

高マッハ数域における圧縮性乱流に対するエネルギー力学

Energy Dynamics of Compressible Homogeneous Isotropic Turbulence in Higher Mach Number

○ 苗村 善一, 京工織大 大学院, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, Email: namura@fe.mech.kit.ac.jp

西田 秀利, 京工織大 工学学部, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, Email: nishida@ipc.kit.ac.jp

里深 信行, 京工織大 工学学部, 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町, Email: satofuka@ipc.kit.ac.jp

Yoshikazu NAMURA, Dept. of Mech. and Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN

Hidetoshi NISHIDA, Dept. of Mech. and Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN

Nobuyuki SATOFUKA, Dept. of Mech. and Syst. Eng., Kyoto Inst. Tech., Matsugasaki, Kyoto 606-8585, JAPAN

In this paper, we apply the higher order method of lines to the direct numerical simulations of compressible homogeneous isotropic turbulence. In the higher order method of lines, the spatial derivatives are discretized by the modified differential quadrature method and the resulting system of equations is integrated by the low-storage Runge-Kutta scheme. We try to clarify the generation of shock waves by using energy dynamics.

1. 序論

圧縮性流れの数値計算は、圧縮機、燃焼器、スベ-スプレ-ン、超音速ノズル等の設計、開発に利用されるようになっており、風洞実験に変わる手法として実用化されつつある。圧縮性流れの数値計算を構成する2つの大きな柱は、計算スキ-ムと乱流モデルであり、前者は数値計算の安定な実行と高精度な衝撃波捕獲のために、後者はレイノルズ数の増大に伴う層流から乱流への遷移、ならびに発達乱流の解析の為に必要不可欠な要素である。計算スキ-ムの研究は、Beam-Warming 法や TVD スキ-ム等に代表されるように実用化されるスキ-ムも現れて来ている。しかしながら、乱流モデルの研究については、新たな概念の提案などが行なわれているものの、実用上の顕著な進歩、貢献を達成しているとは言い難い状況である。圧縮性乱流を支配する方程式は、エネルギーを含むナビエ-スト-クス方程式であり、この方程式をモデルを用いず直接解くことで、乱流の全ての現象を再現することが可能であるとの考えに立脚した手法が直接数値シミュレーションである。圧縮性乱流の直接数値シミュレーションは様々な問題から比較的簡単な流れに限定されるが、乱流の組織的構造の再現や非定常性などの多くの有用な情報をもたらす、乱流モデルの構築および改良のためのデ-タベ-スの役割を担っている。乱流の直接数値シミュレーションにおいては、これまでは精度が非常に高いスペクトル法⁽¹⁾や擬スペクトル法⁽²⁾に代表される数値計算法が主に用いられてきた。しかしながら、スペクトル法は汎用的な方法であるとは言い難い。そこで、複雑な幾何学形状の流れ場を取り扱うことができ、しかも境界条件の制限のない高次精度差分法により乱流の計算が行なわれるようになってきた。里深等⁽³⁾⁽⁴⁾は、非圧縮性乱流に対して高次精度線の方法を用いて、10次精度の計算結果が擬スペクトル法の計算結果と同一となり、また、計算時間も1/6ですむことを示した。以上のような様々な取り組みにより、圧縮性乱流についての基礎的知識が得られているが、その乱流構造の詳細は明らかにされていない。そこで、本研究においては圧縮性乱流構造の解明につながる第一歩として、高次精度線の方法を用いた2次元一様等方性乱流の直接数値シミュレーションを行い、高マッハ数域における圧縮性乱流の構造をエネルギー力学の観点から解明することを目的とする。

2. 基礎方程式

2.1 圧縮性粘性流方程式

2次元圧縮性粘性流に対する圧縮性ナビエ-スト-クス方程式は、無次元保存形ベクトル表示で以下のように

表される。

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \right) \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{q} 、 \mathbf{E} および \mathbf{F} はそれぞれ次のような保存量ベクトルで表される。

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{pmatrix} \quad (2)$$

ただし、 ρ は密度、 u 、 v は速度の x 、 y 方向成分、 e および p は単位体積当たりの全エネルギーおよび圧力であり、 t は時間である。また、 \mathbf{R} 、 \mathbf{S} はそれぞれ粘性項に対応する保存量ベクトルで、

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ R_4 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ S_4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

である。ここで、

$$\sigma_x = \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\sigma_y = \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

$$R_4 = u\sigma_x + v\tau_{xy} + \frac{1}{(\gamma-1)PrMa^2} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$S_4 = u\tau_{yx} + v\sigma_y + \frac{1}{(\gamma-1)PrMa^2} \frac{\partial T}{\partial y}$$

