

境界層乱流遷移の数値計算

Direct Numerical Simulation of Boundary-Layer Transition

- 高橋 直也, 電通大院 機械制御, 東京都調布市調布ヶ丘 1-5-1, E-mail : naoya@mce.uec.ac.jp
山本 稀義, 航技研, 東京都調布市深大寺東町 7-44-1, E-mail : yamamo@nal.go.jp

Naoya Takahashi, University of Electro-Communications,
Chofugaoka, Chofu, Tokyo, 182-8585, Japan
Kiyoshi Yamamoto, National Aerospace Laboratory,
Jindaiji-Higashimachi, Chofu, Tokyo, 182-8522, Japan

We analyse the transition process of the flat-plate boundary layer with DNS. The simulation started with a initial flow given as the basic flow plus small disturbances. For the disturbance with an amplitude greater than the threshold value, transient growth of streamwise vortices is induced linearly. Then, the amplified streamwise vortices collapse to three-dimensional vortices by the nonlinear mechanism. This threshold value depends on the Reynolds number Re as $Re^{-\zeta}$. We estimate $\zeta \approx 1.7$ numerically, and this value almost equals to the counterpart of the channel flow.

1. はじめに

Orr-Sommerfeld(OS) 方程式は、層流・乱流遷移の問題にアプローチするための線形安定方程式の一つである。この方程式を固有値問題として扱うことにより、各モードの持つ増幅率を求めることができる。線形増幅波は乱流遷移の引金になり得ることはよく知られている¹。また線形過程はその後の非線形相互作用に比べて十分長いことから、OS 方程式は乱流遷移の有効な予測を与えることが出来た。一方で、TS 波による予測を適用する事ができない乱流遷移現象として、臨界レイノルズ数 Re_c 以下でも乱流へ遷移することも実験的に知られている²。予測を行うためには、その遷移メカニズムを解明することが求められていた。

このような遷移は初期攪乱振幅が比較的大きい場合に起こり得ることが知られており、指数関数的増幅過程を経ないで乱流へと遷移することが特徴的である。このような過程はバイパス遷移として知られていて、代数関数的かつ過渡的 (transient) な増幅が特徴である。非粘性における代数的関数的な増幅過程は知られていた³が、これを有限のレイノルズ数の場合の極限として対応づけたのは Henningson et al.⁴であった。彼らは初期攪乱を線形方程式の OS 方程式と Squire 方程式の固有関数を用いて解析を行い、非粘性の Transient な増幅が発生し得ることを導いた。理論的には Reddy et al.⁵により、過渡的な増幅が OS-SQ 方程式の縮退だけでなく、それらの固有値問題が攪乱に対して持つ sensitivity によって生じ得ること、それらは固有関数の非直交性として一般化されている。彼らはまた OS-SQ 方程式の線形演算子を特異値分解することにより、数値的に最大増幅を見積もっている。このような手法を境界層が発達する場合に適用するため、Luchini⁶らは一般の線形最適化問題の手法を用いて取り扱い、その増幅を見積もっている。

このような線形増幅過程によって生じた縦渦 (Streamwise Vortex) 構造だけでは乱流に遷移する事は出来ない。このため、過渡的な増幅がなされている間に非線形相互作用が励起されなければならない (このような遷移を SV 型遷移と呼ぶことにする)。このような初期攪乱振幅の大きさはレイノルズ数 Re のべき $Re^{-\gamma}$ によって分けられることが数値計算によって分かってきている^{7, 8, 9}。チャンネル流の場合、Reddy et al.⁵や山本ら¹⁰によって直接数値計算による解析が行われ、 $\gamma \approx 1.7$ という値が得られている。また高橋ら¹¹によって、平板境界層流れでもチャンネル流と同じ値が得られている。

また縦渦自身の不安定性についての実験がなされてい

て、構造崩壊による非線形過程の励起メカニズムを知るための解析がなされている。Ellofsson et al.¹²はチャンネル流の実験において、平板上に設置したスリットからの吸引によって縦渦構造を与え、実験的にも代数関数的な増幅が見られたこと、構造崩壊過程は流れ方向の攪乱の rms がある閾値を越えた場合に起こることを調べた。また彼らは縦渦自身に外部攪乱を与えて第二不安定性を励起し、ストリーク構造自身の不安定性を調べた。さらに Asai et al.¹³は平板上に縦渦を与え、渦構造に对称/反対称な外部攪乱を与えた実験を行い、前者が Kelvin-Helmholtz 型の、後者が曲率不安定性によることを指摘している。

