

円柱まわりの流れにより発生する音の理論予測について

On the Theoretical Prediction of Sound Generated by the Flow around a Circular Cylinder

- 畠山 望, 東北大学流体科学研究所, 〒 980-8577 仙台市青葉区片平 2-1-1, Email: hatakeyama@ifs.tohoku.ac.jp
細谷 浩之, 東北大学大学院工学系研究科, 〒 980-8577 仙台市青葉区片平 2-1-1
大沼 盛, 東北大学流体科学研究所, 〒 980-8577 仙台市青葉区片平 2-1-1
井上 督, 東北大学流体科学研究所, 〒 980-8577 仙台市青葉区片平 2-1-1, Email: inoue@ifs.tohoku.ac.jp
Nozomu HATAKEYAMA, Institute of Fluid Science, Tohoku Univ., Aoba-ku, Sendai 980-8577, JAPAN
Hiroyuki HOSOYA, Dept. of Aeronautics and Eng., Tohoku Univ., Aoba-ku, Sendai 980-8577, JAPAN
Sakari ONUMA, Institute of Fluid Science, Tohoku University, Aoba-ku, Sendai 980-8577, JAPAN
Osamu INOUE, Institute of Fluid Science, Tohoku University, Aoba-ku, Sendai 980-8577, JAPAN

Sounds generated by flows around a circular cylinder are solved by direct numerical simulations (DNS) of the compressible Navier-Stokes equations, and compared with those computed by the Curle's equation. The results show that the Curle's equation describes the basic nature of dipole sounds as observed in DNS, but cannot precisely predict the sound field because it lacks information on the Doppler shift and the time-averaged pressure field. In consideration for both of these effects, a modification of the Curle's equation is proposed and found to give a better prediction especially for the propagation directions of sound peaks.

1. 緒言

非定常圧縮性ナビエ=ストークス方程式の直接数値計算 (DNS) を用いて, 二次元円柱まわりの流れにより発生する音を詳細に捉えることが出来た.^(1,2) そこで, 音響学的アナロジーに基づいた理論予測⁽³⁻⁵⁾ の検証を行い, その有効性を議論する.

流体音の数値計算は大きく 3 つに分類される. (1) 音源となる近傍場を非圧縮で数値的に解き, 遠方音場を音響学的アナロジーによる近似式を用いて求める方法,⁽⁶⁾ (2) 近傍場を非圧縮性 DNS で求め, 音波の伝播については線形化した近似方程式を数値的に解く方法,^(7,8) そして (3) 遠方場まで含んだ圧縮性 DNS^(1,2) である. (1) と (2) には近似が入り込むため, 計算された音圧場は実験や (3) による検証が必要となる. 本研究では, (1) でしばしば用いられる Curle の式⁽⁵⁾ の近似表現に焦点を絞り, DNS の結果と比較しながら音波予測の可能性を探る.

2. DNS^(1,2)

円柱中心を原点とする二次元デカルト座標系 $(x, y) = (x_1, x_2)$ において, 一様流速 $(u_1, u_2) = (U, 0)$ を与える (Fig. 1). また, 原点からの距離 r と上流から時計回りの角度 θ による極座標系 (r, θ) を取る. 各物理量は, 静止音速 c_0 , 静止密度 ρ_0 , 及び円柱直径 D により無次元化する.