と表される。また、理想気体を仮定して比熱比を γ とすると、

$$e = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (5)$$

という関係を満足する。以上の無次元化は次の関係式により行うものとする。

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{\bar{L}_R}, \quad y = \frac{\bar{y}}{\bar{L}_R}, \quad t = \frac{\bar{t}}{\bar{L}_R} \\ u &= \frac{\bar{u}}{\bar{U}_R}, \quad v = \frac{\bar{v}}{\bar{U}_R}, \quad p = \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}_R \bar{U}_R^2} \\ \rho &= \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_R}, \quad T = \frac{\bar{T}}{\bar{T}_R}, \quad e = \frac{\bar{e}}{\bar{\rho}_R \bar{U}_R^2} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、「-」は有次元量で、「R」は代表量とする。さらに、レイノルズ数、マッハ数およびプラントル数を Re 、 Ma 、および Pr とするとそれぞれ、

$$Re = \frac{\bar{\rho}_R \bar{U}_R \bar{L}_R}{\bar{\mu}_R}, \quad Ma = \frac{\bar{U}_R}{\bar{a}_R}, \quad Pr = \frac{\bar{C}_p \bar{\mu}_R}{\bar{\kappa}_R} \quad (7)$$

と定義できる。ただし、 $\bar{\mu}_R$ 、 $\bar{\kappa}_R$ は粘性係数、熱伝導係数であり、 \bar{C}_p は定圧比熱とする。さらに、 \bar{a}_R は温度 \bar{T}_R における音速とする。

2.2 代表量

波数空間における速度ベクトル \hat{u} により、エネルギー・スペクトル密度 $U(k_1, k_2)$ は、

$$U(k_1, k_2) = \frac{1}{2} |\hat{u}(k_1, k_2)|^2 \quad (8)$$

と与えられる。式 (8) により、エネルギー・スペクトル $E(k)$ は、

$$E(k) = \sum_{k-1/2 < k' < k+1/2} U(k), \quad k' = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad (9)$$

により定義することができる。

ただし、波数空間 (k_1, k_2) に対して、円形の殻を決定し、 k 番目の殻を、

$$(k-1/2 < k' < k+1/2), \quad k' = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad (10)$$

によって定義する。ただし、全ての殻は単位幅とする。

Tab. 1: 乱流統計量

全エネルギー	$\Sigma = \sum_{k=1}^{N/2} E(k)$
エンストロフィ	$\Omega = \sum_{k=1}^{N/2} k^2 E(k)$
エンストロフィ散逸率	$\eta = 2\nu \sum_{k=1}^{N/2} k^4 E(k)$
マイクロスケール	$\lambda = \left[\frac{\nu \Omega}{\eta} \right]^{\frac{1}{2}}$
マイクロスケールに対するレイノルズ数	$Re_\lambda = \left[\frac{\Sigma \Omega}{\nu \eta} \right]^{\frac{1}{2}}$

以上のエネルギー・スペクトルを用いて表 1 に示す各統計量を定義する。ここで、本研究における代表量としては、代表速度に初期速度場の r.m.s 値 $u_{r.m.s.0}$ を、代表長さにマイクロスケールを、代表密度、および代表温度には初期の平均値を用いるものとする。

3. 数値計算法

基礎方程式の解法には、高次精度線の方法を用いる。線の方法は、空間微分項と時間微分項を別々に取り扱うものであり、本研究では、空間微分項の離散化には、微分求積法を改良した修正微分求積法 (Modified Differential Quadrature Method: 以下 MDQ 法と略す。) ⁽⁵⁾ を適用する。この結果、基礎方程式 (1) の時間と空間に関する偏微分方程式は時間に関する連立常微分方程式に帰着され、適当な時間積分法により時間積分される。

3.1 空間微分項の離散化

MDQ 法は、空間微分を適当な係数とその関数値との線形結合で近似するものであり、例えば、速度 u の 1 階微分は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \sum_{m=-q}^q a_{im} u_{i+m,j} \equiv D_M(u_{i,j}) \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \sum_{m=-q}^q b_{im} u_{i+m,j} \equiv D_M^2(u_{i,j}) \quad (12)$$

と離散化される。重み係数 a_{im} の決定に関しては以下のように行う。

ラグランジュ補間法を用いて u を $x = x_{i,j}$ を含む M 点で近似すると、

$$u(x) = \sum_{m=-q}^q \Phi_m(x) u_{i+m,j} \quad (13)$$

と表すことができる。

ここで、関数 $\Phi_m(x)$ は補助関数 $\Pi(x)$ を用いると、

$$\Phi_m(x) = \frac{\Pi(x)}{(x - x_{i+m,j}) \Pi'(x_{i+m,j})} \quad (14)$$

$$\Pi(x) = (x - x_{i-q,j})(x - x_{i-q+1,j}) \cdots (x - x_{i+q,j})$$

と定義され、関数 $\Phi_m(x)$ と補助関数 $\Pi(x)$ はそれぞれ次の関係式を満足する。

$$\Phi_m(x_{i+l,j}) = \delta_{m,l}, \quad l = -q, \dots, 0, \dots, q \quad (15)$$

$$\Pi(x_{i+l,j}) = 0$$

ただし、 $\delta_{m,l}$ はクロネッカのデルタであり、「 \prime 」は d/dx を表すものとする。

次に、式 (13) を x 方向に偏微分すると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{m=-q}^q \Phi'_m(x) u_{i+m,j} \quad (16)$$

が得られる。これより、 $x = x_{i,j}$ における x 方向の偏微分は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \sum_{m=-q}^q \Phi'_m(x_{i,j}) u_{i+m,j} \quad (17)$$