本研究では初期条件の最大振幅と遷移過程との関係に注目し、そのレイノルズ数依存性を調べ、初期値依存性を調べる。また直接数値計算を用いた解析によって渦構造の移り変わりを調べる。

2. 計算方法

2.1 基礎方程式

壁面に沿って流れる剪断流を調べる目的で、平行流近似を行った平板境界層の直接数値計算 (DNS) を行なう。DNS は、非圧縮条件のもとで Navier-Stokes 方程式を数値的に解いている。壁に垂直な z 方向の計算には Chebyshev 選点法を用い、流れ方向 x およびスパン方向 y には取扱いを単純にするために周期的境界条件を適用する (図 1)。流れ場 (圧力場) は x 方向の主流成分 $U(z)$ と攪乱成分 $v(x) = (u', v, w)$ に分解して取り扱う;

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v + U \frac{\partial v}{\partial z} + v \cdot \frac{dU}{dz} = -\nabla p + \nu \nabla^2 v \quad (2)$$

ここで $U(z)$ は平均流速であり、本計算では Blasius 流を用いている。周期的境界条件を x, y 方向に適用し、速度場を

$$v(x, t) = \sum_{k_x, k_y} \mathbf{v}(k, z, t) \exp(ik_x x + ik_y y) \quad (3)$$

のようにフーリエ級数展開に表す。このことから x, y 方向についてはフーリエ・スペクトル法¹⁴を適用する。また z 方向についてはチェビシェフ選点法に代数関数的な射影を行って、 $[0, \infty)$ の領域を取り扱った。また非圧縮性を満たすために Influence Matrix 法¹⁵を用いた。計算は科学技術庁 航空宇宙技術研究所の数値風洞を用いて行なわれた。

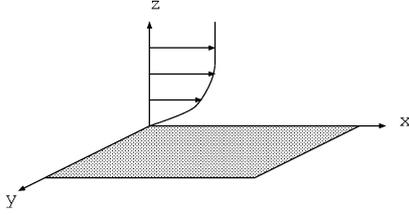


Fig. 1: Setup of direct numerical simulations.

Re_D	k_x	$\Im(\omega)$ OS eqn.	$\Im(\omega)$ DNS	diff. [%]
500.0	0.300	-1.627×10^{-4}	-1.636×10^{-4}	0.6
600.0	0.300	5.426×10^{-4}	5.429×10^{-4}	-0.06
2580	0.215	2.5114×10^{-3}	2.5185×10^{-3}	-0.3

Tab. 1: The growth rates $\Im\omega$ calculated as numerical eigenvalue problems of the Orr-Sommerfeld equation, and the DNS.

2.2 エネルギーノルムと初期条件

各モードのエネルギーノルムは流れ方向およびスパン方向にフーリエ変換した速度場 $\tilde{v}(\mathbf{k})$ を用いて

$$E(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{L_z} \int_0^{L_z} |\tilde{v}(\mathbf{k}, z, t)|^2 / L_z dz \quad (4)$$

と定義する。ここで L_z はプラジウス流の99%厚さとした。これらを用いて、初期条件を次のように定義する。初期攪乱 $\tilde{v}(\mathbf{k}, z)$ に対して、振幅 A_{3D} 、エネルギーを与える最大波数 k_{lim} を任意パラメータとする。エネルギーを与える最大波数を $k < k_{lim}$ までに制限する。このような速度場が非圧縮性と境界条件を満たすよう、直交関数を用いて正規化する¹⁶。この攪乱振幅の大きさを示すため、初期条件における流れ方向の速度攪乱の最大値 $|u'|_{max}$ を用いた。

3. 結果

平行流近似を行った平板境界層流に対し、スペクトル選点法を用いて直接数値計算¹¹を行った。計算結果の確認について、Tollmien-Schlichting 波の増幅率を線形固有値計算の結果と比較した。このときの解像度は $x \times y \times z = 32 \times 32 \times 65$ とした。相対誤差1%以下の一致を得た(表1)。この計算コードを用い、また解像度を $128 \times 64 \times 129$ と拡張してSV型遷移の流れ場の直接数値計算を行った。計算領域はTS波長 k_{TS} を基準に $[0, 4\pi/k_{TS}] \times [0, 2\pi/k_{TS}] \times [0, \infty)$ と取った。

