曲り管における縦渦構造の不安定性

Instability of streamwise vortices in a curved duct

○ 渡辺 大輔, 電通大院, 〒 182-8585 調布市調布ヶ丘 1-5-1, E-mail：watanabe@maekawa.mce.uec.ac.jp
小泉 博義，電通大, 〒 182-8585 調布市調布ヶ丘 1-5-1, E-mail：koizumi@mce.uec.ac.jp
前川 博，電通大, 〒 182-8585 調布市調布ヶ丘 1-5-1, E-mail：maekawa@mce.uec.ac.jp
Daisuke WATANABE, The Univ. Electro-Communications, 1-5-1 Chofugaoka, Chofu, Tokyo 182-8585
Hiroyoshi KOIZUMI, The Univ. Electro-Communications, 1-5-1 Chofugaoka, Chofu, Tokyo 182-8585
Hiroshi MAEKAWA, The Univ. Electro-Communications, 1-5-1 Chofugaoka, Chofu, Tokyo 182-8585

The instability of streamwise vortices in an incompressible curved square duct is investigated analytically and numerically. For linear stability analyses, we used fully developed flow (calculated by steady numerical simulation) with one pair counter rotating vortices and one low-speed streak along the outer wall. The results show that there are antisymmetric and symmetric unstable modes. Three-dimensional spatially developing direct numerical simulations were carried out. It is observed that the development of the unstable modes cause breakdown of the low-speed streak and collapse of the streamwise vortices.

1. はじめに

境界層やチャンネル流の遷移過程に見られる縦渦を伴う流れの不安定性は，乱流遷移及び乱流の持続機構の重要な要因と考えられている．しかし平板境界層などに見られる渦構造は，出現位置やその大きさ等の変化が多様であるため，安定性解析に必要となる平均流速度分布を得ることが容易ではない．一方，壁面に曲率を持つ curved channel，concave wall，curved duct 等の流れは，Görtler 不安定性により縦渦が形成されるため容易に縦渦を得られ，かつその位置も比較的安定していることもあり，これらの流れによる不安定性及び遷移機構は，境界層遷移のモデルとして，又はその流れ自体の解析のため 実験 [1,2,3]，理論 [4]，数値的 [5] に行われている．本研究では，一対の縦渦が定常に存在する正方形断面の曲り管に対して，縦渦 (Dean 渦) 構造の崩壊を含む遷移機構を調べる．解析には定常基礎式のシミュレーションより求めた速度分布を用いた線形安定解析，及び 3 次元非圧縮非定常直接数値シミュレーション (DNS) を用いる．

2. 計算方法

2.1 支配方程式

曲がり管のモデルを Fig.1 に示す．支配方程式は円筒座標系で記述された非圧縮ナビエ・ストークス方程式である．ただし，支配方程式は曲がり管流入部の平均流速 $U_{\theta m}$ と正方形管の辺長 a および粘性係数 μ によって無次元化する．

2.2 非圧縮粘性撹乱方程式

支配方程式における未知数 $\vec{d}$ を時間平均 $\bar{d}$ と変動量 $\tilde{d}$ の和として書き表すと，

$$\vec{d}(v_\theta, v_r, v_z, p) = \bar{d}(\bar{v}_\theta, \bar{v}_r, \bar{v}_z, \bar{p}) + \tilde{d}(\tilde{v}_\theta, \tilde{v}_r, \tilde{v}_z, \tilde{p}) \qquad (1)$$

ここで，$\bar{v}_\theta, \bar{v}_r, \bar{v}_z$ は曲がり管の定常シミュレーションの値を用いる．そして，式 (1) を支配方程式に代入する．また，曲がり管内で十分発達した 4-cell 状態の流れは，平行流として近似することができることを使い，変動の高次の項を無視し平均場の支配方程式を引き去ると，線形方程式

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{v}_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} + \bar{v}_r\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \tilde{v}_r\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} - \frac{2\bar{v}_\theta\tilde{v}_\theta}{r} + \bar{v}_z\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial z} + \tilde{v}_z\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z}$$
$$= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} - \frac{\tilde{v}_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_r}{\partial z^2}\right) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial t} + \bar{v}_r\frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} + \tilde{v}_r\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{v}_r\tilde{v}_\theta}{r} + \frac{\tilde{v}_r\bar{v}_\theta}{r} + \bar{v}_z\frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial z} + \tilde{v}_z\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z}$$
$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial r} - \frac{\tilde{v}_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_\theta}{\partial z^2}\right) \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_r\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \tilde{v}_r\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\theta}{r}\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \theta} + \bar{v}_z\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} + \tilde{v}_z\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}$$
$$= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_z}{\partial z^2}\right) \qquad (5)$$

が得られる．一方，変動撹乱を

$$\tilde{d}(\tilde{v}_\theta, \tilde{v}_r, \tilde{v}_z, \tilde{p}) = \hat{d}(\hat{v}_\theta, \hat{v}_r, \hat{v}_z, \hat{p})(r, z) \times exp[i(\alpha\theta - \omega t)] \qquad (6)$$

