緩和・排除する。

すなわち、 $(f^{(10)} - (\xi + \zeta)/2 \Rightarrow 0)$, $(f^{(01)} - (\xi - \zeta)/2 \Rightarrow 0)$ で計算する。

$\alpha^{(10)+\alpha^{(01)}} \equiv (u+v)$, $\beta^{(10)+\beta^{(01)}} \equiv (u-v)$ と置いて、 $\{\alpha, \beta\}$ 要素をそれぞれ f 要素から計算する。ただし、 $\{\alpha, \beta\}$ 要素それぞれノードのひとつは固定する。

よって、スカラー f 要素から桁落ち誤差を最小化した f 要素の

数値微分値 ∇f は、 $f^{(10)} = (\alpha + \beta)^{(10)}$, $f^{(01)} = (\alpha - \beta)^{(01)}$ の右辺を適用することで得る。

$\{\alpha, \beta\}$ 要素は、適合誤差最小、かつ桁落ち誤差最小のフィルターの役割を果たしている。

流れ関数 ψ のケースでも、単なるスカラーの数値微分誤差 $f \equiv \psi$ で考える。

ラプラシアン $\nabla^2 f$ ($\equiv \text{imi}^2 f$) の数値微分では、 $\text{nai}^2 f \equiv f^{(20)} - f^{(02)}$ を共役変数として、 $u \equiv f^{(20)}, v \equiv f^{(02)}$ にそれぞれ 2 パターンの誤差 e が含まれるとして考える。

$\alpha : (f^{(20)} + f^{(02)})$, $\beta : (f^{(20)} - f^{(02)})$ をフィルターとして、同様に桁落ち誤差を最小化する。

[Appendix-6] 圧力ポテンシャル p

圧力 P は法線応力平均として定義され、体積粘性率を $=-2/3\mu$ と置く根拠となっている。圧力は応力であるが、これにより体積率偏差と関係付けられ、圧力ポテンシャル $p = -2/3 \text{div} \mathbf{U}$ を考えることができる。

3 重 3 次要素に絞れば、 $\nabla(p + 2/3 \text{div} \mathbf{U}) = \mathbf{0}$ の速度はゆがみ項のみとなる。

したがって、残差の共役変数の条件式は $\text{nai} p + \text{nai} 2/3 \text{div} \mathbf{U} = \mathbf{0}$ となる。よって、圧力ポテンシャル p を介して $\nabla \text{div} \mathbf{U} = \mathbf{0}$ を数値的に満たすことができる。

参考文献

- (1) 今村, "修正 Helmholtz 分解に基づくひずみ要素、並びにひずみ法," 第 31 回数値流体力学シンポジウム論文集, 講演番号 A08-1, (2017).
- (2) 今村, "修正 Helmholtz 分解要素を用いる Locking-free FEM," 日本流体力学会年会 2019 論文集, (2019).
- (3) 今村, "共役変数を介する数値微分最小化と $\psi-\omega$ 法への適用例、並びに $\Psi-U$ 法のコンセプト," 第 33 回数値流体力学シンポジウム論文集, 講演番号 D04-2, (2019).