と表すことができる。

したがって、1 階微分に対する重み係数 a_{im} は $\Phi'_m(x_{i,j})$ に一致し、

$$a_{im} = \frac{\Phi'_m(x_{i,j})}{(x_{i,j} - x_{i+m,j}) \Pi'(x_{i+m,j})} \quad (m \neq 0) \quad (18)$$

$$a_{i0} = \frac{\Phi''(x_{i,j})}{2\Pi'(x_{i+m,j})} \quad (m = 0)$$

と与えることができる。さらに、2階微分に関する重み係数 b_{im} は a_{im} を用いて、

$$b_{im} = \sum_{l=-q}^q a_{il}a_{lm} \quad (19)$$

で与えることができる。ここで、 $M = 2q + 1$ は精度に関するパラメータであり、 M を MDQ 法の次数と呼ぶ。等間隔格子を用いる場合、重み係数は格子数に依存せず、その結果、数値計算の最初に重み係数を求めて記憶させておけばよく、この場合には係数間には、

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_{-1} = -a_1, \dots, a_{-q} = -a_q \\ b_{-1} &= b_1, \dots, b_{-q} = b_q \end{aligned} \quad (20)$$

なる関係式が成立するため、計算効率の向上が可能となる。また、 M を変化させることにより、任意の精度で空間微分項の離散化を行うことができる。このとき、 $M = 3$ のときでは2次精度中心差分と、 $M \rightarrow \infty$ の極限については、フーリエ級数展開法と同一の結果を与える。

3.2 時間積分法

式(1)の空間微分項を MDQ 法により離散化すると、時間、空間に関する偏微分方程式は時間に関する連立常微分方程式

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{W}(\mathbf{q}) \quad (21)$$

に帰着する。この時間に関する連立常微分方程式は Williamson によって提案された3段階4次精度の縮退ルンゲ・クッタ法(以下 LSRK 法と略す)⁽⁶⁾により時間積分される。

LSRK 法は、時間段階が n から $n + 1$ まで進む場合、次の3段階の手順で積分される。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{(1)} &= \Delta t \mathbf{W}(\mathbf{q}^n) \\ \mathbf{q}^{(1)} &= \mathbf{q}^n + \mathbf{Q}^{(1)} \\ \mathbf{Q}^{(2)} &= -5\mathbf{Q}^{(1)} + \Delta t \mathbf{W}(\mathbf{q}^{(1)}) \\ \mathbf{q}^{(2)} &= \mathbf{q}^{(1)} + \frac{\mathbf{Q}^{(2)}}{8} \\ \mathbf{Q}^{(3)} &= \frac{\mathbf{Q}^{(2)}}{16} + \Delta t \mathbf{W}(\mathbf{q}^{(2)}) \\ \mathbf{q}^{n+1} &= \mathbf{q}^{(2)} + \frac{2\mathbf{Q}^{(3)}}{3} \end{aligned} \quad (22)$$

4. 初期および境界条件

4.1 境界条件および計算格子

境界条件は、流れ場を等方性と仮定しているため、各方向とも周期境界条件とし、一辺 2π の正方領域を考える。計算格子としては等間隔正方格子を用いる。

4.2 初期条件

本研究に用いる初期条件は、一様等方性乱流の直接シミュレーションに対して特別に提案されたものであり、この種の計算ではよく用いられる条件⁽⁷⁾である。

まず最初に、速度ベクトル \mathbf{u}_0 の各成分 u_0, v_0 、密度変動成分 ρ_0 、および温度変動成分 T_0 に対して物理面 $[-0.5, 0.5]$ での一様乱数により初期値を設定する。次にこれらの各成分について、ある相関関係を満足させるために、任意の自己相関スペクトル $C(k)$ を使って、それぞれの変数に相関関係を与える。

本研究では、全ての変数に対する自己相関スペクトルを次式により定義する。ここで、 k_0 はピーク波数である。

$$C(k) = k^4 \exp(-2k^2/k_0^2) \quad (23)$$

また、平均を $\langle \rangle$ で表すと、自己相関スペクトルは変数 f について、

$$f_{r.m.s}^2 = \langle f^2 \rangle = \int C(k) dk \quad (24)$$

なる関係が成り立つ。

次にそれぞれの変数が必要なスペクトルを満足させるための操作を密度 ρ_0 を用いて説明する。まず、波数空間 (k_1, k_2) に対して円形の殻を決定し、 k 番目の殻を、

$$(k - 1/2 < k' < k + 1/2), \quad k' = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad (25)$$

によって定義する。ただし、全ての殻は単位幅とする。また、 k 番目の殻の密度 ρ_0 の自己相関スペクトル $C_\rho(k)$ を

$$C_\rho(k) = \sum_{k-1/2 < k' < k+1/2} |\hat{\rho}_0(k_1, k_2)|^2 \quad (26)$$

のように定義する。よって、密度 ρ_0 が必要なスペクトル分布を得るためにスケール変換を行い、物理面へ逆変換することにより分布を与える。

$$\hat{\rho}_0(k_1, k_2) \rightarrow \hat{\rho}_0(k_1, k_2) \sqrt{\frac{C(k)}{C_\rho(k)}} \quad (27)$$

