時空間反転対称性無減衰・安定スキームの 1次元移流方程式に対する検討

Study of Space-Time Reversal Symmetry Scheme for 1D Advection Equation

○ 飯塚幹夫，九州大学　情報基盤研究開発センター, 819-0385 福岡県福岡市西区元岡 744,
E-mail：iizuka.mikio.903@m.kyushu-u.ac.jp
小野謙二，九州大学　情報基盤研究開発センター, 819-0385 福岡県福岡市西区元岡 744,
E-mail：keno@cc.kyushu-u.ac.jp
Mikio Iizuka, Research Institute for Information Technology, 744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0385
Kenji Ono, Research Institute for Information Technology, 744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0385

移流方程式は時空間反転対称性を有している．そこで今回は，時空間反転対称性を有する離散化移流スキームの無減衰・安定性を調べたので報告する．Parallel-in-time integration is desired for cases in which simulation requires long time span integration or more acceleration after the space parallel acceleration is saturated. However, the convergence of the parareal method for hyperbolic PDEs is worse than that for parabolic PDEs. Then, many methods have been proposed to improve the convergence of the parareal method for hyperbolic-PDEs. Therefore, in this presentation, we show the evaluation of improvement method of the convergence for advection equation via numerical test.

1.　初めに

本研究の動機はとても素朴な疑問である．移流方程式は時空間反転対称性という性質を持ち，それゆえ特性曲線上で物理量の振幅が保存される．

「では，離散化空間上で時空間反転対称性をもつ計算法．は，振幅を保存するであろうか？」

という疑問である．例えばこの条件を満たすスキームに勾配法がある．空間項を中心差分で，時間項を Crank-Nicolson 法で離散化したものは確かに振幅保存（無減衰）である．従って，離散化空間上で時空間反転対称性をもつ一般的な計算法を構築することには意義があるし，著者の他研究ともからみ興味がある．その一般化された計算法はすでに渡部により提案されている時空間反転対称性スキーム（STRS スキーム：Space-Time Reversal Symme-try Scheme）[1] である．

一方，すでに無減衰スキームについては，移流項について歪対称性を持つ計算法がよく研究されている [2],[3]．また，現在のように計算機性能が高い環境では空間分解能を高めればほとんどの場合は問題ないといえる状況といえる．

したがって，さらに無減衰なスキームを検討することの必要性は低くなってしまった状況である．ではなぜここでまた STRS スキームを検討するのか．それには 2 つの理由がある．

(1) Parrareal 法による時間並列計算法を双曲型 PDEs に適用する場合，Fine/Coarse soler 間の位相差が収束を困難とする．そこで位相精度のよい CIP 法に無減衰なスキームを適用してより位相精度を上げたい．しかし，移流項について歪対称性を持つ計算法を CIP 法に適用する方法がよく分からなかった．

(2) そこで，より単純な時空間反転対称性をもつ計算法である STRS スキームに興味を持った．

そして，実際に 1 次元の移流方程式で試すとこれまでに提案されている移流項の計算法 (線形) は簡単に STRS スキームに変換でき無減衰であった．そこで，CIP 法に STRS スキームを適用した．結果は期待に反してうまく動作しない，バグの可能性もまだある．このような状況であるが途中経過という意味で今回は報告しておく．

本講演では，初めに上記で述べたような研究の背景を述べ、次に STRS スキームについて説明する．そして，れまでに提案されている移流項の計算法を STRS スキームに変換したスキームの計算例を示し，その後のいまだ問題のある CIP 法の STRS スキームの形を示す．最後にまとめと今後研究方向について述べる．

