

MPS 法による流体潤滑解析の基礎検討 Fundamental Study on Fluid Lubrication Analysis by MPS Method

- 根岸 秀世, JAXA/研究開発部門, 茨城県つくば市千現 2-1-1, negishi.hideyo@jaxa.jp
藤原 大典, (株)菱友システムズ, 愛知県名古屋港区大江町 6-19
高橋 秀尚, 首都大学東京システムデザイン研究科, 東京都八王子市南大沢 1-1
柴田 和也, 東京大学工学系研究科, 東京都文京区本郷 7-3-1
間庭 和聡, JAXA/研究開発部門, 茨城県つくば市千現 2-1-1
小原 新吾, JAXA/研究開発部門, 茨城県つくば市千現 2-1-1
Hideyo Negishi, Research and Development Directorate/JAXA, 2-1-1 Sengen, Tsukuba, Ibaraki
Hironori Fujiwara, Ryoyu Systems Co.,Ltd., 6-19 Oe-cho, Minato-ku, Nagoya-shi, Aichi
Hidenao Takahashi, Graduate School of Systems Design/Tokyo Metropolitan University,
1-1 Minami-Osawa, Hachioji City, Tokyo
Kazuya Shibata, School of Engineering/the University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo
Kazuaki Maniwa, Research and Development Directorate/JAXA, 2-1-1 Sengen, Tsukuba, Ibaraki
Shingo Obara, Research and Development Directorate/JAXA, 2-1-1 Sengen, Tsukuba, Ibaraki

The viscous diffusion is the key characteristic to determine a reasonable time step size when applying MPS method to the fluid film lubrication, in which the length scale is on the order of micrometer magnitude. In the current study, the two-dimensional slider pad bearing is simulated by using both implicit MPS method and explicit MPS method in order to understand which method is more effective in terms of accuracy and computational cost. In the simulations, the parametric study is carried out covering a wide range of initial particle distance and time step size. The computed result reveals that EMPS method is more suitable for the fluid film lubrication simulation in terms of accuracy and computational cost than IMPS method even though the time step size is restricted by the viscous diffusion.

1. はじめに

玉軸受など機械要素の摺動部では摩擦によりエネルギーロスが、摩擦によりマテリアルロスが発生するため、それらを防ぐために流体潤滑を行うことが一般的である。^(1,2) 流体潤滑は、相対運動する2つの接触面間にミクロンオーダーの潤滑油膜を介在させ、相対運動により油膜内に圧力を発生させることで完全に非接触な状態とし低摩擦を実現する仕組みである。⁽³⁾ 流体潤滑においては、必要以上に厚い油膜では油膜内の粘性摩擦によりエネルギー損失増大につながるため、近年では省エネルギーの観点で微量な油量での流体潤滑（いわゆる枯渇潤滑状態）が求められている。

玉軸受を微量な油量で長期間適切な流体潤滑状態に維持するためには、摺動部のミクロな油膜挙動だけでなく玉軸受全体における潤滑油のマクロ挙動も把握し、潤滑油の流動や膜厚分布を把握し制御する必要がある。これまで流体潤滑の分野では、摺動部の潤滑油膜が非常に薄いことを考慮して、Navier-Stokes 方程式に多くの仮定を与えて簡略化した Reynolds 方程式を差分法等で計算する方法が主流である。^(1,3,4) Reynolds 方程式は摺動部近傍のみに適用可能であり、特に枯渇潤滑状態の計算では摺動部入口部でのメニスカス距離や油膜厚さを境界条件として与える必要がある。⁽⁵⁾ 従来は実験結果を再現するようにこれらを経験的に与えるなどするが、実際の玉軸受の様に潤滑油、転動体、内輪、外輪、保持器等が相互干渉する空間ではその与え方が難しい。したがって従来の Reynolds 方程式を計算する手法では、玉軸受全体における潤滑油のマクロ・ミクロ挙動を把握することは困難である。

