

壁関数モデルを用いた格子ボルツマン法による 高レイノルズ数乱流熱流動解析

High Reynolds number turbulent heat transfer simulation by lattice Boltzmann method with wall-function

- 桑田 祐丞, 阪府大, 大阪府堺市中区学園町 1 番 1 号, E-mail : kuwata@me.osakafu-u.ac.jp
須賀一彦, 阪府大, 大阪府堺市中区学園町 1 番 1 号, E-mail : suga@me.osakafu-u.ac.jp

Yusuke Kuwata, Osaka Prefecture University, Saka, Osaka, Japan
Kazuhiko Suga, Osaka Prefecture University, Saka, Osaka, Japan

This study discusses an implementation of the wall-function to the lattice Boltzmann method to simulate higher Reynolds number turbulent heat transfer. The wall shear stress and heat flux are given based on the law of the wall, and those are introduced with the virtual nodes in the wall which allows the weak slip velocity at the wall surface. The developed method is validated against turbulent channel flows, turbulent pipe flows, and turbulent periodical hill flows. It is confirmed that the developed method yields satisfactory results even at very high Reynolds number flows. In addition, the developed method can successfully deal with the complicated geometry.

1. 研究背景

設計開発の分野では、これまでレイノルズ平均モデルを用いた乱流熱流動解析が広く行われてきたが、近年の計算機技術の目覚ましい発展に伴い、LES (Large eddy simulation) による高精度な非定常解析が行われつつある。しかし、LES 解析は壁面近傍の微細な乱流構造を捉えるための緻密な計算格子が必須である。加えて、LES 解析には乱流変動を捉えるだけの十分に広い三次元計算領域が必要であるため、非常に多くの計算格子点を必要とする。また、レイノルズ数の上昇とともに壁面近傍の乱流渦構造は微細化するため、高レイノルズの複雑流動場の LES 解析は非常に細密な計算格子を壁面近傍に設定する必要があり、結果として膨大な計算格子点を必要とする。この問題点を克服するために、壁関数法を用いて壁面近傍の乱流量をモデル化することで壁面近傍の計算格子点数を減らす取り組みが行われてきた。

有限差分法や体積法を用いた LES 解析が古くから行われているいっぽうで、近年では格子ボルツマン法がこれらの手法に代わる乱流解析法として注目を集めている。格子ボルツマン方程式は並進運動と衝突演算とで記述されており、時間発展アルゴリズムは極めてシンプルで計算密度が高いため並列計算に優れている。さらに、圧力場に関してポワソン方程式を解く必要がないため、大規模並列計算に特に優れているといえる。

これまで、格子ボルツマン法を用いた乱流熱流動の LES 解析が広く行われてきたが、工学的な乱流熱流動解析に必須ともいえる壁関数の導入法が確立されていない。そこで本研究では、壁関数法を格子ボルツマン法に導入するための新たな手法の提案を行い、開発した手法を用いて種々の流れ場において高レイノルズ数乱流解析を行い、提案手法の評価を行う。

2. 格子ボルツマン法

格子ボルツマン法は流体を仮想粒子の集合体とみなし、格子ボルツマン方程式をもとにその密度分布関数の時間発展を解くことで流体運動を解析する手法である。本研究では、速度場に対し三次元 27 方向速度多緩和時間格子ボルツマン法⁽¹⁾を用い、温度場には三次元 19 方向速度正規化格子ボルツマン法⁽²⁾を用いる。以下にこれらの手法について簡単に記述する。