また、スペクトル分布を変えないことなしに物理面において任意の定数により初期の密度および温度変動の強さを任意に変換することができるので、次式のように変換前の密度の $r.m.s$ 値を $\rho_{r.m.s}$ 、最終的に与えたい初期密度変動の強さを $\rho_{r.m.s,0}$ とすると、

$$\rho_0(x, y) \rightarrow \alpha \rho_0(x, y), \quad \alpha = \frac{\rho_{r.m.s,0}}{\rho_{r.m.s}} \quad (28)$$

とスケール変換することにより必要な強さの初期密度分布を与えるものとする。しかしながら、熱力学的変換は絶えず非負であるので、次式のように平均値1を加えることにより正値性を満足させる。

$$\rho_0 \rightarrow \rho_0 + 1 \quad (29)$$

また、温度変動成分 T_0 についても同様にして分布を与える。圧力については、状態方程式により次のように与えるものとする。

$$P_0 = \frac{\rho_0 T_0}{\gamma M a^2} \quad (30)$$

次に、初期速度成分については圧縮性乱流における圧縮性の影響を考えるために、速度ベクトル \mathbf{u}_0 をヘルムホルツ分解することにより圧縮性および非圧縮性成分の速度ベクトルの和として次のように表す。

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0^C(x, y) + \mathbf{u}_0^I(x, y) \quad (31)$$

ここで、 $\mathbf{u}_0^C, \mathbf{u}_0^I$ は圧縮性、非圧縮性の速度成分ベクトルで、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}_0^I &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{u}_0^C &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

と定義される。この分解は、フーリエ空間で次のように表される。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_0^C &= \frac{\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}_0}{k^2} \mathbf{k} \\ \hat{\mathbf{u}}_0^I &= \hat{\mathbf{u}}_0 - \hat{\mathbf{u}}_0^C \end{aligned} \quad (33)$$

よって、式 (33) を用いてフーリエ空間における \hat{u}_0^C 、 \hat{u}_0^I を求め、式 (26)、(27) においてスカラーをベクトルに変えることにより、必要なスペクトルを満足する \hat{u}_0^C 、 \hat{u}_0^I を与えることができる。ここで、 \hat{u}_0^C および \hat{u}_0^I は独立であるとするので、速度に自由度が 1 つ残ることになる。そのため、次式によって運動エネルギーに対する圧縮性成分の強さ χ_0 を与えることにより u_0 を求めることができる。

$$\chi_0 = \frac{\int \hat{u}_0^C(x, y)^2 dx}{\int \hat{u}_0^C(x, y)^2 dx + \int \hat{u}_0^I(x, y)^2 dx} \quad (34)$$

また、無次元化において代表速度に初期の速度成分の *r.m.s* 値を採用するので、初期条件における速度場の *r.m.s* 値 $u_{r.m.s.0}$ は、

$$u_{r.m.s.0} = 1 \quad (35)$$

となる。また、代表量により得られたレイノルズ数 Re_λ の関係式は式 (26) と表 1 および次式

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{N/2} E(k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N/2} C(k) \quad (36)$$

により

$$Re = \sqrt{2} Re_\lambda \quad (37)$$

となる。

5. 各エネルギーの定義

5.1 運動エネルギー・スペクトル

エネルギー・スペクトルは、異なったスケールの渦の動きに結びついた相対的なエネルギーの大きさを表すのに便利な量である。一様な密度分布を持つ非圧縮性流において運動エネルギー $\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2$ は、速度の 2 乗のみに比例する。従って、エネルギー・スペクトルは速度のパワー・スペクトルに相当する。しかしながら、圧縮性流に対しては、密度の変動が存在するために、これをそのまま適用することができない。そこで、新しい物理量 $\mathbf{w} \equiv \sqrt{\rho}\mathbf{u}$ を導入すると、運動エネルギーは $\frac{1}{2}|\mathbf{w}|^2$ と表せ、 \mathbf{w} のパワー・スペクトルを求めることで、自然な形で運動エネルギー・スペクトルを求めることができる。

$$E(k) = \frac{1}{2} \sum_{k-1/2 < k' < k+1/2} |\hat{\mathbf{w}}(k_1, k_2)|^2 \quad (38)$$

$$k' = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

次に、 $\mathbf{w} \equiv \sqrt{\rho}\mathbf{u}$ を初期速度成分について行ったのと同様にヘルムホルツ分解

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{w}^I(x, y) + \mathbf{w}^C(x, y) \\ \nabla \cdot \mathbf{w}_0^I &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{w}_0^C = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

によって非圧縮性成分と圧縮性成分とに分ける。このようにして求めた \mathbf{w}^α ($\alpha = I, C$) を用いて、非圧縮性成分と圧縮性成分の運動エネルギー・スペクトルは以下のように定義される。

$$E^\alpha(k) = \frac{1}{2} \sum_{k^1/2 < |k'| < k+1/2} |\hat{\mathbf{w}}^\alpha(k_1, k_2)|^2 \quad (40)$$

$$k' = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad (\alpha = I, C)$$

5.2 空間平均エネルギー

各空間平均エネルギーは表 2 のように定義される。ただし、 $\langle \rangle$ は空間平均を表す。

また、これらのエネルギー間には以下の関係が成立する。

$$\begin{aligned} e_K &= e_K^I + e_K^C \\ e_I + e_K &= e_I + e_K^I + e_K^C = \text{const} \end{aligned} \quad (41)$$