非定常の二次元圧縮性ナビエ=ストークス方程式を,

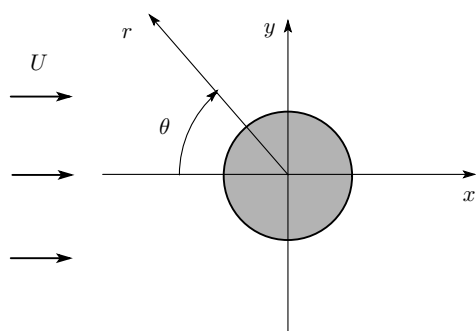


Fig. 1: Schematic diagram of flow

空間微分は 6 次精度 Padé 型コンパクト有限差分法,⁽⁹⁾ 時間進行は 4 次精度 Runge-Kutta 法によって, 直接数値的に解いている. 極座標非一様格子を用い, 円柱表面で断熱すべりなし, 遠方境界で無反射境界条件⁽¹⁰⁾ を適用する. 以下では, マッハ数 $M = U/c_0 = 0.2$, 一様流速に基づくレイノルズ数 $Re = UD/\nu = 150$ の場合を例として示す (ν は動粘性係数). 格子点数は 871 (r 方向) $\times$ 503 (θ 方向) $\approx$ 44 万点である. カルマン渦列の周期が $T = 27.4$, ストローハル数は $St = 0.183$ となった. このようにして直接数値的に解いて得られた音圧場を, Fig. 2 に示す. 音圧は, 静止圧 $p_0 = 1/\gamma$ ($\gamma = 1.4$ は比熱比) からの圧力変動 $\Delta p \equiv p - p_0$ で定義し, 正值を赤線, 負値を青線, 0 は点線の等値線で表している. 正の極値を持つ圧縮波が上流側, 負極値の膨張波が下流側に伝播していることが分かる.

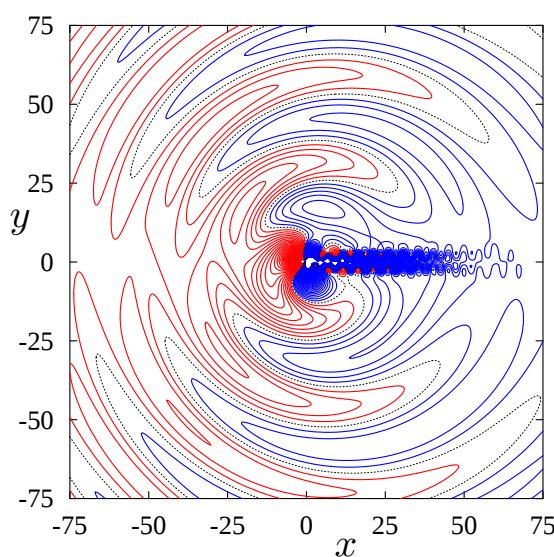


Fig. 2: Contours of the sound pressure Δp by DNS. $M = 0.2$, $Re = 150$, $t = 2000$, $\Delta p_{step} = 5 \times 10^{-5}$

3. Curle の式

音響学的アナロジーに基づいて、非定常圧縮性ナビエ=ストークス方程式から厳密に導かれる方程式が、密度場 $\rho(\mathbf{x}, t)$ に対する次の Lighthill 方程式⁽⁴⁾である。

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) [c_0^2(\rho - \rho_0)] = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1)$$

ここで、添字 i, j に関しては和を取る。四重極の音源項をなす、右辺の $T_{ij} = \rho u_i u_j + [(p - p_0) - c_0^2(\rho - \rho_0)]\delta_{ij} - \sigma_{ij}$ は Lighthill の乱流応力テンソルと呼ばれる (σ_{ij} は粘性応力テンソル、 δ_{ij} はクロネッカー記号)。遠方で静止した一様媒質の流体領域 V において、物体表面 S が静止している場合の Lighthill 方程式の厳密解が Curle の式⁽⁵⁾である。二次元の場合は、次式で表される。

$$\begin{aligned} & c_0^2[\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{-\infty}^{\tau} dt' \int_V d\mathbf{y} \frac{T_{ij}(\mathbf{y}, t')}{2\pi\sqrt{(t-t')^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2/c_0^2}} \\ &- \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-\infty}^{\tau} dt' \oint_S d\ell(\mathbf{y}) \frac{f_i(\mathbf{y}, t')}{2\pi\sqrt{(t-t')^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2/c_0^2}} \quad (2) \end{aligned}$$

$\tau = t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c_0$ は遅延時間、 $f_i = -(p - p_0)n_i + \sigma_{ij}n_j$ は物体が流体に及ぼす単位面積力である (n は S の内向き単位法線ベクトル)。右辺第一項は四重極、第二項は二重極成分を表している。

ここで、次の二つの仮定を入れる。(i) 音源が音響学的にコンパクト、(ii) 等エントロピーかつ Δp が微小。(i) により、物体中心を座標原点にすることで、遅延時間を $\tau \approx t - |\mathbf{x}|/c_0$ と近似し、空間微分を時間微分に置き換えることが出来る。また (i) は、音源の流体運動の代表マッハ数が小さいということでもあり、従って式 (2) の右辺第二項の二重極が主要成分となる。(ii) からは $\Delta p = p - p_0 \approx c_0^2(\rho - \rho_0)$ が導かれ、最終的に次の近似式を得る。

$$\Delta p_{Curle}(\mathbf{x}, t) = \frac{-x_i}{2^{3/2}\pi c_0^{1/2}|\mathbf{x}|^{3/2}} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{(\partial F_i / \partial t')}{\sqrt{\tau - t'}} dt' \quad (3)$$