2.1 三次元 27 方向速度多緩和時間格子ボルツマン法

三次元 27 方向速度多緩和時間格子ボルツマン法における密度分布関数 f の時間発展方程式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}_i + \mathbf{e}_\alpha \delta t, t + \delta t) - f(\mathbf{r}_i, t) = & -\mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{S}} [\mathbf{m}(\mathbf{r}_i, t) - \mathbf{m}^{eq}(\mathbf{r}_i, t)] \\ & + \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{I} - \frac{\hat{\mathbf{S}}}{2} \right) \mathbf{M} | \mathbf{F}(\mathbf{r}_i, t) \delta t, \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 δt は時間刻み、 \mathbf{e}_α は粒子ベクトル、 \mathbf{F} は体積力、 \mathbf{I} は単位行列を表す。分布関数は、 27×27 の変換マトリクス \mathbf{M} によってモーメント \mathbf{m} に変換され、 \mathbf{m}^{eq} は平衡モーメントを表す。緩和マトリクス $\hat{\mathbf{S}} = \text{diag}(s_1 \cdots s_{27})$ は安定性を考慮し Suga ら⁽¹⁾により定められたものを用いる。なお緩和マトリクスの成分である s_5, s_7 は動粘度と関連付けられており、以下のように表される。

$$\nu + \nu_{SGS} = c_s^2 \left(\frac{1}{s_5} - \frac{1}{2} \right) \delta t = c_s^2 \left(\frac{1}{s_7} - \frac{1}{2} \right) \delta t, \quad (2)$$

ここで、 c_s は格子ボルツマン法における音速、 ν は分子動粘性係数、 ν_{SGS} はサブ・グリッド・スケール渦動粘度であり、本研究では Shear-Improved Smagorinsky model⁽³⁾により与えた。

2.2 三次元 19 方向速度正規化格子ボルツマン法

三次元 19 方向速度単一緩和時間モデルにおける密度分布関数の時間発展方程式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} | g(\mathbf{r}_i + \xi_\alpha \delta t, t + \delta t) \rangle & = | g^{eq}(\mathbf{r}_i, t) \rangle + \left(1 - \frac{1}{\tau_g} \right) | \hat{g}'(\mathbf{r}_i, t) \rangle \\ & + | \mathbf{S}(\mathbf{r}_i, t) \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 g^{eq} は平衡分布関数、 \hat{g}' は正規化を施した密度分布関数の非平衡分布関数、 \mathbf{S} はソース項を表す。温度拡散係数は分子拡散係数 α_0 と、サブ・グリッド・スケール乱流拡散係数 α_{SGS} との和で $\alpha = \alpha_0 + \alpha_{SGS}$ と表され、緩和時間 τ_g と以下のように関連付けられている。

$$\alpha = c_s^2 \left(\tau_g - \frac{1}{2} \right) \delta t. \quad (4)$$

なお、サブ・グリッド・スケール乱流拡散係数 α_{SGS} は、サブ・グリッド・スケール乱流プラントル数 $Pr_{SGS} = 0.9$ として $\alpha_{SGS} = \nu_{SGS} / Pr_{SGS}$ のように定めた。

3. 壁関数法の実装

壁関数法は壁面隣接ノード点において、壁面上の速度を零として差分近似された壁面せん断応力を与える代わりに、壁関数で求めた壁面せん断応力を与えて解析を行う手法である。有限差分法・体積法に壁関数法を実装する際、壁関数で求めた壁面せん断応力を差分式に代入する他に、適切な壁面滑りを導入することで壁面せん断応力を修正する方法などがある⁽⁴⁾。

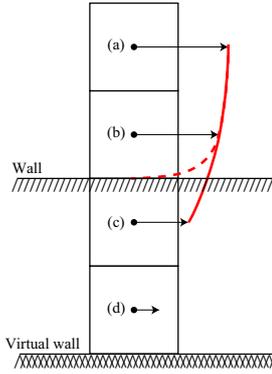


Fig. 1: Grid arrangement near a wall.

いっぽう、格子ボルツマン法に壁関数を導入する際には、質量・運動量等の保存則を担保しつつ適切な壁面せん断応力を付与するために、壁面ノードから流体ノードに向かうすべての分布関数成分を修正する必要があるが、これは容易なことではない。さらに滑り速度を与える方法に関しても、複雑な形状を持つ壁面上に保存則を担保させつつ滑り速度を与えることは難しく、有限差分法・体積法と同様の方法での実装は困難である。