近年になり、CFD (Computational Fluid Dynamics) 技術や計算機環境の進歩により、流体潤滑問題に Navier-Stokes 方程式を直接適用し、格子法^(6,7)や粒子法^(8,9)で計算する研究が見られるようになってきている。著者らも粒子法の一つである MPS (Moving Particle Simulation) 法^(10,11)に着目し、玉軸受内のマクロ・ミクロの潤滑油挙動を再現可能な CFD 技術の研究に着手した。^(12,13) MPS 法は連続体の数値解析手法の一つであるが、従来の格子法のように空間を

格子分割して計算点を設けるのではなく、空間に配置され自由に動くことが可能な粒子を計算点として用いる。MPS 法でも Navier-Stokes 方程式など連続体の支配方程式を離散化して計算するが、計算点が連続体の挙動に応じて移動するため、玉軸受の様な複雑な境界形状やその運動の扱いが容易であり、液体の大変形や分裂等の計算に優れている。また流体挙動に限らず剛体、弾塑性体等の固体についても同一の計算原理が適用できるため、玉軸受内の固液混相状態を統一的に扱える利点もある。近年では、ポリゴン壁モデル⁽¹⁴⁾など実用的なモデルの整備が進んでおり、従来の格子法ベースの CFD では適用が困難であった複雑形状の実用機械内部におけるマクロ流れ評価への適用が、国内産業界を中心に急速に進んでおり、有効な手法と考えられる⁽¹⁰⁾。

MPS 法の流体潤滑問題への適用に関して、最初の大きな課題は粘性計算における時間刻みの拡散数制約である。通常の MPS 法は、Fractional time step 法により Navier-Stokes 方程式の粘性項を陽的に、圧力項を陰的に計算する半陰解法を採用している。粘性項を陽的に計算する場合、数値安定性を保つために時間刻み Δt は以下の条件を満たす必要がある。⁽¹¹⁾

$$\Delta t \leq C_D \frac{\rho l_0^2}{\mu} \quad (1)$$

ここで ρ は密度、 μ は粘性係数、 l_0 は粒子法計算における粒子間距離、 C_D は拡散数で 0.5 未満とする必要がある。流体潤滑問題では、摺動部の最小隙間は μm オーダーであるため、粒子間距離が時間刻みの律速となり、それによる計算負荷の増大が大きな課題である。さらに、潤滑油に非ニュートン流体を扱う場合、また摺動部が高圧になる場合は粘性係数が増加するため、それも時間刻みの制約となり計算負荷の増大につながる。

上述の MPS 法における粘性項計算の時間刻み制約に対する対策としては、粘性項計算を陰解法化する Implicit MPS 法（以降 IMPS 法と呼ぶ）⁽¹⁵⁾により拡散数制約をなくす方法、逆に粘性項

と圧力項共に陽的に計算する Explicit MPS 法 (以降 EMPS 法と呼ぶ) (16)により小さい時間刻みでも 1 タイムステップあたりの計算時間を削減して全体の計算時間を現実的なコストにする方法が考えられる. そこで本研究では, MPS 法の流体潤滑問題適用に向けた拡散数制約の課題解決を目的として, 流体潤滑の基本要素であるくさび膜効果を対象に前述の IMPS 法および EMPS 法を適用しその有効性を比較評価した.

2. 解析対象

本研究では, 議論を簡単にするために Fig. 1 に示すような 2 次元 (無限幅) 傾斜平面パッド軸受を対象とした. 速度 U で x 方向に移動する下部壁面の上に, 固定された傾斜平面パッドが存在し, 油膜に対して未狭まりの流路が形成されている. 油膜は下部壁面の移動に伴い粘性によって隙間内に引き込まれ定常クエット流を形成する. このクエット流はいわゆるくさび膜効果を発現し, 隙間内に圧力を発生させる. (3,17)

この隙間内クエット流れに対する Reynolds 方程式は次式で表すことができる. (9)

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) = 6\mu U \frac{dh}{dx} \quad (2)$$