図2は攪乱エネルギーを波数分解し、その主要モードの時間変化を追いかけたものである。二つのグラフは共に排除厚さ基準レイノルズ数 $Re_D = 600$ における計算結果である。図2aは初期攪乱が $|u'|_{max} = 0.59U_\infty$ ($|u'|_{rms} = 0.14U_\infty$) から時間発展させたものである(SVと略記)。またbは $|u'|_{max} = 0.42$ ($|u'|_{rms} = 0.10U_\infty$) から行ったものである(NOと略記)。両者とも $t < 50$ に過渡的増幅が現れ、それにより低波数領域にエネルギーが励起されている⁷。SVではその後各モードが非線形相互作用を生じ、エネルギーは低波数領域から高波数領域へとカスケードされて乱流へと遷移($t \approx 400 \sim$)している。一方NOにおいてはそのような相互作用は現れていないため、高波数モードは粘性の影響を受けて減衰してしまい、エネルギーのカスケードが見られなかった。

この違いはレイノルズ応力の空間平均の時間発展 $\overline{u'w}$ (図3)においても見ることができる。 $t < 50$ ではSVとNOにおける振舞いの違いはほとんど見られないが、 $t > 100$ を越えると両者の違いが大きくなっている。SVの場合非線形相互作用が励起されたため、 $\overline{u'w}$ が増幅されている。一方NOでは0に収束していて、流れ場は乱流に遷移することが出来ない。

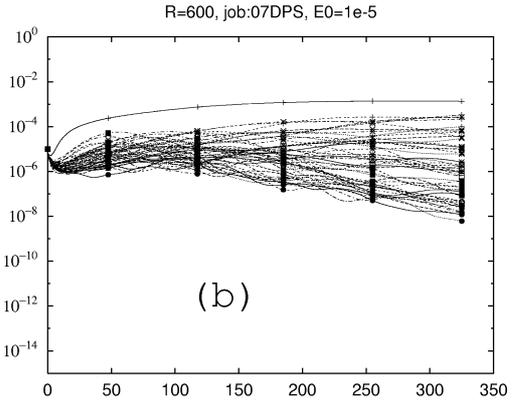
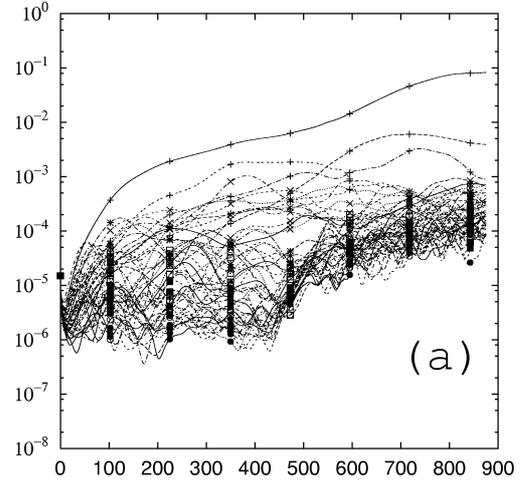


Fig. 2: Time evolution of energy of dominant modes. Simulations are started with random initial conditions with (a): $|u'|_{max} = 0.59U_\infty$ (SV), and (b): $|u'|_{max} = 0.42U_\infty$ (NO).

このときの攪乱の各成分の自乗平均の時間変化を図4に示す。SVにおいて v と w 成分の成長が $t > 150$ の近辺において観察された。これはレイノルズ応力 $\overline{u'w}$ の成長と対応していることから、これらの成分非線形相互作用によるものと増幅されている。

このようにSV型遷移は初期攪乱振幅の大きさ $|u'|_{max}$ によって非線形相互作用を引き起こすか否かが分かれる。そのレイノルズ数 Re 依存性について調べたダイアグラムが図5である。はSV型増幅によって乱流へ遷移した場合を示し、はそうでない場合を示す。SV型遷移が選択される閾値 $|u'|_{maxC}$ は Re のべき $Re^{-\zeta}$ 、 $\zeta \approx 1.7$ であった。この値はチャネル流のもの¹⁰と一致している。また周期的境界条件の影響について、この計算では流れ方向の周期をTS波長の2倍のものを用いているが、4倍としても ζ の値に変化はなかった。

このような過渡的増幅における渦構造について、エンストロフィーの等値面によって図6の様な構造が見られた。この数値計算のようにランダムな初期条件から出発しても、流れ方向に軸を持つ渦(Streamwise Vortex)構造が形成されることが捉えられた。このようなSV構造の yz 断面が図7上であり、太線はエンストロフィーの等値線を、細い白線は $(U + u')$ の等値線を表している。ここでSV構造は、剪断 $\partial u / \partial z$ の強い部分からなることがわかる。また xy 断面をみると、SV構造は壁から約 6° に持ち上げられている(図6下)ことが分かる。非線形相互作用が励起された場合、SV構造の上端は屈曲し、構造崩壊が促進され、乱流へと遷移する様子が観察された。