$F(t') = -\oint_S f(\mathbf{y}, t') d\ell(\mathbf{y})$ は時間 t' に物体に働く力である。これは、発生する音波が、遅延時間 τ で物体に働く力の時間変動にほぼ比例した大きさで、それと逆向きの二重極性を示すことを表している。

DNS によって得られた、円柱に働く力とその時間微分の変動を Fig. 3 に示す。揚力と抗力を、圧力及び粘性応力による成分に分解して表している。抗力が揚力より強く、粘性による成分も大きい、時間微分では圧力による揚力が最も大きく、これが支配的であることが分かる。

Fig. 4 は、DNS により得られた円柱に働く力 F を、Curle の近似式 (3) に代入して計算した音圧場 Δp_{Curle} である (時間及び等値間隔は Fig. 2 と同じ)。DNS による音圧場 Fig. 2 と比較すると、大きな違いが生じていることが分かる。これは、式 (2) の導出で無限遠静止系を仮定しているために、ドップラー効果が入っておらず、また (i) の仮定により時間平均圧力が落ちて擬音成分が考慮されないためである。しかしながら、それらの効果を取り入れた式変形により、大きく改善することが出来る。

4. Curle の式の変形

ドップラー効果は、一様流が存在することによる、角度に依存した音速の変化として表現できる。マッハ数 M の一次までの近似では、角度 θ 方向の音速は $c_\theta = c_0(1 - M \cos \theta)$ と表され、従って遅延時間も $\tau_\theta = t - |\mathbf{x}|/c_\theta$ となる。Curle の二次元近似式 (3) でこれらを置き換えることにより、次の近似式を得る。

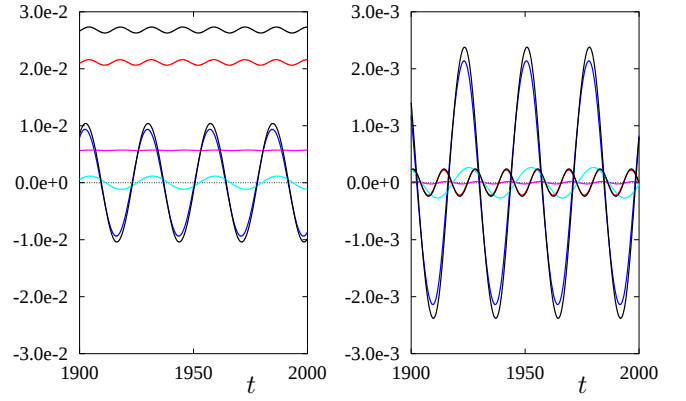


Fig. 3: Time histories of forces on cylinder (left) and their time-derivatives (right). — : lift by pressure, — : lift by viscous stress, — : drag by pressure, — : drag by viscous stress, — : total lift and drag. $M = 0.2$, $Re = 150$.

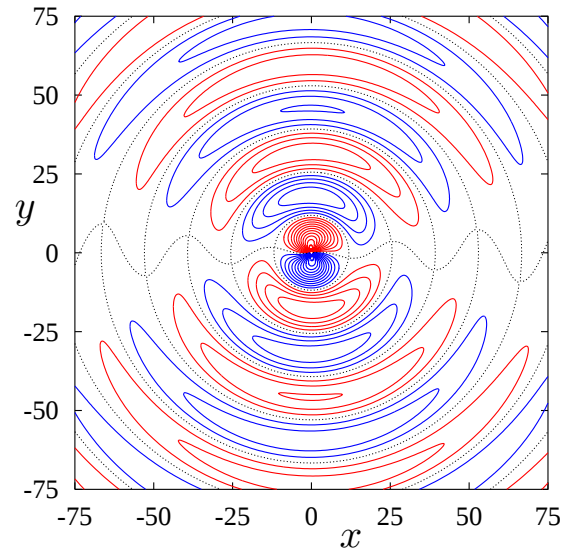


Fig. 4: Contours calculated by the Curle's equation (3). $M = 0.2$, $Re = 150$, $t = 2000$, $\Delta p_{step} = 5 \times 10^{-5}$

$$\Delta p_{Curle}^{(D)}(\mathbf{x}, t) = \frac{-x_i}{2^{3/2}\pi c_0^{1/2}|\mathbf{x}|^{3/2}} \int_{-\infty}^{\tau_\theta} \frac{(\partial F_i / \partial t')}{\sqrt{\tau_\theta - t'}} dt' \quad (4)$$