ここで p は圧力, h は位置 x での膜厚である. この式 (2) に対して $\xi = x/L, m = h_1/h_2$ とおき, 以下の境界条件

入口部 $\dots \xi=0$ のとき $h=h_1, p=p_a$ (大気圧)
出口部 $\dots \xi=1$ のとき $h=h_2, p=p_a$ (大気圧)

を適用すると, 油膜内の圧力分布は次式で与えられる.

$$p - p_a = \frac{6\mu UL}{h_2^2} \frac{(m-1)(1-\xi)\xi}{(m+1)(m-m\xi+\xi)^2} \quad (3)$$

本研究では Kyle らの SPH 法の検討⁽⁸⁾と同様に以下の諸元とした.

Table 1. Parameters values for the sliding pad bearing

Inlet height h_1	170 μm
Outlet height h_2	70 μm
Bearing length L	1.52 mm
Sliding velocity U	0.008 m/s
Density ρ	1200 kg/m ³
Viscosity μ	0.001 Pa-s

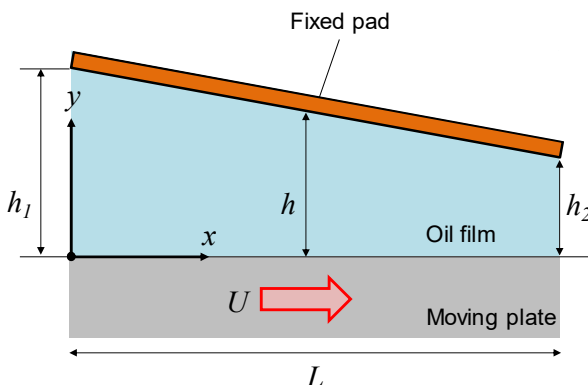


Fig. 1 Geometry of sliding pad bearing.

3. 数値計算法

3-1. 支配方程式

本研究では潤滑油を非圧縮性流体と仮定し, 以下の 3 次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を支配方程式とした.

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{g} \quad (5)$$

ここで t, \vec{u}, \vec{g} は時刻, 流速ベクトル, 重力加速度ベクトルであり, ν は動粘性係数である.

3-2. 離散化モデル

MPS 法では, 支配方程式に現れる勾配やラプラシアンなどの微分演算子について, ある粒子 i とその近傍にある粒子 j との間で粒子間相互作用モデルを与えて離散化する. 前述の式 (5) に現れる粒子 i に対する物理量の勾配およびラプラシアンは次式で評価する. なお記号 $\langle \cdot \rangle_i$ は粒子 i の位置において $\langle \cdot \rangle$ 内の式を粒子間相互作用モデルにより近似することを意味する.

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{(\phi_j - \phi_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \right] \quad (6)$$

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = \frac{2d}{\kappa^0 n^0} \sum_{j \neq i} [(\phi_j - \phi_i) w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)] \quad (7)$$

ここで d は次元数 (2 次元の場合は 2, 3 次元の場合は 3 とする), \vec{r} は粒子の位置ベクトル, w は粒子間距離に応じた重み関数である. また, n^0 は初期粒子配置における粒子数密度の基準値, κ^0 は統計的な分散の増加を解析解と一致させるための係数であり, それぞれ初期粒子配置から求める. なお上付き添え字 0 は初期値を示す.

重み関数 w , 粒子数密度 n , モデル係数 κ^0 は次式で定義される.

$$w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) = \begin{cases} \frac{r_e}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} - 1 & (|\vec{r}_j - \vec{r}_i| < r_e) \\ 0 & (|\vec{r}_j - \vec{r}_i| \geq r_e) \end{cases} \quad (8)$$

$$\langle n \rangle_i = \sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \quad (9)$$

$$\kappa^0 = \frac{\sum_{j \neq i} [|\vec{r}_j^0 - \vec{r}_i^0|^2 w(|\vec{r}_j^0 - \vec{r}_i^0|)]}{\sum_{j \neq i} w(|\vec{r}_j^0 - \vec{r}_i^0|)} \quad (10)$$

ここで r_e は影響半径であり, 本解析では初期粒子間距離の 3.1 倍とした. 式 (8) の形から明らかな様に, 上記の式は粒子 i に対して影響半径以内にある近傍粒子全てに対して計算を行う.