Tab. 2: 空間平均エネルギー

内部エネルギー	$e_I = \left\langle \frac{p}{\gamma - 1} \right\rangle$
運動エネルギー	$e_K = \left\langle \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} ^2 \right\rangle$
非圧縮性運動エネルギー	$e_K^I = \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{w}^I ^2 \right\rangle$
圧縮性運動エネルギー	$e_K^C = \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{w}^I ^2 \right\rangle$

5.3 空間平均運動エネルギー方程式

空間平均運動エネルギーの各成分についての方程式は、連続の式および運動量の式より導くことができ、

$$\frac{d}{dt} \langle e_K^\alpha \rangle = \langle A^\alpha \rangle + \langle P^\alpha \rangle + \langle D^\alpha \rangle \quad (42)$$

と表せる。右辺の各項は、

$$\begin{aligned} \langle A^\alpha \rangle &\equiv \left\langle \left(-u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2} w_i \Delta \right) w_i^\alpha \right\rangle \\ \langle P^\alpha \rangle &\equiv \left\langle -\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x_i} w_i^\alpha \right\rangle \end{aligned} \quad (43)$$

$$\langle D^\alpha \rangle \equiv \left\langle \left(\frac{2}{Re\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \Delta \delta_{ij} \right) \right) w_i^\alpha \right\rangle$$

$$S_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad \Delta = \nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$(\alpha = I, C, T)$$

であり、 A, P, D はそれぞれ移流項、圧力項、散逸項である。この方程式の各項の時間変化をみることにより、エネルギーのやりとりをさらに詳しく考察できるようになる。

また、 I, C, T はそれぞれ非圧縮性成分、圧縮性成分、全成分を表している。

6. 計算結果および考察

2次元圧縮性乱流の DNS を行った結果、衝撃波の生成について得られた知見を示す。本報告に掲載した結果についての計算条件は、計算格子 256×256 の等間隔格子、時間刻み幅 $1/2000$ 、MDQ の次数 11 (空間 10 次精度)、初期マイクロスケールレイノルズ数 $Re_\lambda = 50$ 、マッハ数 $Ma = 1.1$ 、プラントル数 $Pr = 1.0$ 、初期の圧縮性率 (全運動エネルギーに対する圧縮性運動エネルギーの割合) $\chi_0 = 0.5$

初期密度および初期温度変動値 $\rho_{r.m.s.0} = T_{r.m.s.0} = 0.25$ として、エネルギー・スペクトルのピク波数を $k_0 = 1.2$ として計算を行った。

まず、流れ場の様子を見るために図1に密度分布を図2、3に圧縮性、非圧縮性の各速度成分のベクトル線図をそれぞれ示す。図3から渦の様子がわかるが、この図と図1から計算開始後、時間の経過と共に渦の間付近で衝撃波が生成、伝播していき、それと共に衝撃波の影響から渦の分布が変化していくのが見て取れる。

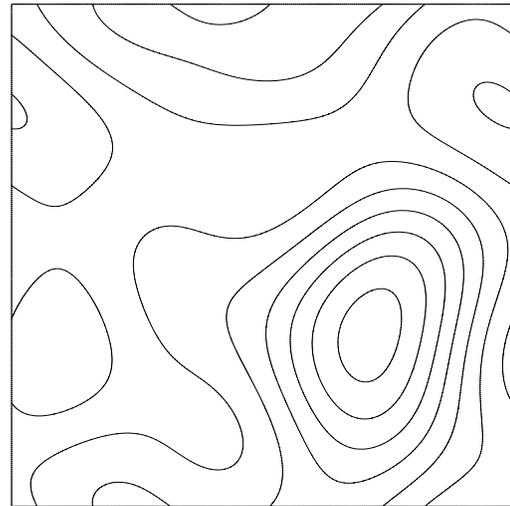
さらに、エネルギーの観点から考察を行うために速度の圧縮性成分、非圧縮性成分にそれぞれ起因する圧縮性運動エネルギー、非圧縮性運動エネルギーと内部エネルギーの値の大きな部分と密度の分布を図4、5に示す。等高線は密度を、赤、青、緑の部分はそれぞれ内部エネルギー、圧縮性運動エネルギー、非圧縮性運動エネルギーの大きな値を持つ領域を示している。

図1、2から、初期の段階において圧縮性速度ベクトル同士が衝突する位置があり、時間の経過後、その付近において衝撃波が生成することが確認できる。また、図4から、この位置の付近において初期においてある程度大きな値を持っていた圧縮性運動エネルギーが時間の経過と共に減少し、それと入れ替わるようにして内部エネルギーがこの位置に増加し、この内部エネルギーの大きな領域が衝撃波の生成後、その伝播と共に広がっていくのが確認できる。さらに、衝撃波の伝播が開始した後、衝撃波の後方に圧縮性運動エネルギーが生成されることも確認できる。