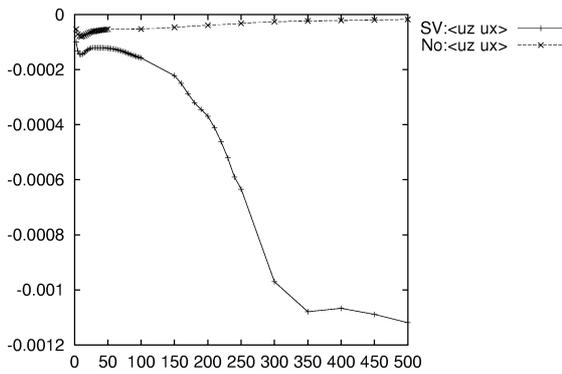


Fig. 3: Time evolution of the Reynolds stress in the cases of SV and NO.

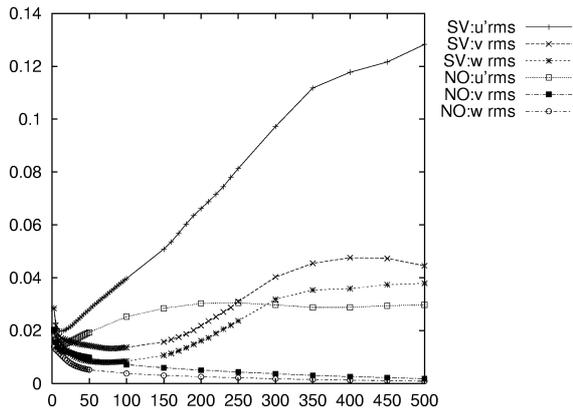


Fig. 4: Time evolution of root mean square disturbances of u' , v and w . In the 'SV' case, turbulent transition triggered by SV instability, and in the 'NO' case where SV instability could not.

4. 結論

縦渦型遷移におけるメカニズムを解明するため、直接数値計算による解析を行った。過渡的増幅によって縦渦が形成される。乱流へ遷移する場合、縦渦が持ち上げられ、非線形相互作用が励起されて崩壊を経る。このような現象は初期速度場の $|u'_{max}|$ が大きな場合に起こり得る。また $|u'_{max}|$ の閾値は、平板境界層のばあいでもレイノルズ数 Re のべき $Re^{-\gamma}$ 、 $\gamma \simeq 1.7$ によって分けられることが分かった。

参考文献

1. P. G. Drazin and W. H. Reid. Hydrodynamic Stability. Cambridge Univ. Press., Dec. 1981.
2. V. C. Patel and M. R. Head. Some observations on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flows. *J. Fluid Mech.*, 38:181–201, 1969.
3. M. T. Landahl. A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows. *J. Fluid Mech.*, 98:243–251, 1980.
4. D. S. Henningson and P. J. Schmid. Vector eigenfunction expansions for plane channel flows. *Stud. Appl. Math.*, 87:15–43, 1992.
5. S. C. Reddy, P. J. Schmid, and D. S. Henningson. Pseudospectra of the Orr–Sommerfeld operator. *SIAM J. Appl. Math.*, 53(1):15–47, Feb. 1993.

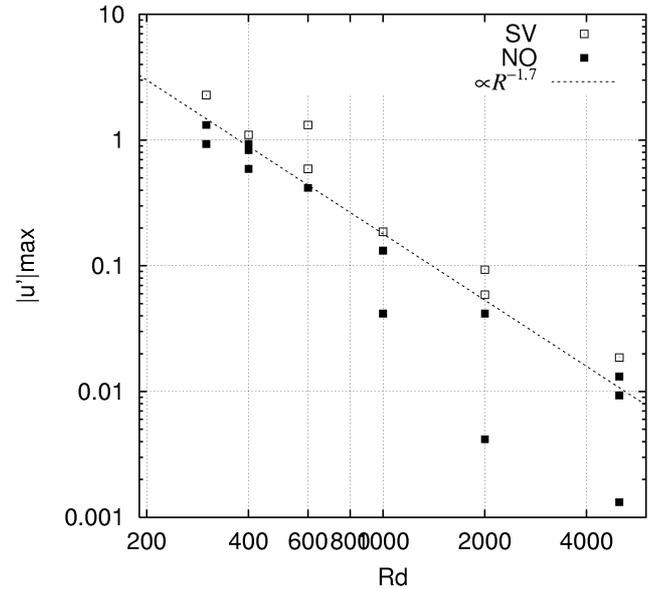


Fig. 5: A diagram of transition process to turbulence. \square : SV type transition, \blacksquare : without SV type transition.