3-3. 計算アルゴリズム

本研究では、時間刻みに対する粘性項計算の拡散数制約による計算負荷増大を緩和する目的で、式 (5) 右辺の粘性項と圧力項を陰的に計算する IMPS 法⁽¹⁵⁾と、ともに陽的に計算する EMPS 法⁽¹⁶⁾を採用し、計算精度や計算コストについて比較評価を行う。

3-3-1. Implicit MPS 法

Implicit MPS 法⁽¹⁵⁾では、粒子 i に対してまず式 (5) の粘性項と重力項を次式の離散式により陰的に計算し、仮の速度と位置ベクトル \vec{u}_i^* と \vec{r}_i^* を求める。ここで上付き添字 k は旧時刻を示す。

$$\vec{u}_i^* = \vec{u}_i^k + \Delta t \left[\nu \langle \nabla^2 \vec{u} \rangle_i^* + \vec{g} \right] \quad (11)$$

$$\vec{r}_i^* = \vec{r}_i^k + \Delta t \vec{u}_i^* \quad (12)$$

式 (11) は、右辺第二項を式 (7) のラプラシアンモデルにより離散化し、未知数を左辺に集めれば

$$\vec{u}_i^* - \Delta t \frac{2d}{\kappa^0 n^0} \nu \sum_{j \neq i} (\vec{u}_j^* - \vec{u}_i^*) w(|\vec{r}_j^k - \vec{r}_i^k|) = \vec{u}_i^k + \Delta t \vec{g} \quad (13)$$

となる。これは \vec{u}_i^* に対する連立 1 次方程式であり、本研究では非常反復解法の Bi-CGSTAB 法⁽¹⁸⁾で計算した。

次に、式 (1) に非圧縮性流れの密度一定条件を与えて、圧力 Poisson 方程式

$$-\frac{1}{\rho} \langle \nabla^2 p \rangle_i^{k+1} = \frac{1}{\Delta t^2} \frac{n_i^* - n_0}{n_0} \quad (14)$$

を計算し、新しい時刻の p^{k+1} を得る。式 (14) は、左辺を式 (7) のラプラシアンモデルで離散化すると

$$-\frac{1}{\rho} \frac{2d}{\kappa^0 n^0} \sum_{j \neq i} (p_j^{k+1} - p_i^{k+1}) w(|\vec{r}_j^* - \vec{r}_i^*|) = \frac{1}{\Delta t^2} \frac{n_i^* - n^0}{n^0} \quad (15)$$

となる。これは p^{k+1} の連立 1 次方程式であり、式 (13) と同様に本研究では Bi-CGSTAB 法で計算した。なお、本研究では計算安定化のために高精度粒子法の SPP (Space Potential Particle) 法⁽¹⁹⁾を適用し、圧力 Poisson 方程式計算における自由表面境界条件の高精度化を図った。

最後に、上記で求めた p^{k+1} と仮速度 \vec{u}_i^* を用いて、新しい時刻 $k+1$ における真の速度ベクトル \vec{u}_i^{k+1} と位置ベクトル \vec{r}_i^{k+1} を次式で求める。

$$\vec{u}_i^{k+1} = \vec{u}_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \langle \nabla p \rangle_i^{k+1} \quad (16)$$

$$\vec{r}_i^{k+1} = \vec{r}_i^* + (\vec{u}_i^{k+1} - \vec{u}_i^*) \Delta t \quad (17)$$