一方で、式 (3) に時間平均圧力場である擬音場 (pseudo sound) を加えた変形式も得られる。

$$\begin{aligned} \Delta p_{Curle}^{(PS)}(\mathbf{x}, t) &= \frac{-x_i}{2^{3/2}\pi c_0^{1/2}|\mathbf{x}|^{3/2}} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{(\partial F_i / \partial t')}{\sqrt{\tau - t'}} dt' \\ &+ \overline{\Delta p}(\mathbf{x}) \quad (5) \end{aligned}$$

ここで、 $\overline{\Delta p}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_{t_0}^{t_0+T} \Delta p(\mathbf{x}, t') dt'$ は時間平均音圧場、すなわち擬音場である。両方を考慮すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta p_{Curle}^{(M)}(\mathbf{x}, t) &= \frac{-x_i}{2^{3/2}\pi c_\theta^{1/2}|\mathbf{x}|^{3/2}} \int_{-\infty}^{\tau_\theta} \frac{(\partial F_i / \partial t')}{\sqrt{\tau_\theta - t'}} dt' \\ &+ \overline{\Delta p}(\mathbf{x}) \quad (6) \end{aligned}$$

Fig. 5 に、以上 3 つの変形式の DNS との比較を示す。左が上流側の $r = 100$, $\theta = 50^\circ$ での、また右が下流側

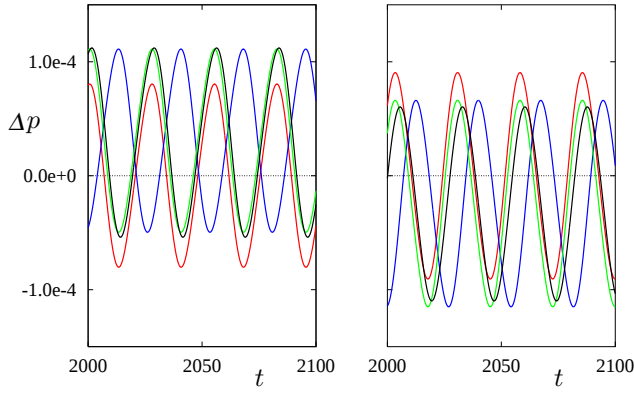


Fig. 5: Time histories of the sound pressure at $r = 100$, $\theta = 50^\circ$ (left) and $\theta = 120^\circ$ (right). $M = 0.2$, $Re = 150$.
— : Δp by DNS, — : $\Delta p_{Curle}^{(D)}$, — : $\Delta p_{Curle}^{(PS)}$, — : $\Delta p_{Curle}^{(M)}$.

$r = 100$, $\theta = 120^\circ$ での音圧変動である。擬音成分 $\overline{\Delta p}$ は DNS により得られた値を用いる。最終的な変形式 (6) が、精度良く DNS による音圧を近似していることが分かる。

Fig. 6 に、ドップラー効果のみを取り入れた式 (4) による音圧場を、Fig. 7 に DNS によって得られた音圧変動場 $\Delta p - \overline{\Delta p}$ を示す。後流の渦領域を除いて、やはり定量的に非常に近い音圧場を与えている。また、ドップラー効果により音波の指向性に変化が生じ、伝播の方向がマッハ数 M に依存した一定の角度 θ_M となる。これは、式 (4) から次のように導出することができる。 $\theta = 90^\circ$ での距離を $r_\perp$ として、音波面は $r = r_\perp(1 - M \cos \theta)$ と表される。この面上で、式 (4) の角度依存成分を抜き出すと、

$$\Delta p_{Curle}^{(D)}(r_\perp, \theta, t) \propto \frac{\sin \theta}{1 - M \cos \theta} \quad (7)$$

となる。右辺の分子は音波の二重極性により現れる成分、分母はドップラー効果による成分である。角度微分をすることによって、極値の伝播角度が $\cos(\theta_M) = M$ として求められる。Fig. 7 に実線で示しているように、伝播角度も非常に良い精度で予測可能となる。

5. 結言

音響学的アナロジーに基づく理論式である。Curle の式の二重極近似表現は、ドップラー効果と時間平均圧力場 (擬音場) の影響を取り入れた式変形により、非常に良い精度で遠方音場を予測できることが明らかとなった。発生する音波の変動成分が、円柱に働く揚力変動によって決まる二重極音で近似できるということが本質的である。二重極音の伝播方向がドップラー効果によって上流側の角度 $\theta = \arccos M$ に変化し、それが時間変動しない擬音成分に乗っている影響が現れて、圧縮波は上流側、膨張波は下流側へと更に伝播角度を変える。

