

多音源有限振幅超音波が形成する音響流駆動力場の 2 次元数値解析

Two-Dimensional Numerical Analysis of Acoustic Streaming Driving Force Field Formed by Finite Amplitude Ultrasonic Waves from Multiple Sound Sources

- 高田恵介, 明大院, 神奈川県川崎市多摩区東三田 1-1-1, E-mail: ce182034@meiji.ac.jp
 中吉嗣, 明大理工, 神奈川県川崎市多摩区東三田 1-1-1, E-mail: naka@meiji.ac.jp
 Keisuke Takada, Meiji University, 1-1-1 Higashimita, Tama-ku, Kawasaki-shi, Kanagawa
 Yoshitsugu Naka, Meiji University, 1-1-1 Higashimita, Tama-ku, Kawasaki-shi, Kanagawa

A numerical model describing finite-amplitude ultrasound waves with the same degree of fidelity as the Westervelt equation has been incorporated into a conservative hyperbolic system. The advantage of the model lies in the representation of temporal derivative; it uses the first order time derivative that can be solved by the classical finite difference method. The discrete delta function is applied for the driving force implementation. The perfectly matched layers are implemented at the boundary to represent open space. The overall accuracy of the present method is confirmed by various tests. In the two-dimensional calculation of two sound sources, a simulated sound field is consistent with the one predicted by the principle of superposition.

1. 結論

乱流制御は、流れの抵抗低減、物質混合の促進、熱輸送の促進など様々な工学機器の性能向上に繋がるため、これまでに多くの研究がなされている。特に、乱流の能動制御に必要なアクチュエータについては、その性能向上と高効率化が求められている。そこで、本研究では能動制御手法の 1 つとして、超音波音響流現象に着目し、複数の超音波音源によって形成される音場の数値解析手法に関する検討を行う。

音響流とは音波を放射した際の 2 次的現象として生成される定常流である。音響流については以前から多くの研究がなされている。Marshall ら¹⁾は、円筒容器内の流体の混合、底面からの粒子の浮き上がり、および異なる高さ、音響反射係数における接着粒子の堆積における音響流を特徴づけるために、容器の底に向かって伝播するガウス超音波によって生成される音響流の計算研究について報告している。また Kamakura ら²⁾は、集束ビームにより誘起される音響流の流体力学的非線形性を明らかにするために、渦度輸送方程式、流れ関数のポアソン方程式と古典的有限差分法を用いた計算研究について報告している。Aktas ら³⁾は、2 次元の長方形の容器内の音響流の流体の圧縮性を考慮したシミュレーションを実施し、流れ構造の形成プロセスに対する音場強度の影響を数値的に明らかにした。この研究では、音場と粘性効果および流れ構造の形成の相互作用を考慮したモデルにより音響流の解析を行った。

音響流駆動力は音響エネルギーに起因しているため、多音源を利用すれば音響流の誘起流速は増大すると考えられる。しかし様々な研究が報告されている中、多音源により生成される音響流場の予測研究は少ない。また音響流の生成は音響の非線形性に起因しているため、音響流特性を正確に予測するためには、これらの特徴を再現する数値解析手法が必要となる。よって本研究では、音響の高精度解析に用いられる Westervelt 方程式と同精度のモデルにより非線形音場を解析し、多音源音場により生成される音響流駆動力場を明らかにすることを目的とする。

2. 非線形音響のモデル式

非線形音響伝搬のモデル式は、ニュートン流体、圧縮性、非回転性、熱伝導性、粘性流体の仮定の下で、以下の支配方程式から導かれる。

圧縮性の連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

運動方程式

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla P + \left(\frac{1}{3} \mu + \mu_B \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (2)$$

エネルギー保存則

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) s \right) = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \mu_B (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \kappa \nabla^2 T \quad (3)$$

状態方程式

$$P = P(\rho, s) \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t))$ は粒子速度、 P 、 ρ 、 s 、 T はそれぞれ圧力、媒質の密度、エントロピー、温度を表す。また $\mathbf{x} = (x, y, z)$ は直交座標、 $t \geq 0$ は時間を示し、 μ 、 μ_B はそれぞれずり粘性係数、体積粘性係数、 κ は熱伝導係数を表す。ここで P 、 ρ 、 s 、 T を静止時の値 P_0 、 ρ_0 、 s_0 、 T_0 と音の存在による変位量 p 、 ρ' 、 s' 、 T' に分けると以下のように表すことができる。

$$\begin{cases} P = p + P_0 & \rho = \rho' + \rho_0 \\ s = s' + s_0 & T = T' + T_0 \end{cases} \quad (5)$$

式(1)(2)(3)(4)に式(5)を代入し、音響マッハ数 $\varepsilon = u/c_0 \ll 1$ における ε^2 のオーダーまで残し整理することで Manuel らは同オーダーの保存形双曲型方程式系を導出した⁴⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p &= \frac{1}{\rho_0} \left(\mu_B + \frac{4}{3} \mu \right) \nabla^2 \mathbf{u} \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \left((c_0^2 \rho_0 + \beta p) \mathbf{u} \right) &= \frac{\kappa}{\rho_0} \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \nabla^2 p \end{aligned} \quad (6)$$