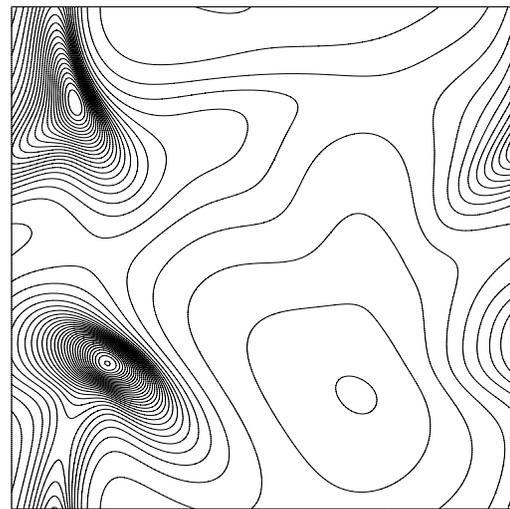
次に、図3、5より、非圧縮性速度ベクトル、非圧縮性運動エネルギー共に多少の変化は見られるものの、圧縮性成分ほど大きな変化は見られず、その変化も衝撃波伝播の影響による渦の変形により若干変化するのみであると思われる。これより、衝撃波の生成に関して非圧縮性運動エネルギーはほとんど関与しないことが考えられる。

さらに、空間平均ではあるがエネルギーの伝達過程をより詳しく見るためにエネルギー及び5.3節に記した空間平均運動エネルギー方程式の各項の時間履歴を図6から9に示す。図6からは前述のように非圧縮性運動エネルギーにはあまり変化がなく、圧縮性運動エネルギーから内部エネルギーにエネルギーが伝達されているのがわかる。また、図7から内部エネルギーとのエネルギー伝達に比べ値は小さいものの、圧縮性運動エネルギーは非圧縮性運動エネルギーともエネルギー交換を行っており、主に衝撃波の生成以前の初期の段階に多く見られる。そして、そのエネルギーの伝達は非圧縮性成分から圧縮性成分へとエネルギーが流れていることがわかる。さらに、図8に示す圧力項においては非圧縮性成分はほとんど0であり、圧縮性運動エネルギーが内部エネルギーと運動エネルギーとのエネルギー交換のほとんどを占めていることが見て取れる。これより、衝撃波生成以前には圧縮性運動エネルギーの多くを内部エネルギーへ伝達し、衝撃波の生成後は主に内部エネルギーからエネルギーを受け取る形でエネルギー交換をしていることがこの図からわかる。図9についてはエネルギーの散逸を表しており、衝撃波の生成後圧縮性成分が非常に大きな量を持つことが確認できる。

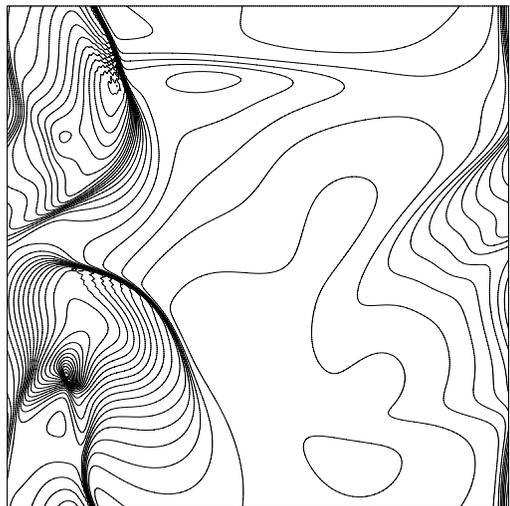
以上のことから、圧縮性速度成分同士が衝突するような位置における流体の衝突による急激な減速に伴い、圧縮性運動エネルギーが内部エネルギーにエネルギーを伝達することで内部エネルギーが増加し、そこに急激な速度変化を伴う不連続面が生成することで衝撃波が生成すると考えられる。