2.　STRS スキーム

STRS スキームは，移流方程式の時空間反転対称性の性質を利用し振幅の無減衰計算法を構築するものである．時空間反転対称性とは，具体的には式（3）のパリティ変換の下で式（1）と式（2）は等価であり，これが振幅の保存を保証するというものである．

$$\partial_t \phi + c(x,t)\partial_x \phi = 0 \tag{1}$$

$$\partial_{t'} \phi + c(x',t')\partial_{x'} \phi = 0 \tag{2}$$

$$x' = x, \quad t' = -t \tag{3}$$

対流形の移流計算法で，Upwind:　1st order，Lax-Wndroff: 2nd order，QUICK: 2nd order，QUICKEST: 3rd order，Upwind: 3rd order，Kawamura and Kuwahara: 3rd order，Central : 4th order 等は次のように一般形で書ける．

$$\phi_i^n = \phi_i^{n-1} + S\zeta_F \Sigma_{l=-m^-}^{+m^+} a_l \phi_{id+ls(c)}^{n-1} \tag{4}$$

ここで，$s(c) = sign(1.0, c)$, $id^{\pm} = i \mp \mathrm{INT}\left(\frac{\mathrm{c\Delta t}}{\Delta \mathrm{x}}\right)$, $\zeta_{\mathrm{F,i}} = \frac{-\mathrm{s(c)|c|\Delta t + (x_i + x_{ida+})}}{-\mathrm{s(c)\Delta x}}$ である．この上流法の上流差分法の一般形に対して STRS 法は，離散化空間での以下のパリティ変換（式 (5)）を使いまた位相変化から Δt の調整を行い式 (6) と書ける．

$$P : \begin{pmatrix} n-1 \\ m^{\mp} \\ id^{+} \\ l \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} n \\ m^{\pm} \\ id^{-} \\ -l \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\phi_{id^-}^n + S\zeta_F \Sigma_{l=-m^+}^{+m^-} a_l \phi_{id^- - ls(c)}^n \\ &= \phi_{id^+}^{n-1} + S\zeta_F \Sigma_{l=-m^-}^{+m^+} a_l \phi_{id^+ + ls(c)}^{n-1} \end{aligned} \tag{6}$$

ここで，ζ_F, m, $id^{\pm}$ は移流方向の Back-Trace 点の記述パラメータである．式 (6) が時空間反転対称なのは明らかである．

3. STRS スキームの計算例

計算例は最も単純な移流速度 $c = 1.0$ で移流する sin 波の移流問題を扱った．初期値を $\phi(x) = \sin(2\pi m\Delta x((i-1)+0.5))(m = 10$ の場合は 10 grids/波，$m = 20$ の場合は 5 grids/波) として，時空間領域 $x = [0, 2], t = [0.0.5]$ に対して離散幅　$dt = 0.001, \Delta x = 0.01$ とする，この時 CFL=1 である．その結果を図-1 に示す．風上 1 次，河村・桑原スキーム，TVD 3rd，CIP3rd の場合は 5 サイクル後に減衰が明らかに見える（図-1(a),(b)）．風上 1 次ではほぼ振幅がゼロ，CIP3rd でも振幅の減衰が見えてしまう．一方，STRS スキーム化された風上 1 次，河村・桑原スキーム，中心差分の場合は明らかに振幅の減衰はない（図-1(c)）．