ここで β は非線形係数、 c_v は定積比熱、 c_p は定圧比熱、 c_0 は初期音速を表す。この式は音波の非線形伝搬を記述する Westervelt 方程式と同オーダーの式であり、時間微分項の階数が低いいため一般的な計算手法による解析が可能である。よって本研究では式(6)を支配方程式として解析を行う。

3. 数値解析手法

3. 1. 1 次元解析

1 次元解析では点音源による音響伝搬の解析を行った。また本

研究では開空間での音響伝搬の解析が目的のため、境界での音波の反射を防ぐために興味領域の外側に Perfectly Matched Layers (PML)による音波吸収領域を設けた⁶⁾。よって最終的な支配方程式は、式(6)の 1 次元方程式に点音源を与える項と、PML による吸収項が追加された形となる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \left(\mu_B + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sigma_x(x) u \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left((c_0^2 \rho_0 + \beta p) u \right) = \frac{\kappa}{\rho_0} \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \sigma_x(x) p + P_0 \frac{\omega}{c_0} \exp(+i\omega t) \delta(x - x^*) \quad (8)$$

ここで ω は角周波数、式(7)(8)の右辺第二項は PML による吸収項、 σ_x は以下の式で表される吸収係数である⁶⁾。

$$\sigma_x(x) = \sigma_0 \left(\frac{x}{\Delta\text{PML}} \right)^2, \sigma_0 = \log \left(\frac{1}{R} \right) \frac{3V}{2\Delta\text{PML}} \quad (9)$$

ここで、 V は伝搬速度、 ΔPML は PML 層の幅、 σ_0 は以下に示す理論反射係数 R で定められる最大減衰を表すパラメータである。

$$\begin{cases} 0.01 & \text{If } N = 5 \\ 0.001 & \text{If } N = 10 \\ 0.0001 & \text{If } N = 20 \end{cases} \quad (10)$$

ここで N は PML 層を形成する格子の数である。また式(8)の右辺第三項は信号を入力する駆動力項であり、 $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数、 x^* は信号が入力される座標である。

3. 2. 2 次元解析

1 次元解析と同様、点音源の駆動力項、PML による吸収項の実装を行った。支配方程式を以下に示す。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \left(\mu_B + \frac{4}{3} \mu \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \sigma_x(x) u \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0} \left(\mu_B + \frac{4}{3} \mu \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \sigma_y(y) v \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left((c_0^2 \rho_0 + \beta p) u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((c_0^2 \rho_0 + \beta p) v \right) \\ = \frac{\kappa}{\rho_0} \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) - (\sigma_x(x) + \sigma_y(y)) p \\ - \psi + P_0 \frac{c_0^2}{\omega} \exp(+i\omega t) \delta(x - x^*) \delta(y - y^*) \end{aligned} \quad (13)$$

計算領域の角では PML が x 方向と y 方向で重なり合ってしまう興味領域と PML 領域の境界での反射が大きくなってしまいうため、それを防ぐために式(13)に以下に示す補助関数 ψ を追加した⁶⁾。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sigma_x(x) \sigma_y(y) p \quad (14)$$

3. 3. 離散化手法

3. 3. 1. 空間離散化

本研究では 4 次精度中心差分法により空間の離散化を行った。4 次精度中心差分式を以下に示す。

$$f'_j = \frac{f_{j-2} - 8f_{j-1} + 8f_{j+1} - f_{j+2}}{12h} + O(h^4) \quad (15)$$

$$f''_j = \frac{-f_{j-2} + 16f_{j-1} - 30f_j + 16f_{j+1} - f_{j+2}}{12h^2} + O(h^4) \quad (16)$$

ここで、 $f'_j = f'(x_j)$ であり、 x_j は格子点上の座標、 h は格子幅である。

3. 3. 2. 時間進行法

式(6)の解析は古典的 4 次精度ルンゲクッタ法を用いると時間ステップ幅を非常に小さくしなければ発散してしまうため、時間

進行法には安定性の高い 3 次精度の Strong Stability Preserving third order explicit Runge-Kutta (SSP-RK3) を用いた⁷⁾。計算方法を以下に示す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= L(f, t) \\ F(f, t) &= f + \Delta t L(f, t) \\ f^{(1)} &= F(f^n, t^n) \\ f^{(2)} &= \frac{3}{4} f^n + \frac{1}{4} F(f^{(1)}, t^n + \Delta t) \\ f^{n+1} &= \frac{1}{3} f^n + \frac{2}{3} F(f^{(2)}, t^n + \frac{\Delta t}{2}) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで Δt は時間ステップ幅である。