ここで式 (16) の左辺第二項には式 (6) の勾配モデルを用いる。以上の手順により、1 タイムステップの計算を行う。

3-3-2. Explicit MPS 法

Explicit MPS 法⁽¹⁶⁾では、粒子 i に対してまず式 (5) の粘性項と重力項を次式の離散式により陽的に計算し、仮の速度と位置ベクトル \vec{u}_i^* と \vec{r}_i^* を求める。

$$\vec{u}_i^* = \vec{u}_i^k + \Delta t \left[\nu \langle \nabla^2 \vec{u} \rangle_i^k + \vec{g} \right] \quad (18)$$

$$\vec{r}_i^* = \vec{r}_i^k + \Delta t \vec{u}_i^* \quad (19)$$

次に、微弱的な圧縮性を許容して次式から圧力を陽的に計算する。

$$p_i^{k+1} = c^2 \rho \frac{n_i^* - n^0}{n^0} \quad (20)$$

ここで c は音速であり、計算の安定性と圧力分布の再現性を考慮して、本研究ではスライド速度 U の 20 倍とした。

最後に、求めた p^{k+1} と仮速度 \vec{u}_i^* を用いて、新しい時刻 $k+1$ における真の速度ベクトル \vec{u}_i^{k+1} と位置ベクトル \vec{r}_i^{k+1} を式 (16) と (17) で求める。

以上の手順により、1 タイムステップの計算を行う。

3-4. 計算モデルと境界条件

Fig. 2 に本研究における 2 次元解析モデルを示す。油は流体粒子でモデル化し、固体は 2 層の壁粒子とさらにその外側に 2 層のダミー壁粒子でモデル化した。傾斜平面パッドの上流 $0.5L$ の位置および下流 $5h_2$ の位置には周期境界条件を設けて計算負荷低減を図った。

空間解像度については、最小隙間 h_2 に対して 3 粒子、7 粒子、14 粒子および 28 粒子を配置することを基準として、初期粒子間距離 $20 \mu\text{m}$ 、 $10 \mu\text{m}$ 、 $5 \mu\text{m}$ 、 $2.5 \mu\text{m}$ の計算を実施した。この時、総粒子数はそれぞれ 1,450 粒子、4,022 粒子、12,740 粒子、43,700 粒子であった。

時間刻み Δt は、計算安定性が確保できる範囲で 0.001 ms 、 0.005 ms 、 0.01 ms 、 0.05 ms 、 0.1 ms 、 0.5 ms 、 1.0 ms とし、流れ場が定常的になり時間平均結果が得られるまで物理時間 10 s の計算を実施した。

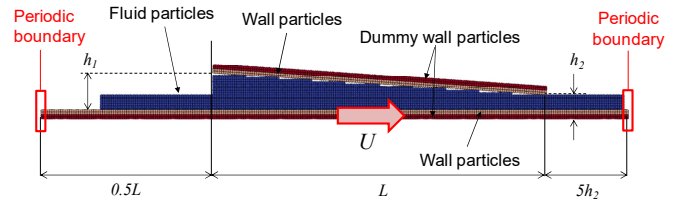


Fig. 2 Computational model of the slider pad bearing.

4. 結果と考察

Fig. 3 に初期粒子間距離 $10 \mu\text{m}$ 、時間刻み $\Delta t = 0.05 \text{ ms}$ のケースにおいて、流れが定常状態となった時の瞬時圧力分布を示す。IMPS 法と EMPS 法いずれの結果においても傾斜平面パッド下部で圧力が発生しており、くさび膜効果を定量的に再現している。

Fig. 4 には Fig. 3 と同様に初期粒子間距離 $10 \mu\text{m}$ のケースについて、種々の時間刻みにおける傾斜平面パッド下部の時間平均無次元圧力分布の比較を示す。ここで無次元圧力 p^* は、次式で定義される。

$$p^* = \frac{(p - p_2)(h_2)^2}{U\mu L} \quad (21)$$

なお式 (21) で p_2 は軸受出口部の圧力である。圧力分布の評価に際しては、流れ方向に影響半径と等しい幅の検査体積を設け、その検査体積内に存在する全粒子の平均値を評価した。