そこで、本研究では、図 1 に示すように壁面内部に仮想ノード点(図中ノード点 (c), (d)) を設け、壁面内部まで流体計算を行うことで、壁面上に疑似的な滑り速度を与える方法を考案した。壁面隣接ノード点(ノード点 (b)) では壁面から流体ノードに向かう分布関数に対して跳ね返り条件を与えず、他の流体ノード同様に格子ボルツマン方程式の時間発展を解く。なお、壁面に埋め込まれた仮想ノード点 (c), (d) についても流体ノード同様に時間発展方程式を解くが、壁面内には仮想壁面を新たに用意し、仮想壁には跳ね返り条件を用いて滑りなし条件を与える。

壁面隣接ノード点 (b) では、モーメントムエクステンジ法⁽⁵⁾を用いて壁面から受けるせん断力 $F_i^{M.E.}$ を評価し、 $F_i^{M.E.}$ を壁関数で求めた壁面せん断応力 $\tau_i^{W.F.}$ に置き換えることで、壁面せん断応力の修正を行う。すなわち、体積力 Fv_i を

$$Fv_i = -F_i^{M.E.} + \frac{A\tau_i^{W.F.}}{\rho V}, \quad (5)$$

として、格子ボルツマン方程式 (1) の外力項 \mathbf{F} に付与する。ここで、 A は壁面隣接ノードにおいて壁面せん断応力が生じる面積、 V はノード点のセル体積を示す。なお、本研究では、壁面せん断応力 $\tau_i^{W.F.}$ はノード点 (a) の速度が、Musker の経験式⁽⁶⁾に整合するように与えた。

温度場においては、仮想壁隣接のノード点 (d) に断熱境界条件を与え、壁面隣接ノード点 (b) に壁関数で求めた壁面熱流束 q_w を以下のようにエネルギー生成項として計算し、

$$S_v = \frac{Aq_w}{\rho c_p V}, \quad (6)$$

格子ボルツマン方程式 (3) のソース項 \mathbf{S} に与える。ここで、 c_p は比熱を表している。壁面熱流束 q_w はノード点 (a) の温度が、Kader の経験式⁽⁷⁾に整合するように求めた。なお、仮想ノード点の埋め込み点数に関しては、任意の点数を埋め込むことが可能であるが、本研究では 2 点埋め込んで解析を行った。

4. 二次元平行平板チャネル乱流

開発した手法の基礎的な評価を行うために、二次元平行平板チャネル乱流の LES 解析を行った。計算領域は、

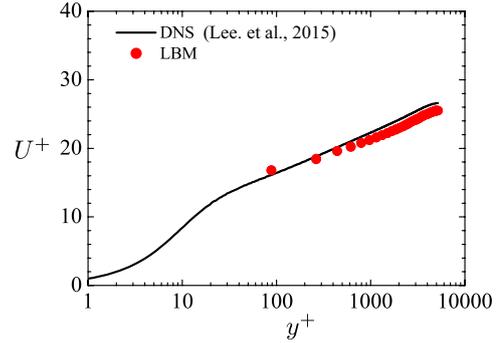


Fig. 2: Comparison of the mean velocity profile with the DNS data^(**)

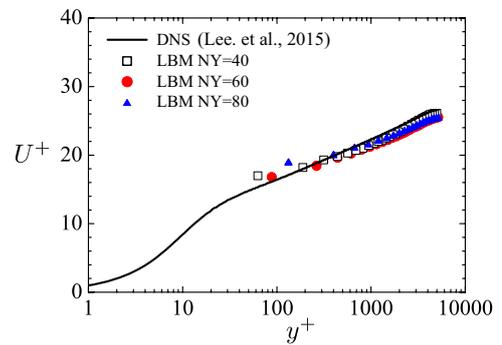


Fig. 3: Predicted mean velocity profile with different grid resolutions.