参考文献

1. 細谷, 畠山, 庄司, 井上, “円柱まわりの流れにより発生する音の直接数値計算,” 第 14 回数値流体力学シンポジウム講演論文集 (2000), A09-1.
2. Hatakeyama, N., Hosoya, H. and Inoue, O., “DNS of sound generated by cylinder wakes,” Proc. 1st ICCFD (Springer-Verlag, in press).
3. Howe, M. S., *Acoustics of fluid-structure interactions* (Cambridge University Press, 1998).
4. Lighthill, M. J., “On sound generated aerodynamically I. General theory,” Proc. Roy. Soc. A **211** (1952), 564–587.
5. Curle, N., “The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound,” Proc. Roy. Soc. A **231** (1955), 505–514.

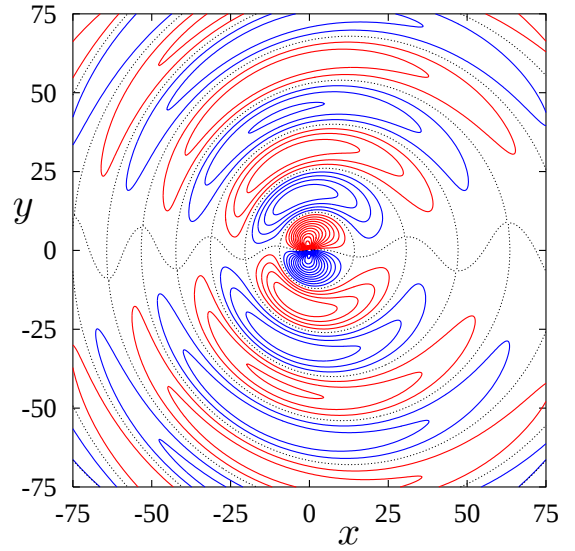


Fig. 6: Contours of $\Delta p_{Curle}^{(D)}$ by the Curle's equation combined with the Doppler effect. $M = 0.2$, $Re = 150$, $t = 2000$, $\Delta p_{step} = 5 \times 10^{-5}$

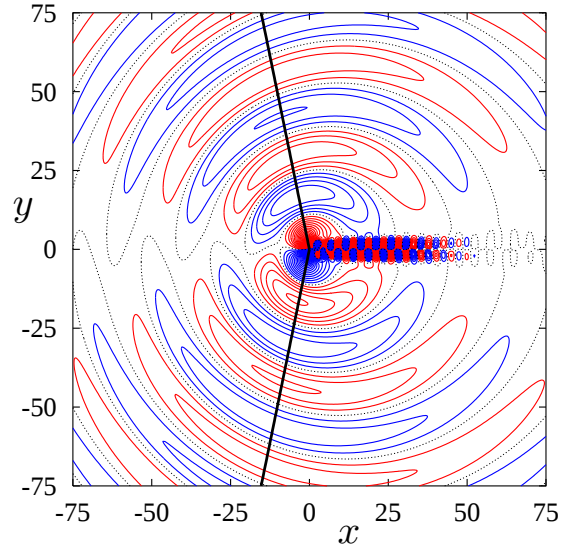


Fig. 7: Contours of the sound pressure fluctuation with respect to the time-averaged pressure field, by DNS. $M = 0.2$, $Re = 150$, $t = 2000$, $\Delta p_{step} = 5 \times 10^{-5}$. Angles of solid lines are $\theta = \pm \arccos M \approx \pm 78.5^\circ$

6. Hardin, J. C. and Lamkin, S. L., “Aeroacoustic computation of cylinder wake flow,” AIAA J. **22** (1984), 51–57.
7. Shen, W. Z. and Sørensen, J. N., “Comment on the aeroacoustic formulation of Hardin and Pope,” AIAA J. **37** (1999), 141–143.
8. Slimon, S. A., Soteriou, M. C., and Davis, D. W., “Computational aeroacoustics simulations using the expansion about incompressible flow approach,” AIAA J. **37** (1999), 409–416.
9. Lele, S. K., “Compact finite difference schemes with spectral-like resolution,” J. Comput. Phys. **103** (1992), 16–42.
10. Poinso, T. and Lele, S. K., “Boundary conditions for direct simulation of compressible viscous flows,” J. Comput. Phys. **101** (1992), 104–129.