3. 3. 3. デルタ関数の離散化

デルタ関数の離散化には Anderら⁸⁾が提案した離散化手法を用いた。この手法は空間離散スキームと同精度の離散デルタ関数を実装することにより目標の空間精度が達成される。よって本研究では 4 次精度の離散化を実装した。4 次精度の離散デルタ関数を以下に示す。

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \frac{1}{h} \phi \left(\frac{x}{h} \right) \\ \phi(\xi) &= \begin{cases} \frac{1}{32} (16 - 4|\xi| - 4|\xi|^2 + |\xi|^3), & |\xi| < 2 \\ \frac{1}{96} (48 - 44|\xi| + 12|\xi|^2 - |\xi|^3), & |\xi| \in [2, 4] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

ここで h は格子幅である。

4. 精度評価

4. 1. 1 次元解析

4. 1. 1. 移流方程式による精度解析

計算手法に空間 4 次中心差分、時間は SSP-RK3、音源として 4 次精度離散デルタ関数を実装した際には空間精度は 4 次であることが期待される。よって厳密解が既知であるデルタ関数を含む 1 次元移流方程式を用いた精度解析を行った。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= g(t) \delta(x - x_*), \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (19)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} g(t - (x - x_*)), & 0 \leq x - x_* \leq t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (20)$$

式(19)はデルタ関数を含む移流方程式、式(20)は式(19)の厳密解である。また $g(t)$ は以下の式で表されるガウス関数である。

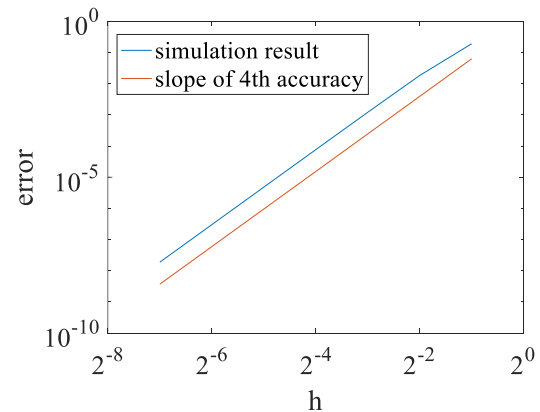


Fig. 1 Accuracy analysis result by one-dimensional advection equation.

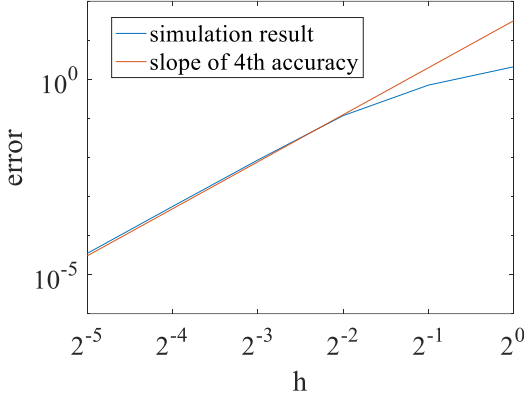


Fig. 2 Accuracy analysis result by analytical solution of one-dimensional linear wave equation.

$$g(t) = \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2}\right), \quad t_0 = 8 \quad (21)$$

誤差は数値解が十分滑らかとなる $t = 20$ s の時間でそれぞれ格子数 $N = 70 \times 2^{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, 7$) の 7 通りに関して誤差を算出した。また時間ステップ幅は時間進行法が 3 次精度であるため精度を $O(h^4)$ と比例させるために $\Delta t = h^{4/3}/2$ を使用した。また誤差は以下の式で示される l_2 ノルムにより評価した。

$$e_j(t) = u(x_j, t) - v(x_j, t)$$

$$\|e\|_h = \sqrt{h \sum_{j=0}^{N-1} e_j \times e_j} \quad (22)$$

ここで、 x_j は格子点上の座標、 h は格子幅、 $u(x_j, t)$ 、 $v(x_j, t)$ はそれぞれ厳密解、数値解である。計算結果を Fig.1 に示す。横軸は格子幅、縦軸は誤差の l_2 ノルムである。結果より格子幅に対する誤差変位の傾きが 4 次精度の傾きと一致していることから移流方程式の解析は目標精度を達成していることを確認した。

4. 1. 2. 線形波動方程式による精度解析

式(6)において $\beta = \kappa = \mu = \mu_B = 0$ としたとき以下のような 1 次元双曲型線形波動方程式系が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + c_0^2 \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

式(23)を空間 4 次中心差分、時間 SSP-RK3 として解析したとき空間精度が 4 次であることが期待される。よって以下に示す双曲型線形波動方程式の厳密解を用いた精度解析を行った。

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \quad (24)$$

$$p(x, t) = \frac{1}{2} \{p(x + c_0 t, 0) + p(x - c_0 t, 0)\} + \frac{1}{2c_0} \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{\partial}{\partial t} p(s, 0) ds \quad (25)$$