チャネル幅 2δ に対して主流方向に 6δ 、スパン方向に 3δ とした。主流・スパン方向には周期境界条件を課しており、主流方向に圧力差を付与することで流体を駆動した。また、熱的境界条件として、壁面熱流束一定として解析を行った。摩擦レイノルズ数は 5200 としており、壁面垂直方向 y に対して格子数 $NY = 40, 60, 80$ として解析を行うことで、格子解像度の影響を調査した。また、 $NY = 60$ のケースにおいては、プラントル数を 0.1 から 100 まで変化させた解析を行った。

図 2 に摩擦速度で無次元化された平均速度分布 U^+ を直接数値解析の結果⁽⁸⁾と比較した結果を示し、図 3 には格子解像度を変化させて得られた平均速度分布を示す。これらの図より、解析結果は計算格子に大きく依存することなく、直接数値解析の結果と良い一致を示しており、壁関数で計算された壁面せん断応力が、格子ボルツマン方程式に正しく導入されていることが確認できる。

次に、図 4 に種々のプラントル数における、摩擦温度で無次元化された平均温度 Θ^+ を Kader の経験式⁽⁷⁾と比較したものを示す。図より、それぞれのプラントル数の解析結果は、Kader の経験式と非常によく一致しており、壁関数で計算された壁面熱流束が格子ボルツマン方程式に正しく導入されていることが確認できる。

5. 円管パイプ流れ

二次元平板チャネル流れの解析は壁面隣接ノードと壁内部ノードの中間に壁面が位置しており、非常に単純な系における評価であった。ここでは、壁面が曲がりを持つ系における手法の評価を行うために、円管パイプ乱流解析を行った。計算領域は、パイプ直径 D に対して、主流のパイプ長さを $5D$ とし、主流方向に圧力差を付与することで流体を駆動した。また、熱的境界条件として、壁面熱流束一定として解析を行った。円管直径 D に対して計

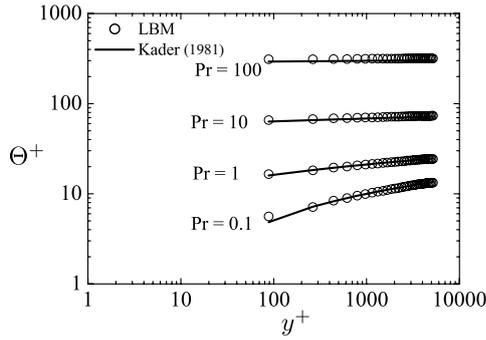


Fig. 4: Mean temperature profile at different Prandtl numbers.

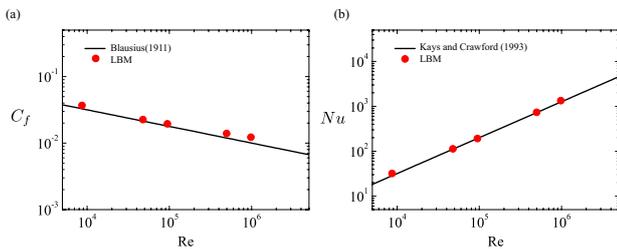


Fig. 5: (a) comparison of the friction factor with the empirical correlation (9), (b) comparison of the Nusselt number with the empirical correlation (10).

算格子を 50 点配置し、円管直径とバルク速度を基にしたレイノルズ数を 10^3 から 10^6 まで変化させて解析を行った。なお、流体は空気を想定しプラントル数 0.71 とした。

図 5 に、それぞれのレイノルズ数における摩擦係数をヌセルト数を示し、摩擦係数は実験式 (9)、ヌセルト数は実験式 (10) との比較を行った。図より、摩擦係数・ヌセルト数ともに解析を行ったすべてのレイノルズ数域で実験式と良く一致しており、開発した手法はレイノルズ数に関わらず汎用的に適用可能であり、円管のような曲がりを持つ壁面に対しても壁関数が正しく機能していることが確認できる。

6. 二次元周期丘計算

最後に、より複雑な流れ場における手法の性能を評価を行うために、図 6 に示す二次元周期丘¹¹の LES 解析を行った。計算領域は Breuer ら (11) の直接数値解析同様とし、丘高さ h を用いて $9h(x) \times 3.035h(y) \times 4.5h(z)$ とし、計算格子数は $252(x) \times 91(y) \times 126(z)$ とした。丘高さ h を代表長さ、丘直上 $y = h$ における平均速度を基にしたレイノルズ数で 10500 として解析を行った。