Fig. 4 (a) の IMPS 法の結果では、時間刻み、言い換えれば拡散数 $C_D (= \Delta t v l_0^2)$ に応じて圧力分布が異なり、拡散数が小さいほど Reynolds 方程式の解析解に近づく。IMPS 法では粘性項を陰的に計算するため、拡散数制約が緩和され時間刻みが大きくとれるが、運動量拡散の解析精度が低下したものと考えられる。なお、初期粒子間距離 $10 \mu\text{m}$ のケースでは拡散数 4.2 程度まで計算が可能であったが、それ以上の拡散数の計算は破綻した。一方で、Fig. 4 (b) の EMPS 法の結果は時間刻みないし拡散数の依存性が小さく、拡散数に依らずほぼ同一の分布を示している。本検討では、拡散数 0.8 でも計算が安定に実行できた。なおここには示さないが、Fig. 4 で示した IMPS 法および EMPS 法による計算結果の傾向は、他の初期粒子間距離のケースでも同様に見られた。

Fig. 5 には、種々の初期粒子間距離および拡散数条件で計算が実行できたケースに関して、圧力分布のピーク値について Reynolds 方程式の解析解と MPS 法計算結果の相対比較結果を示す。図より、IMPS 法の計算は拡散数が 1~10 オーダでも計算が可能であるものの、解析解との乖離が大きい。IMPS 法の計算と言えども、拡散数は 0.2~0.4 の範囲で解析解との一致が比較的良く、その差は約 10% 程度である。一方で EMPS 法の計算は、拡散数 1 以上の条件では計算が破綻するものの、拡散数 1 以下であれば拡散数に依らずおおよそ同程度の結果が得られ、解析解に対してその差は約 5% 程度であり IMPS 法の結果と比べて全般的に精度が良いと言える。

計算コストに関しては、同じ初期粒子間距離 $10 \mu\text{m}$ のケースで IMPS 法と EMPS 法ともに解析解との一致が良い拡散数 0.4 の条件について言えば、Intel Xeon 3.2 GHz の CPU 8 コア (OpenMP によるスレッド並列) で IMPS 法は 3.6 時間、EMPS 法は 0.3 時間であった。したがって、本検討では IMPS 法よりも EMPS 法の方が計算精度および計算コストの両面で有意であると言える。

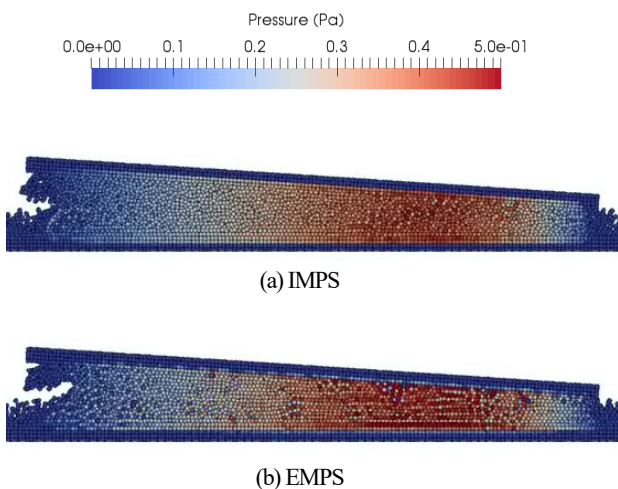


Fig. 3 Pressure distribution underneath the sliding pad bearing.