t=0.0

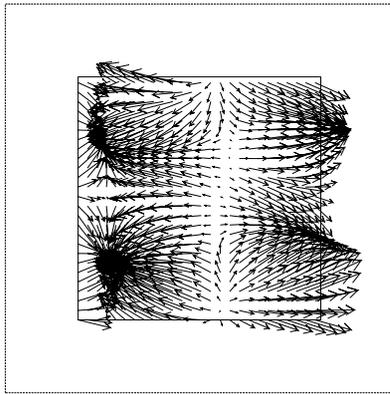


t=0.5

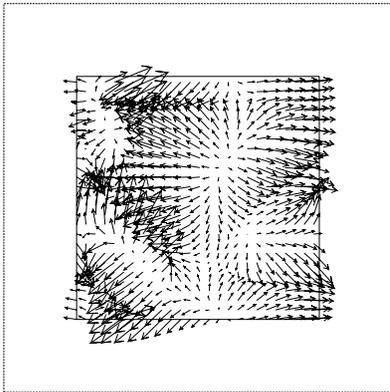


t=1.0

Fig. 1: Density & vorticity distributions

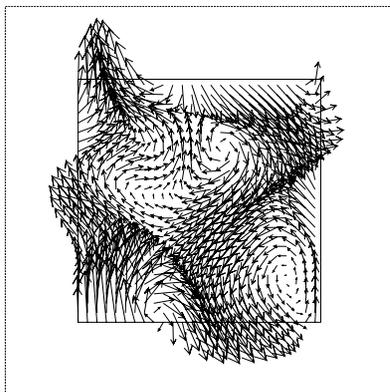


$t=0.0$

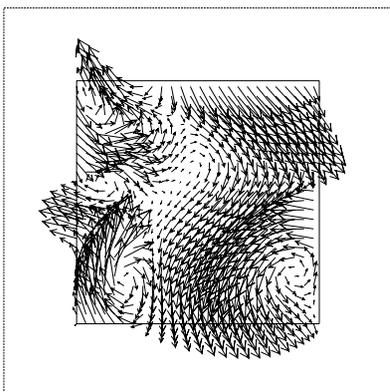


$t=1.0$

Fig. 2: Velocity vectors of compressible part

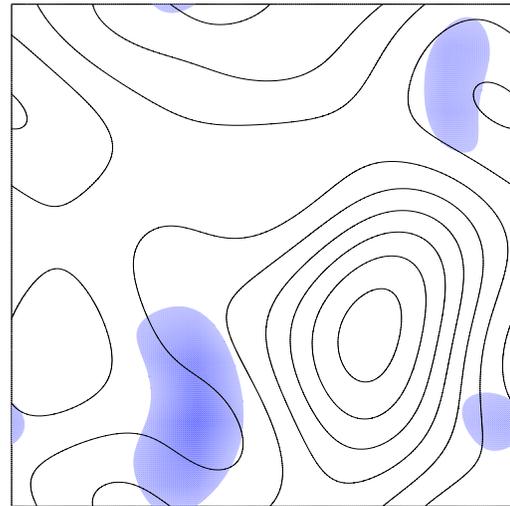


$t=0.0$

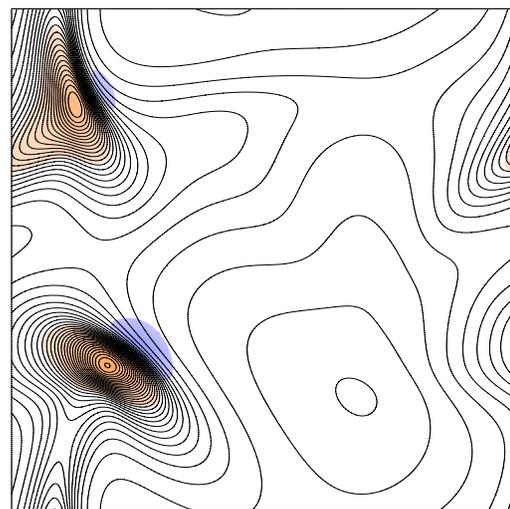


$t=1.0$

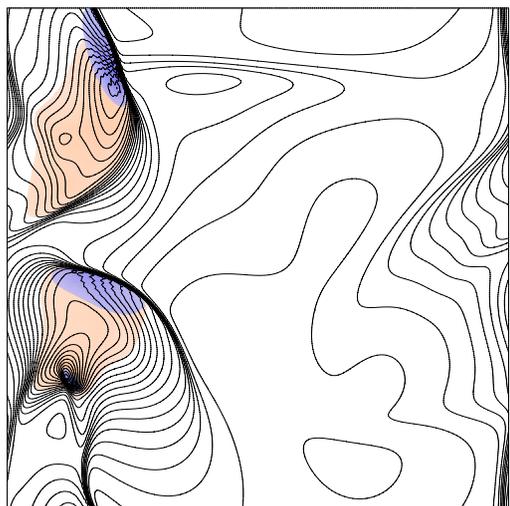
Fig. 3: Velocity vectors of incompressible part