図 7 にそれぞれの断面における主流平均速度を実験値 (11) と比較したものを示す。剥離や再付着を伴う下壁近傍では予測値の実験との間に差異がみられるものの、予測値は実験値に対して全体的に良い一致が得られていることが確認できる。また、壁関数を使わない LBM-LES 解析の結果と比べても、壁関数の使用によって予測精度が向上していることが分かる。これらの結果より、複雑な形状を持つ壁面を取り扱う際にも、本研究で開発した壁関数法の実装が有効であることが分かる。

7. 結言

格子ボルツマン法と壁関数法を組み合わせ高レイノルズ数熱流動場を解析するために、壁内に仮想ノードを用いた壁関数法の実装法を提案し、二次元平行平板乱流、円管パイプ乱流、二次元周期丘乱流を対象として手法の

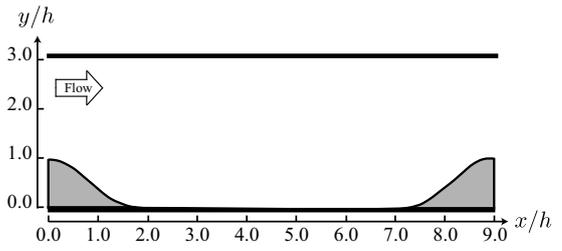


Fig. 6: Sketch of the flow geometry of the two-dimensional periodical fill flows.

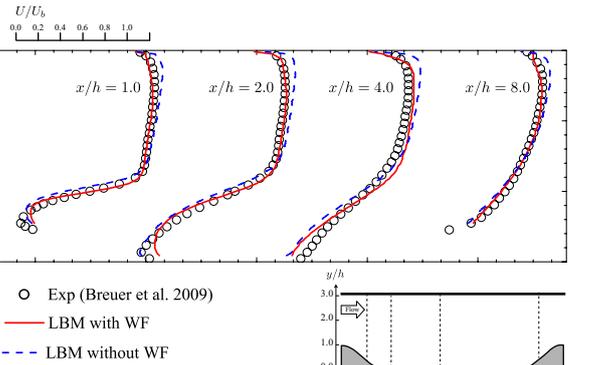


Fig. 7: Comparison of the streamwise mean velocity profile.

評価を行った。開発した手法は、二次元平行平板流れのように単純な流れ場のみならず、複雑な曲がりをもつ壁面流れに対しても有効であることが確認された。

参考文献

- (1) Suga, K., et al., A D3Q27 multiple-relaxation-time lattice Boltzmann method for turbulent flows, *Computers Mathematics with Applications*, 69 (2015), 518-529.
- (2) Suga, K., et al., Modelling turbulent and dispersion heat fluxes in turbulent porous medium flows using the resolved LES data, *International Journal Heat Mass Transfer*, 68 (2017), 225-236.
- (3) Lévêque, et al., Shear-improved Smagorinsky model for large-eddy simulation of wall-bounded turbulent flows, *Journal of Fluid Mechanics*, 570 (2007), 491-502
- (4) Bazilevs, Y. et al., Weak Dirichlet Boundary Conditions for Wall-Bounded Turbulent Flows, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 196 (2007), 4853-4862.
- (5) Chen, Y., et al., Momentum exchange method in lattice Boltzmann simulations of particle fluid interactions, *Physical Review E*, 88(1) (2013), 013303.
- (6) Musker, A. J., Explicit Expression for the Smooth Wall Velocity Distribution in a Turbulent Boundary Layer, *AIAA Journal*, 17 (1979), 655-657.
- (7) Kader, B. A., Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers, *Interna-*

- tional Journal of Heat and Mass Transfer, 24(9) (1981), 1541-1544.
- (8) Lee, M., and Moser, R. D.. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau \approx 5200$, Journal of Fluid Mechanics 774 (2015), 395-415.
- (9) Blasius, H., Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten In:Forschg. Ing-Wes, No. 131(1911), Berlin.
- (10) Kays, W.M., and Crawford, M.E., Convective Heat and Mass Transfer, Int. ed, McGraw-Hill, New York, 31(1993).
- (11) Breuer, M., et al. Flow over periodic hills numerical and experimental study in a wide range of Reynolds numbers. Computers Fluids 38.2 (2009), 433-457.