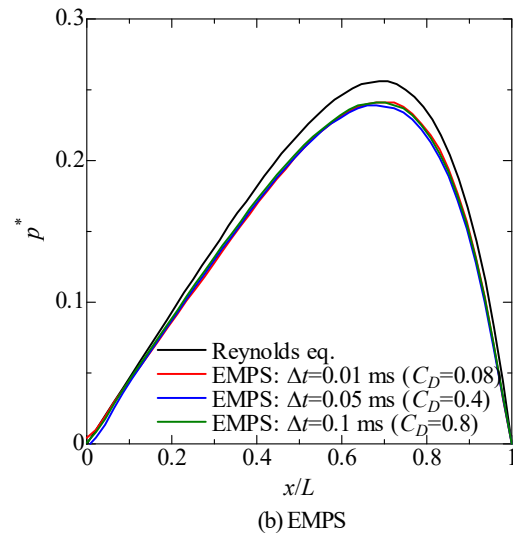
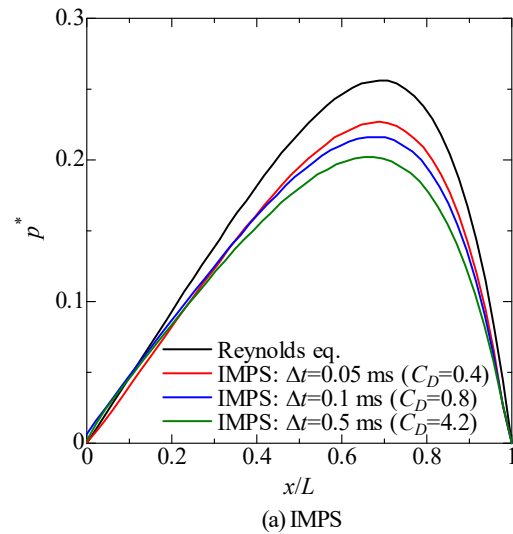


Fig. 4 Comparison of the pressure distribution between the MPS simulations and analytical solution calculated by Reynolds equation.

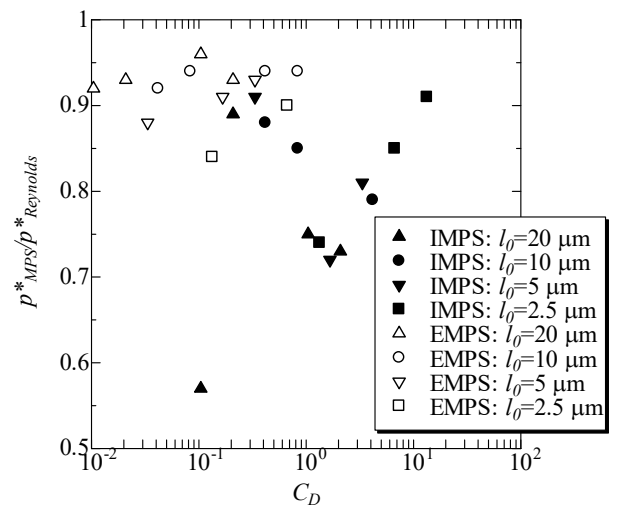


Fig. 5 Comparison of the peak pressure depending on the viscous diffusion parameter C_D and initial particle distance.

滑時の圧力分布へ," トライボロジー会議 2019 春予稿集, F9 (2019).

5. まとめ

MPS 法によるマイクロオーダーの流体潤滑解析実現に向けて、大きな課題の一つと考えられる時間刻みに対する拡散数制約の影響を評価するため、傾斜平面パッド軸受を対象としたくさび膜効果について検証解析を実施した。本検討では、粘性項と圧力項を共に陰的に計算し拡散数制約を緩和する Implicit MPS (IMPS) 法と、粘性項と圧力項を共に陽的に計算して1時間ステップあたりの計算時間を低減してトータルの計算コストを現実的なものとする Explicit MPS (EMPS) 法の解析を実施し、以下の結果を得た。

- IMPS法とEMPS法ともに傾斜平面パッド軸受下部の圧力上昇を再現し、くさび膜効果を定性的に予測できることを確認した。
- IMPS法の計算は、拡散数が1~10のオーダーでも計算が可能であったが、圧力分布については Reynolds 方程式の解析解との乖離が大きく、また得られる結果に対して拡散数の依存性が大きかった。解析解との乖離を最小限にするためには、拡散数を 0.2~0.4 程度にする必要があり、解析解との差異は約 10%であった。
- EMPS法の計算は、拡散数制約により 1 以上では計算が破綻したが、計算が実行できる拡散数条件では計算結果に対する拡散数の依存性は小さく、解析解との差異は IMPS 法よりも小さく約 5%であった。
- 以上の結果から、拡散数制約を緩和する目的で粘性項を陰的に計算する IMPS 法でも、圧力分布について Reynolds 方程式による解析解との差異を最小限にするためには EMPS 法と同程度の拡散数を使用する必要があった。また全般的に EMPS 法は IMPS 法よりも解析解との一致が良く、同じ初期粒子間距離の場合の 1 タイムステップあたりの計算コストは EMPS 法では IMPS 法の約 1/10 であり、計算精度および計算コスト両面で EMPS 法の方が流体潤滑解析において有効であると言える。