と表す．ただし α は主流方向の波数ベクトル成分である．ω は角周波数を表し，時間発展問題では ω が複素数で α が実数であり，α は波数，ω の実部は撹乱の位相速度を，虚部はその撹乱の増幅率を表す．また $\hat{d}$ は複素固有関数を表す，式 (6) を式 (2) へ代入し

$$\hat{v}_\theta = \frac{ir}{\alpha}\left(\frac{\partial \hat{v}_r}{\partial r} + \frac{\hat{v}_r}{r} + \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial z}\right) \qquad (7)$$

を得る．式 (4) を $\hat{p}$ について表すと

$$\hat{p} = \frac{ir}{\alpha}\left[-i\omega\hat{v}_\theta + \bar{v}_r\frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial r}\hat{v}_r\right.$$
$$+ \frac{i\alpha}{r}\bar{v}_\theta\hat{v}_\theta + \frac{1}{r}\bar{v}_r\hat{v}_\theta + \frac{1}{r}\bar{v}_\theta\hat{v}_r + \bar{v}_z\frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial z}\hat{v}_z$$
$$\left. - \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \hat{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial r} - \frac{\hat{v}_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \hat{v}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \hat{v}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \hat{v}_\theta}{\partial z^2}\right)\right] \qquad (8)$$

となり，式 (7) を式 (8) に代入し $\hat{p}$ を $\hat{v}_r$ と $\hat{v}_z$ で表した式と式 (7),(8) を式 (3),(5) に代入することにより，撹乱方程式は 2 行 2 列の行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値方程式

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\hat{v}_r \\ \hat{v}_z\end{bmatrix} = \omega\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\hat{v}_r \\ \hat{v}_z\end{bmatrix} \qquad (9)$$

で表される．また式 (9) の解法として，r, z 方向に対しチェビシェフ級数を用いることにより，撹乱方程式は $2N_r \times N_z \times 2N_r \times N_z$ の行列の固有値問題になる (N_r, N_z はそれぞれ r, z 方向の展開項数)．境界条件は，壁面において，$\hat{v}_r = 0$, $\hat{v}_z = 0$ である．また主流の対称性から $0 < z < 0.5$ の領域において計算を行った．

Copyright © 2000 by JSCFD

2.3 定常シミュレーション

3 次元非圧縮定常 NS 方程式を，対流項にハイブリッド法を用いた SIMLPE 解法により計算を行った．計算領域は，流入部から θ 方向に 270 °までとし，また主流の z 方向における対称性から $0 < z < 0.5$ の半分の領域とした．計算格子は r, θ, z 方向に $32 \times 180 \times 32$ の不等間隔格子を用いた．また境界条件として曲がり管流入部の流速にポアズイユ流を与え，曲がり管壁において流速を 0 とした．

2.4 空間発展直接数値シミュレーション

3 次元非圧縮非定常 NS 方程式を，空間微分に 6 次精度コンパクト差分スキーム [6]，時間発展に 2 次精度の Adams-Bashforth 法を用い計算を行った．境界条件として，曲がり管流入部の流速に十分発達した Dean 渦を伴う流れを与え，壁面において流速を 0 とした．計算格子は r, θ, z 方向に $48 \times 256 \times 48$ の等間隔格子であり，計算領域は $0 < \theta < \pi/4$，時間刻みは dt=0.0005 とした．

3. 計算結果および考察

3.1 曲がり管内部の速度分布

定常シミュレーションより得た速度分布を Fig.2,3 に示す．Fig.2 は， Re=852(Dn=220,Dn=Re/$\sqrt{R/a}$), 曲り管曲率 $R/a = 15$ での十分発達した Dean 渦が形成後の $\theta = 180$ °における r'–z 面内での流れの様子である．Fig.2(a) は，主流に垂直な速度成分のベクトル図で，外側壁付近に Dean 渦の存在が確認できる．Fig.2(b) では Dean 渦の存在による低運動流体の輸送に伴う，低速ストリークが形成されていることが分かる．

Fig.3 は，Dn 数，曲率 R/a を変化させたときの，Dean 渦が十分に発達した θ における $r' = 0.35$ での主流速度分布を示す．Fig.3(a),(b),(c) で示されるように，Dn 数が等しくなるよう Re 数及び曲率を変化させたときの主流速度分布は曲率によらず，ほぼ同じ速度分布をを持つことが分かる．(Fig.3(a) の破線は Dn=148，$R/a = 8$ であり，計算領域 $\theta = 270$ °の範囲内で Dean 渦が十分に発達していない．) Fig.3(d) は，曲率を固定し，Dn 数を変化させた際の主流速度分布の比較を示す．低速ストリークの幅は Dn 数の増加に伴い狭くなり，スパン方向の速度勾配が大きくなる．ここで変化させるパラメータと主流速度分布についてまとめると，