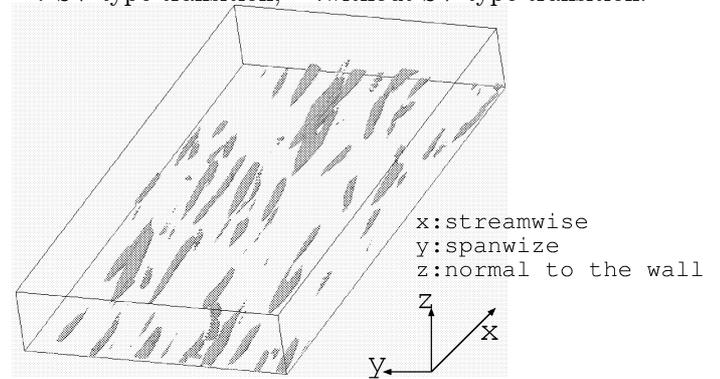


Fig. 6: Typical vortical structures in SV type transition process.

6. P. Luchini. Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface: optimal perturbations. *J. Fluid Mech.*, 404:289–309, 2000.
7. L. N. Trefethen, A. E. Trefethen, S. C. Reddy, and T. A. Driscoll. Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science*, 261:578–584, 1993.
8. J. S. Baggett and L. N. Trefethen. Low-dimensional models of subcritical transition to turbulence. *Phys. Fluids*, 9(4):1043–1053, 1997.
9. S. C. Reddy, P. J. Schmid, and J. S. Baggett. On stability of streamwise streaks and transition thresholds in plane channel flows. *J. Fluid Mech.*, 365:269–303, 1998.
10. 山本, 高橋. 平面ポアズイユ流遷移の DNS. 日本流体力学会 講演論文集, pp. 583–584. 日本流体力学会, 2000.
11. 高橋, 山本. 境界層乱流遷移における渦構造. 日本機械学会 2000 講演論文集, pp. 11–12. 日本機械学会, 2000.
12. P. A. Elofsson, M. Kawakami, and P. H. Alfredsson. Experiments on the stability of streamwise streaks

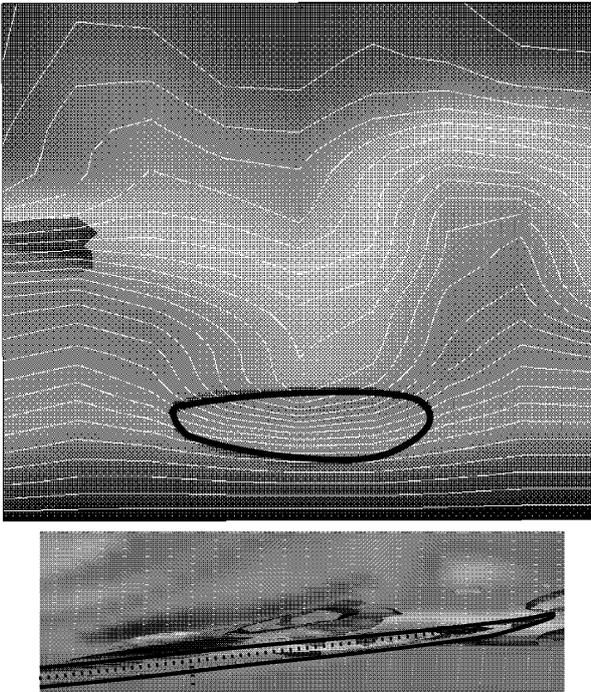


Fig. 7: Sections of a streamwise vortex. Top: a y - z section, Bottom: a y - z . Thick black lines denote a contour of enstrophy, and thin white lines contour of $U(z) + u'$.

in plane Poiseuille flow. *Phys. Fluids*, 11(4):915–930, 1999.

13. M. Asai, M. Minagawa, and M. Nishioka. Instability and breakdown of the three-dimensional high-shear layer associated with a near-wall low-speed streak. In IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition, Sedona, Arizona, USA, Sept. 1999. IUTAM.
14. C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
15. L. Kleiser and U. Schumann. Treatment of incompressibility and boundary conditions in 3-d numerical spectral simulations of plane channel flows. In E. H. Hirschel ed., *Proceeding[s] of the Third GAMM-Conference on numerical methods in fluid mechanics*, Vol. 2 of *Notes on numerical fluid mechanics*, pp. 165–173, Braunschweig, 1980. DFVLR, F. Vieweg.
16. I. Hosokawa and K. Yamamoto. On direct numerical simulation of incompressible shear-flow turbulences by the Fourier-Spectral method. *J. Phys. Soc. Japan*, 55(3):1030–1031, Mar. 1986.