謝辞

本研究の遂行に当たっては、科学研究費(基盤研究(C), 課題番号: 17K06137)の助成を受けている。また、本報で示した解析結果は、全て JAXA Supercomputer System generation 2 (JSS2)を用いて実施した。ここに記し、著者らの謝意を表す。

参考文献

- (1) 木村, トライボロジー再論, 養賢堂 (2013).
- (2) 木村, "トライボロジー 50 周年に寄せて," トライボロジスト, Vol.61, No.9 (2016), pp.558-561.
- (3) 山本, 兼田, トライボロジー 第二版, 理工学社 (2010).
- (4) 森, "潤滑における流体力学的諸問題," ながれ, Vol.4 (1985), pp.99-109.
- (5) 柴崎, 谷口, 大島, "枯渇 EHL とマクロ流れの連成解析手法," 生産研究, Vol.62, No.1 (2010), pp. 40-44.
- (6) Bruyere, V., Fillot, N., Morales-Espejel, G.E. and Vergne, P., "A Two-phase Flow Approach for the Outlet of Lubricated Line Contacts," ASME Journal of Tribology, Vol.134 (2012), pp.041503-1-10.
- (7) 野田, 柴崎, 宮田, 谷口, "玉軸受におけるグリース挙動の X 線観察および多相流解析の妥当性確認," トライボロジスト, Vol.61, No.4 (2016), pp.275-284.
- (8) Kyle, J.-P. and Terrell, E. J., "Application of Smoothed Particle Hydrodynamics to Full-Film Lubrication," ASME Journal of Tribology, Vol.135 (2013), pp.041705-1-9.
- (9) 田中, 岩本, "粒子法を用いた流体潤滑の数値計算 ~微量潤

- (10) 越塚, 柴田, 室谷, 粒子法入門, 丸善出版 (2014).
- (11) 後藤, 粒子法, 森北出版 (2018).
- (12) 根岸, 雨川, 間庭, 小原, 羽山, 董, "宇宙機の長寿命化に向けた転がり玉軸受内グリース流動数値解析技術構築に向けた展望," 第 31 回数値流体力学講演論文集, E10-3 (2017).
- (13) 根岸, 藤原, 間庭, 小原, 柴田, 政家, "MPS 法による玉軸受内グリース挙動数値解析の基礎検討," 第 32 回数値流体力学講演論文集, A08-2 (2018).
- (14) 原田, 越塚, 島崎, "MPS 法における壁境界計算モデルの改良," 日本計算工学会論文集, Paper No. 20080006 (2008).
- (15) 福澤, 富山, 柴田, 越塚, "MPS 法による高粘性非ニュートン流体の流動解析," 日本計算工学会論文集, Paper No. 20140007 (2014).
- (16) 大地, 越塚, 酒井, "自由表面流れ解析のための MPS 陽的アルゴリズムの開発," 日本計算工学会論文集, Paper No. 20100013 (2010).
- (17) 佐々木, 志摩, 野口, 平山, 地引, 足立, 三宅, はじめてのトライボロジー, 講談社 (2013).
- (18) 牛島, 数値計算のための Fortran90/95 プログラミング入門, 森北出版 (2007).
- (19) Tsuruta, N., Khayyer, A. and Gotoh, H., "Space Potential Particles to Enhance the Stability of Projection-Based Particle Methods," International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol.29, No. 1 (2015), pp.100-119.