式(25)は式(24)から得られるダランベールの厳密解である。精度解析は式(23)から得られる数値解と式(25)から得られる厳密解の音圧値の誤差により評価した。誤差は $t = 0.3$ s の時間でそれぞれ格子幅 $h = 0.01 \times 2^{-(k-1)}$ ($k = 1, 2, \dots, 5$) の 5 通りに関して誤差を算出した。また時間ステップ幅は $\Delta t = h^{4/3}/2$ 、初期音速は $c_0 = 1$ m/s、媒質密度は $\rho_0 = 1.293$ kg/m³ を使用した。

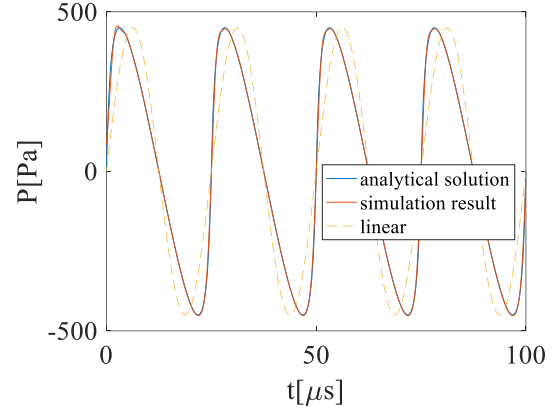


Fig. 3 Comparison of analytical solutions and simulation results for one-dimensional nonlinear propagation.

誤差は式(22)で示される l_2 ノルムにより評価した。以下に初期条件と境界条件を示す。

$$p(0, t) = p(2, t) = u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad 0 < x < 2$$

$$p(x, 0) = 10 \exp(-2^2(x-1)^2), \quad (26)$$

$$\frac{\partial p(x, 0)}{\partial t} = u(x, 0) = 0, \quad t > 0$$

計算結果を Fig. 2 に示す。横軸は格子幅、縦軸は誤差の l_2 ノルムである。結果より 4 次精度の傾きと一致していることから線形波動方程式の解析は目標の精度を達成していることを確認した。

4. 1. 3. 非線形音響解析の誤差

有限振幅音波の場合、媒質の非線形特性に起因して波形のひずみ現象が生じる。初期振幅 P_0 の音圧 $p = P_0 \sin \omega t$ の平面波が $+x$ 方向に伝搬している場合、波形ひずみは以下のように定式化される。

$$p = P_0 \sin \left[\omega \left(t' + \frac{\beta p x}{\rho_0 c_0^3} \right) \right] \quad (27)$$

ここで、 $t' = t - x/c_0$ である。式(27)による非線形音響解析の精度調査を行った。式(7)(8)より $\kappa = \mu = \mu_B = 0$ にすることにより以下に示すような粘性、熱伝導性による減衰のない 1 次元非線形波動方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\sigma_x(x)u \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial((c_0^2 \rho_0 + \beta p)u)}{\partial x} &= -\sigma_x(x)p \\ &+ P_0 \frac{\omega}{c_0} \exp(i\omega t) \delta(x - x^*) \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)の計算結果と式(27)を比較することにより 1 次元非線形音響の解析精度を調査する。計算手法は空間 4 次中心差分、時間 SSP-RK3 を用いた。計算条件は、周波数 40 kHz、物性値は空気の数値、 $c_0 = 340$ m/s、 $\rho_0 = 1.293$ kg/m³、 $\beta = 1.2$ 、入力音圧 $P_0 = 900$ Pa、格子幅は 1 つの波を 101 個の格子点で表現するため $h = \lambda/100$ に設定した。ここで λ は波長である。また精度を評価する座標 x_0 に初めて音波が到達する時間が時間ステップ幅の整数倍になるよう、計算領域 $0 \leq x \leq 45\lambda$ 、点音源の位置座標 $x_p = 5\lambda$ 、 $x_0 = 39\lambda$ 、時間ステップ幅 $\Delta t = 2h/10^3$ s に設定した。また PML の格子数 $N = 20$ とした。この条件下で $t = 40T$ まで計算を行った。ここで T は周期である。比較結果を Fig. 3 に示す。横軸は x_0 に初めて音波が到達してからの経過時間、縦軸は音圧である。解析による波形と数値解析による波形がよく一致していることから非線形効果をよく予測していることがわかる。ここで、

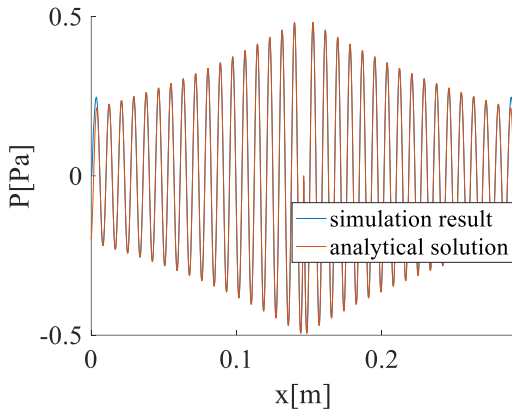


Fig. 4 Comparison of analytical solution and simulation result of one-dimensional sound wave attenuated by sound absorption.