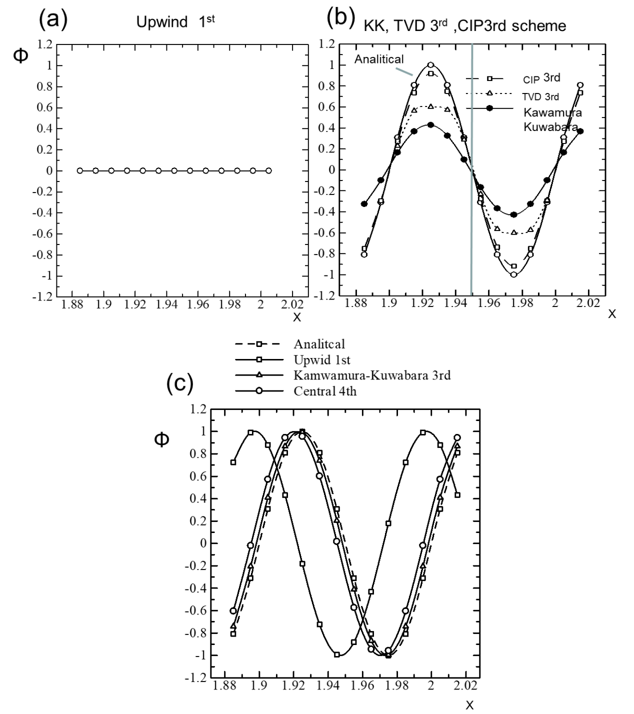

Fig. 1: 1D advection result of sin wave by STRS scheme

4. CIP3rd の STRS スキーム

CIP3rd の STRS スキームは以下のように構成出来る．式から明らかに時空間反転対称である．しかし、実際にはうまくいかない．まだバグがあるかもしれないし，何か条件が足りなのかもしれない．今後の課題である．

$$
(\mathbf{I}+\mathbf{a})\begin{pmatrix}\phi\\ D_F g\end{pmatrix}^{n}_{id^-} + \mathbf{b}\begin{pmatrix}\phi\\ D_F g\end{pmatrix}^{n}_{id^-+s(c)} = (\mathbf{I}+\mathbf{a})\begin{pmatrix}\phi\\ D_F g\end{pmatrix}^{n-1}_{id^+} + \mathbf{b}\begin{pmatrix}\phi\\ D_F g\end{pmatrix}^{n-1}_{id^+-s(c)} \tag{7}
$$

$$
D_F = -s(c)\Delta x \tag{8}
$$

$$
D_R = +s(c)\Delta x \tag{9}
$$

$$
\mathbf{a} = \left[\begin{array}{c|c} 2\left(\frac{\xi}{D}\right)^3_* - 3\left(\frac{\xi}{D}\right)^2_* & \left(\frac{\xi}{D}\right)^3_* - 2\left(\frac{\xi}{D}\right)^2_* + \left(\frac{\xi}{D}\right)_* \\ \hline 6\left(\frac{\xi}{D}\right)^2_* - 6\left(\frac{\xi}{D}\right)_* & 3\left(\frac{\xi}{D}\right)^2_* - 4\left(\frac{\xi}{D}\right)_* \end{array}\right]
$$
$$
\mathbf{b} = \left[\begin{array}{c|c} -\left\{2\left(\frac{\xi}{D}\right)^3_* - 3\left(\frac{\xi}{D}\right)^2_*\right\} & \left(\frac{\xi}{D}\right)^3_* - \left(\frac{\xi}{D}\right)^2_* \\ \hline -\left\{6\left(\frac{\xi}{D}\right)^2_* - 6\left(\frac{\xi}{D}\right)_*\right\} & 3\left(\frac{\xi}{D}\right)^2_* - 2\left(\frac{\xi}{D}\right)_* \end{array}\right] \tag{10}
$$

5. まとめと今後

STRS スキームはパリティ変換だけで既存の移流スキーム（線形）を無減衰化できることが分った．しかし，目標の CIP 法の無減衰化には成功していない．本研究では，今後，さらに検討を進める予定である．

謝辞

本研究は，文部科学省ポスト「京」重点課題 8「近未来型ものづくりを先導する革新的設計・製造プロセスの開発」の一環として実施したものです。本論文の結果（の一部）は、理化学研究所のスーパーコンピュータ「京」を利用 して（課題番号:hp170238, hp180171, hp190197），また JSPS 科研費，PJ17H01750 の助成を受けて得られたものです．

参考文献

(1) K. Watanabe. a novel framework to construct amplitude preserving wave propagation schemes. pages 123?124, 2010. Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, Annual meeting.

(2) E. Tadmor, Skew-Selfadjoint Form for Systems of Conservation Laws, J. Math. Ana. Appl. 103 (1984), p428.

(3) Y. Morinishi and T. S. Lund and O. V. Vasilyev and P. Moin, Fully conservative higher order ?nite difference schemes for incompressible ?ow JCP 143 (1998), p90.