$t=0.0$

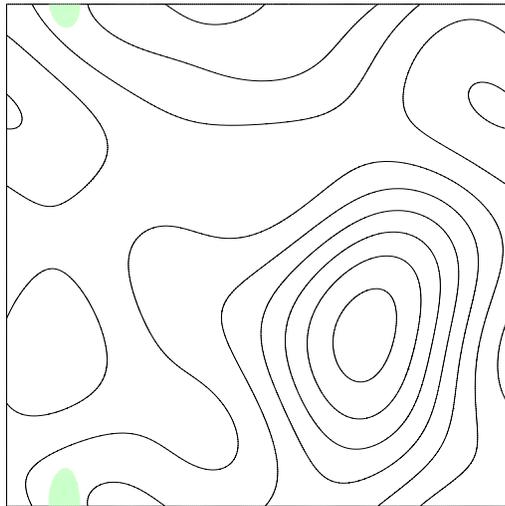


$t=0.5$

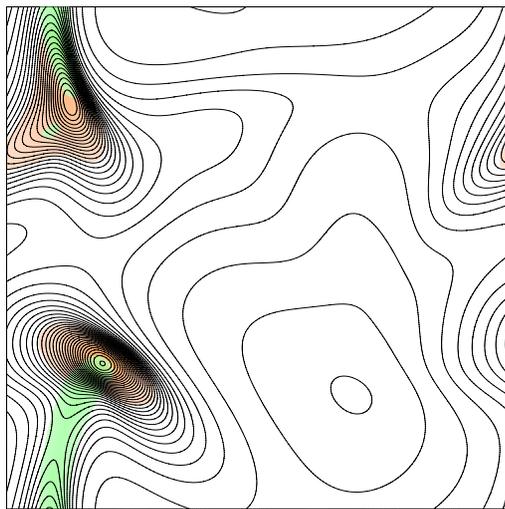


$t=1.0$

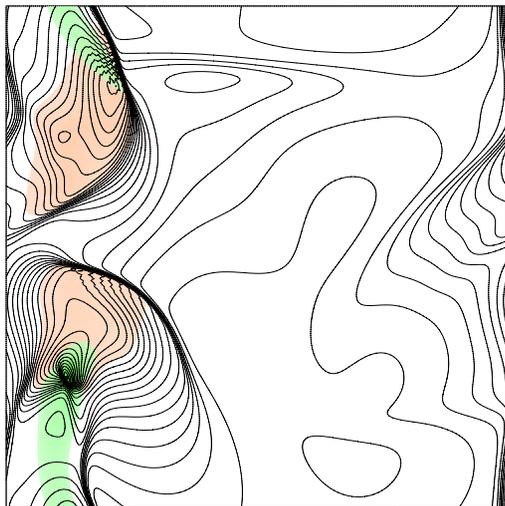
Fig. 4: Density, kinetic energy compressible part & internal energy distributions



t=0.0



t=0.5



t=1.0

Fig. 5: Density, kinetic energy incompressible part & internal energy distributions

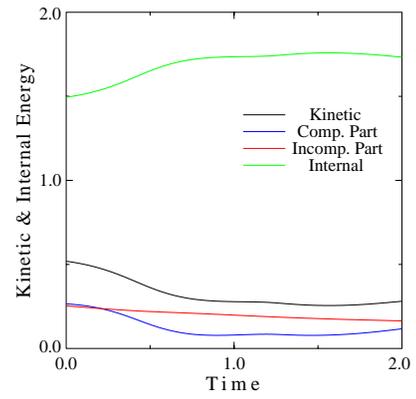


Fig. 6: History of energies

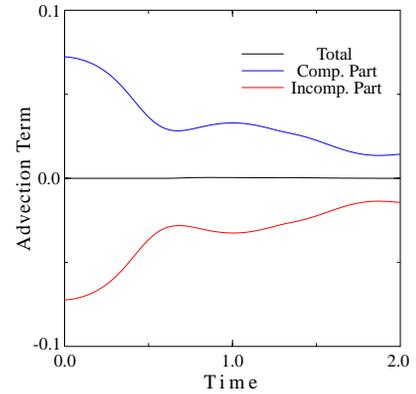


Fig. 7: History of advection terms

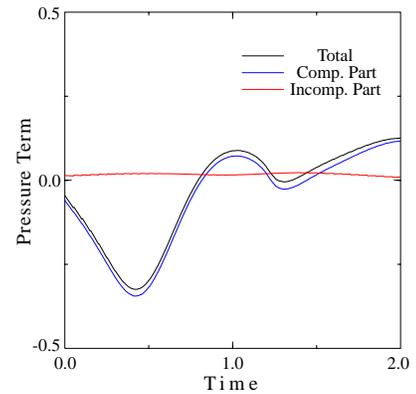


Fig. 8: History of pressure terms

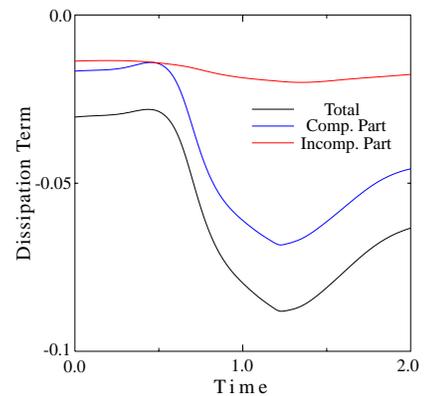


Fig. 9: History of dissipation terms

7. 結論

マッハ数が 1.0 を超えるようなマッハ数域において 2 次元の一様等方性圧縮性乱流の直接シミュレーションを行った結果、以下のような結論を得た。

- (1) 渦間において圧縮性の速度成分が衝突するような位置において衝撃波は生成する。
- (2) 衝撃波は圧縮性運動エネルギーから内部エネルギーへエネルギーが伝達され、内部エネルギーが増加することにより生成する。

参考文献

- (1) S.A.Orszag, Turbulence and Transition: A Progress Report, Lecture Notes in Physics, 59(1984), 32-51, Springer-Verlag.
- (2) S.A.Orszag, Comparison of Pseudospectral and Spectral Approximation, Studies in Applied Mathematics, 51-3(1972), 253-259.
- (3) N.Satofuka, and H.Nishida, A New Method for the Numerical Simulations of Turbulence, BAIL, (1984), 291-296, Boole Press.
- (4) N.Satofuka, H.Nakamura, and H.Nishida, Higher-order Method of Lines for the Numerical Simulation of the Turbulence, Lecture Note in Physics, 218(1984), 475-480, Springer-Verlag.
- (5) N.Satofuka, and K.Morinishi, A Numerical Methods for Solving the Vlasov Equation, NASA TM 81339, (1982).
- (6) J.H.Williamson, Low-Strage Runge-Kutta Schemes, J.Comp.Phys., 35 (1980), 48.
- (7) G.Erlebacher and M.Y.Hussaini, H.O.Kreiss, S.Sarkar, The Analysis and Simulation of Compressible Turbulence, Theoret. Comput. Fluid Dynamics, (1990), 73-95.