初期正弦音波が衝撃波になる距離、衝撃波形成距離 $x_s = \rho_0 c_0^3 / \omega \beta P_0$ との関係について考えると、 $x_o = 0.772x_s$ であり 1 波長を 101 個で表現する場合、 x_s の 70% までは波形を維持できる精度であることがわかる。

4. 1. 4. 音波吸収による減衰の誤差

実在の流体を伝搬する音波は粘性や熱伝導性によって減衰する。また $+x$ 方向に伝播する平面波は指数関数 $e^{-\alpha x}$ で振幅が減少する。ここで α は減衰の大きさを表す吸収係数である。よってこの理論をもとに式(7)(8)の計算結果の減衰挙動による精度を確かめた。計算手法は空間 4 次中心差分、時間 SSP-RK3、4 次精度離散デルタ関数を使用した。また計算条件は、周波数 40 kHz、物性値は空気の値、 $c_0 = 340$ m/s, $\rho_0 = 1.293$ kg/m³, $\mu = 1.8 \times 10^{-5}$ Pa·s, $\mu_B = 1.0 \times 10^{-5}$ Pa·s, $\kappa = 2.41 \times 10^{-2}$ W/m·K, $c_p = 1.007$ J/kg·K, $c_v = 1.4/c_p$ J/kg·K, $\beta = 1.2$ とした。また散逸による減衰に興味があるため非線形効果が小さくなるよう入力音圧は $P_0 = 1$ Pa とし、格子幅は 1 つの波を 101 個の格子点で表現するため $h = \lambda/100$ とした。また精度を評価する時間が時間ステップ幅の整数倍になるよう、時間ステップ幅を $\Delta t = 2h/10^3$ s とし、時間 $t = 17T$ で理論値との比較を行った。計算領域は $0 \leq x \leq 34\lambda$, 点音源の位置座標は $x_p = 17\lambda$, PML の格子数 $N = 20$ とした。計算結果を Fig. 4 に示す。横軸は計算領域、縦軸は音圧である。また理論解は平面波の減衰傾向を表す関数 $e^{-\alpha x}$ をもとに算出した値である。計算による波形と理論から得られた波形がよく一致していることから散逸による減衰を予測可能であることがわかる。

4. 2. 2次元解析

4. 2. 1. 空間伝播による拡散の誤差

2次元空間を伝播する音波の音響インテンシティ I は伝播距離 r に反比例して減衰する。

$$I = \frac{1}{T_{ave}} \int_0^{T_{ave}} pu dt, \quad I(r) \propto \frac{1}{r} \quad (29)$$

この減衰特性をもとに、式(11)(12)(13)を $\kappa = \mu = \mu_B = 0$ としたときの 2次元空間伝播による減衰の精度を調査した。ここで、2次元空間伝播による減衰のみの誤差を評価するため、 $\kappa = \mu = \mu_B = 0$ とした。計算手法は空間 4 次中心差分、時間 SSP-RK3、4 次精度離散デルタ関数を使用した。また計算条件は、 $c_0 = 340$ m/s, $\rho_0 = 1.293$ kg/m³, $\beta = 1.2$, 周波数 40 kHz とした。入力音圧は非線形効果を小さくするため $P_0 = 1$ Pa, 格子幅は 1 つの波を 101 個の格子点で表現するため $h = \lambda/100$, 時間ス

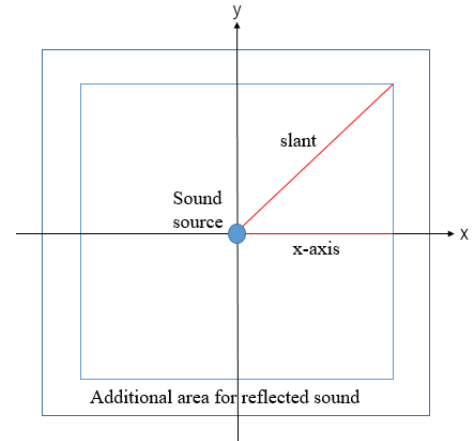


Fig. 5 Schematic diagram of calculation area.

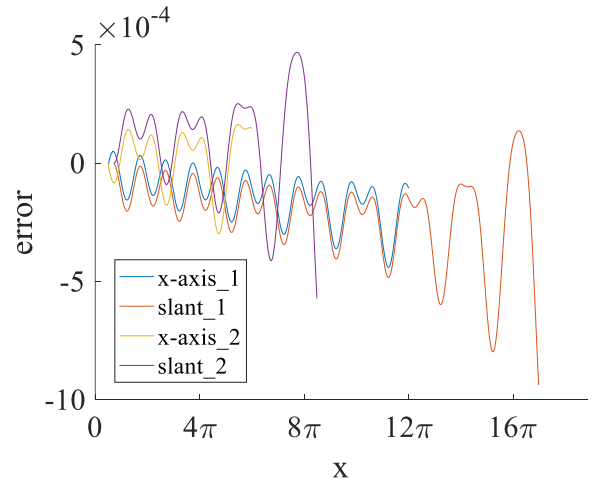


Fig. 6 Accuracy results of diffusion attenuation by two-dimensional propagation.

テップ幅は安定性解析により $\Delta t = 1.57 \times 10^{-7}$ s とした。また以上の条件をもとに 2 通りの計算を行った。1 通り目は、興味領域 $-7\lambda \leq x \leq 7\lambda$, $-7\lambda \leq y \leq 7\lambda$, 点音源の位置座標 $(x_p, y_p) = (0, 0)$ とした。また PML 領域に音波が入射すると微小だが音波が反射してしまうため、正確に 2次元拡散の誤差を評価するために、誤差評価領域は $0 \leq x \leq 3\lambda$, $0 \leq y \leq 3\lambda$, 計算時間は誤差評価領域の音場が定常状態になる時間 $T_{steady} = 6.243T$ と音響インテンシティの平均時間 T_{ave} を足し合わせた $t = T_{ave} + T_{steady}$ [s] とした。音響インテンシティ $|I|$ は $T_{ave} = 4T$ とし、 $T_{steady} \leq t \leq T_{ave} + T_{steady}$ [s] の値により以下の式より算出した。

$$|I_j| = \frac{\Delta t}{T_{ave}} \sum_{n=0}^{N-1} p_j^n |u_j^n| \quad (30)$$

2 通り目は、興味領域 $-10\lambda \leq x \leq 10\lambda$, $-10\lambda \leq y \leq 10\lambda$, 点音源の位置座標 $(x_p, y_p) = (0, 0)$, 誤差評価領域 $0 \leq x \leq 6\lambda$, $0 \leq y \leq 6\lambda$, 計算時間は $T_{steady} = 10.485T$ とし $t = T_{ave} + T_{steady}$ [s] とした。音響インテンシティ $|I|$ は $T_{ave} = 4T$ とし、 $T_{ave} \leq t \leq T_{ave} + T_{steady}$ [s] の値により算出した。理論値 $|I_{cor}|$ は計算から得られた $x_j = x_{100}$ における $|I(x_{100})|$ を基準として式(29)における減衰法則に従って算出した。ここで x_{100} は音源から $100h$ 離れた位置を表す。理論値算出は x_{100} の位置、すなわち音源から 1 波長離れた位置の値を使用した。音源から誤差算出方法を以下に示す。

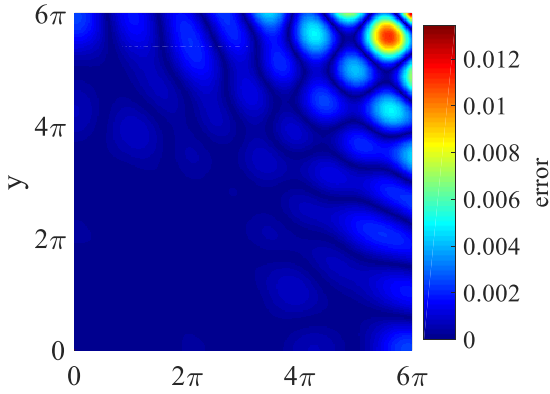


Fig. 7 Numerical error due to sound wave reflected at PML boundary.

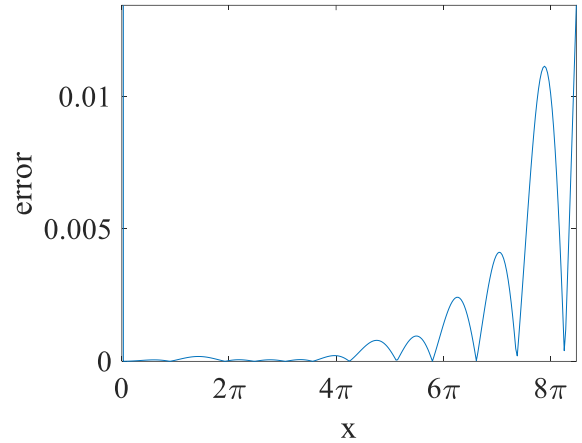


Fig. 9 Error on $y=x$ line due to sound wave reflected at PML boundary.

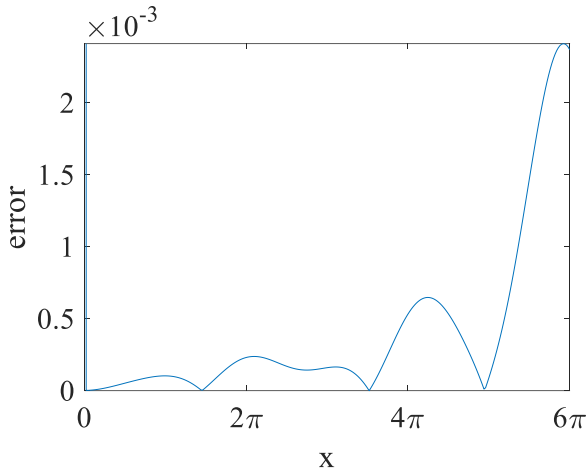


Fig. 8 Error on x -axis due to sound wave reflected at PML boundary.

$$e_j = \frac{|I_j| - |I_{\text{cor}}(x_j)|}{|I_{\text{cor}}(x_j)|} \quad (31)$$

誤差は Fig. 5 に示す, x 軸上, $y = x$ 上で評価した. 計算結果を Fig. 6 に示す. 誤差は 10^{-4} のオーダーであり高い精度が維持されることを確認した. また誤差が振動している原因のひとつに, 音響インテンシティを求めるときの T_{ave} が Δt の整数倍でない, かつ各格子点上で位相が異なる, という理由がある. このため誤差は T_{ave} を大きくすることでさらに小さくすることができると考えられる.

4. 2. 2. PMLの音響反射による誤差

本研究では, 開空間で形成される音場について興味があるため境界での音響反射を防ぐためにPMLを実装した. しかし興味領域とPML領域の境界でも音波は反射するため音響反射を完全に防ぐことはできない. よって2次元解析におけるPML境界での音響反射による誤差を調査した. 計算手法は空間4次中心差分, 時間 SSP-RK3, 4次精度離散デルタ関数を使用した. また計算条件は, 周波数 40 kHz, 物性値は空気の値, $c_0 = 340$ m/s, $\rho_0 = 1.293$ kg/m³, $\mu = 1.8 \times 10^{-5}$ Pa·s, $\mu_B = 1.0 \times 10^{-5}$ Pa·s, $\kappa = 2.41 \times 10^{-2}$ W/m·K, $c_p = 1.007$ J/kg·K, $c_v = 1.4/c_p$ J/kg·K, $\beta = 1.2$, 入力音圧 $P_0 = 1$ Pa, 格子幅 $h = \lambda/100$, 時間ステップ幅は安定性解析により $\Delta t = 1.57 \times 10^{-7}$ s, 興味領域 $0 \leq x \leq 3\lambda$, $0 \leq y \leq 3\lambda$, 点音源の位置座標 $(x_p, y_p) = (0, 0)$, 計算時間は興味領域の音場が定常状態になる時間 $T_{\text{steady}} = 6.243T$ と音響インテンシティの平均時間 T_{ave} を足し合わせた $t = T_{\text{ave}} +$

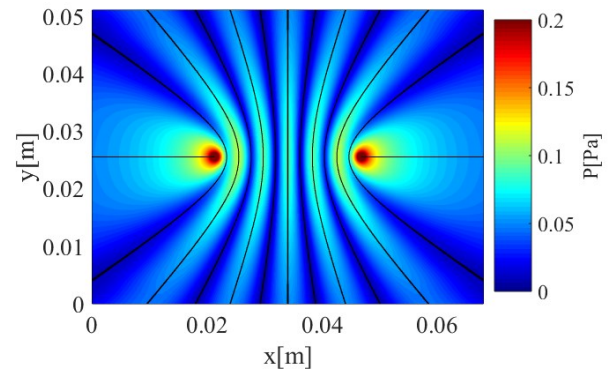


Fig. 10 Distribution the sound pressure fluctuation formed by two sound sources.

T_{steady} [s] とした. 音響インテンシティ $|I|$ は $T_{\text{ave}} = 4T$ として, $T_{\text{steady}} \leq t \leq T_{\text{ave}} + T_{\text{steady}}$ [s] の値により式(30)より算出した. また PML は式(9)より $N = 160$, $R = 1.0 \times 10^{-7}$ とした. 音響反射を含まない値 $|I_{\text{cor}}|$ は $0 \leq x \leq 3\lambda$, $0 \leq y \leq 3\lambda$ の領域に反射音を含まない領域を十分大きくし計算を行い, $0 \leq x \leq 3\lambda$, $0 \leq y \leq 3\lambda$ の値を使用した. 反射音による誤差は式(31)より算出した. 全体の計算結果を Fig. 7, Fig. 5 における x 軸上の値を Fig. 8, $y = x$ 軸上の値を Fig. 9 に示す. 誤差は全体で約 0.004, 音源付近では 5.0×10^{-4} 以下となり反射音は非常に小さいことが確認できた. しかし $(x, y) = (6\pi, 6\pi)$ 付近では 0.01 以上の誤差が出てしまった. 領域の角では, x 方向と y 方向の PML が重なっていることが原因と考えられる. しかし誤差が 0.01 以上の領域は小さいため, 実際に解析を行う上での問題は小さいと判断する.

5. 2音源を用いた音波干渉の解析

2音源による音波干渉の解析を行った. 計算手法は空間4次中心差分, 時間 SSP-RK3, 4次精度離散デルタ関数を使用した. また計算条件は, 周波数 40 kHz, 物性値は空気の値, $c_0 = 340$ m/s, $\rho_0 = 1.293$ kg/m³, $\mu = 1.8 \times 10^{-5}$ Pa·s, $\mu_B = 1.0 \times 10^{-5}$ Pa·s, $\kappa = 2.41 \times 10^{-2}$ W/m·K, $c_p = 1.007$ J/kg·K, $c_v = 1.4/c_p$ J/kg·K, $\beta = 1.2$, 入力音圧 $P_0 = 1$ Pa, 格子幅 $h = \lambda/100$, 時間ステップ幅は安定性解析により $\Delta t = 1.57 \times 10^{-7}$ s とした. 興味領域は $0 \leq x \leq 8\lambda$, $0 \leq y \leq 6\lambda$, 点音源の位置座標は2音源の距離が 3λ となるようなよう $(x_{p1}, y_{p1}) = (5\lambda/2, 3\lambda)$, $(x_{p2}, y_{p2}) = (11\lambda/2, 3\lambda)$, 計算時間は興味領域の音場

が定常状態になる時間 $T_{\text{steady}} = 6.265T$ と音響インテンシティの平均時間 T_{ave} を足し合わせた $t = T_{\text{ave}} + T_{\text{steady}}$ とした。音響インテンシティ $|I|$ は $T_{\text{ave}} = 4T$ として、 $T_{\text{steady}} \leq t \leq T_{\text{ave}} + T_{\text{steady}}$ の値により式(30)より算出した。PML は式(9)より $N = 160, R = 1.0 \times 10^{-7}$ とした。計算結果を Fig.10 に示す。2 音源が波長 3 個分離れていることで強め合いによる腹が 5 つできていることが確認できる。また Fig. 10 の黒線は重ね合わせの原理によって求めた腹と節の位置である。この結果から、計算結果は重ね合わせの原理に従っていることが確認できた。

6. 結論

本研究では、Westervelt 方程式と同精度の保存形双曲型方程式系を出発式とし、計算手法に空間 4 次中心差分法、時間 SSP-RK3、駆動力実装方法に 4 次精度離散デルタ関数を用いて点音源がつくる 2 次元音場の数値解析を行った。

1 次元移流方程式を用いた 4 次精度離散デルタ関数の精度解析では 4 次精度の結果を得ることができた。1 次元線形波動方程式の厳密解を用いた精度解析では期待される精度を得ることができた。1 次元の非線形効果の精度調査では、解析解により得られた波形と数値解析による波形がよく一致したことから非線形効果を予測可能であることを確認できた。また 1 波長を 101 個で表現する場合、衝撃波形成距離の 70% までは波形を維持できる精度であることを確認した。1 次元の音波吸収による減衰の誤差調査では、計算による波形と理論から得られた波形がよく一致したことから散逸による減衰を予測可能であることを確認した。

2 次元空間を伝播することにより生じる拡散減衰の誤差調査では、音響インテンシティの理論的な減衰傾向と計算結果の誤差がオーダー 10^{-4} の非常に小さかったため空間伝播による拡散減衰を予測可能であることを確認した。2 次元解析における、PML の境界で生じる反射音の誤差調査では、PML を 160 個の格子点で実装すれば反射音による誤差はオーダー 10^{-4} と十分小さくなることを確認した。2 音源による 2 次元解析では、重ね合わせの原理に従った干渉現象を確認することができた。

参考文献

- (1) Marshall, S. J. and W, J., "Acoustic streaming, fluid mixing, and particle transport by a Gaussian ultrasound beam in a cylindrical container," *Phys. Fluids* 27, 10361 (2015)
- (2) Kamakura, T., Matsuda, K., Kumamoto, Y. and Breazeale, M. A., "Acoustic streaming induced in focused Gaussian beams," *J. Acoust. Soc. Am.* 97, 2740(1995)
- (3) Aktas, M. K. and Farouk, B., "Numerical simulation of acoustic streaming generated by finite-amplitude resonant oscillations in an enclosure," *J. Acoust. Soc. Am.* 116, 2822(2004)
- (4) Diaz, M. A., Solovchuk, M. A. and Sheu, T.W.H., "conservative numerical scheme for modeling nonlinear acoustic propagation in thermoviscous homogeneous media," *J. Comput. Phys.* 363 (2018) 200-230
- (5) Johnson, S. G., "Notes on Perfectly Matched Layers (PMLs), Lecture notes," 5 (5.3), Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 2008, p.2.
- (6) Collino, F. and Tsogka, C., "Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media," *Geophysics* 66(1) (2001) 294-307.
- (7) Shu, C. H. and Osher, S., "Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes," *J. Comput. Phys.* 77(2) (1988) 439-471.

- (8) Petersson, N.A., O'Reilly, O., "Sjögreen, B. and Bydlon, Discretizing singular point sources in hyperbolic wave propagation problems," *J. Comput. Phys.* 321 (2016) 532-555.