1. Dn 数一定：主流速度分布に変化を与えない Re 数及び曲率変化．
2. 曲率 R/a 一定．：主流速度分布に変化を与える Re 数のみの変化 (Dn 数は Re 数に比例)．

となる．

3.2 線形安定性解析

Fig.4 から Fig.7 は線形安定解析の計算結果である．計算に用いたモード数 $N_r = 48, N_z = 22$ と $N_r = 50, N_z = 22$ において成長率が 4 桁まで一致することを確認した．また，$N_r = 40, N_z = 22$ のモードにおいて 3 桁まで一致しており，以下の計算結果はこのモード数を用いて計算を行った．Fig.4 に，各 Dn 数, 曲率に対し，Dean 渦が十分に発達した， θ 断面の二次流れを含む速度分布を用いた，安定解析の結果を示す．Dn=148,220,321 の各々に対し $R/a = 8, 15, 30$ のケースについて計算を行った．横軸，縦軸はそれぞれ撹乱の波数，成長率を表し曲線は，各ケースごとの波数 α に対し，最大の成長率を示す固有値を印した．Fig.4 より，各パラメータにおいて成長率 ω_i が正の値となる波数の領域があり，対称，反対称の線形成長撹乱の存在が確認された．これらの撹乱の成長率は Dn 数一定のもとでの Re 数の増加，曲率一定での Re 数の増加に伴い増加することが分かる．反対称モードに関し，R/a=8 では，臨界 Re_c 数は，Re=417(Dn=148) から Re=622(Dn=220) の間に存在し，R/a=15 では，Re=542(Dn=140) 以下に存在する．対称モードに関し，現在調べた Re 数及び曲率の範囲において，成長率は同条件での反対称モードの 1/10 程度であり，臨界 Re_c 数が高い．この結果から，臨界 Re 数は各曲率ごとに異なり，比較的小さな曲率においては，Dean 渦は撹乱に対し安定な状態を保つ Dn 数の範囲があり，大きな曲率においては，Dean 渦を持つ流れは，全て不安定になることが予想される．Fig.5 は，Mees 等の実験で報告された Dn=220，$R/a = 15$ における，最大成長を示す付近の撹乱との比較である．線形安定解析より得られた最大成長を示す波数は α 105 であり，Mees 等の実験で観測された波数 $\alpha = 94.7$(波長 $\lambda = 3.8$ °) に対しよい一致を示している．

Fig.6(a-c)，Fig.7(a-c) はそれぞれ反対称モード (R/a=15，Re=852(Dn=220), $\alpha = 100$) 及び 対称モード (R/a=15，Re=1243(Dn=321) $\alpha = 120$) の r, θ, z 方向成分固有関数の $r - z$ 断面分布である．これらの固有値分布の特徴から，線形安定解析より得られた反対称撹乱は Dean 渦をスパン方向に揺動させる性質を持ち，Mees 等の実験において観察された現象と一致し，対称モードは Sweringen 等の実験 [1] でも見られている馬蹄形の渦構造を形成すると思われる．

3.3 直接数値シミュレーション

安定解析により得た撹乱が，空間発展のシミュレーションにおいて成長する事の確認，および撹乱の成長が Dean 渦の存在する流れに及ぼす影響を調査する目的で行った．

Fig.8 は，R/a=15,Re=852(Dn = 220) での $\alpha = 93.9$ の反対称撹乱 (固有関数) を流入部より加えた DNS の結果である．図に示される曲線は θ 方向速度成分の最大振幅 Amax を それぞれ 0.0002, 0.01, 0.1 として与えたときの，基本波 (波数 $\alpha = 93.9$ は角振動数 $\omega = 8$ に相当する．) の力学的エネルギーの変化である．基本波は，エネルギーが 10^{-4} 付近まで線形成長しており，その後，非線形効果が顕著に現われ非線形発達している様子が分かる．線形成長領域での成長率は，Gaster 変換により空間成長率に変換した線形安定解析の結果と良い一致をみた．Fig.9 は，$Amax = 0.01, 0.1$ のケースにおける，v_θ の $r' = 0.25$ 断面の等高線である．Fig.9(a) では，撹乱がまだ線形成長の段階にあり，スパン方向の等高線の間隔に大きな変化はない．また，v_θ のスパン方向の周期的な揺動は，θ と共に大きくなっていることが確認できる．基本波のエネルギーが飽和する Fig.9(b) の $\theta = 0.3$ からスパン方向の等高線の間隔が広がって行き，v_θ のスパン方向の周期的な揺動の幅は，ほとんど変化がなくなる．このとき，Dean 渦および低速ストリークは，v_θ の揺動と共に，大きくスパン方向に揺動していることを確かめた．これらの結果から線形安定解析により得た線形成長撹乱は，その増幅により，Dean 渦をスパン方向に揺動させまた撹乱の振幅分布，周波数，波長それぞれが Mees 等の実験結果と良く一致することから，Mees 等の実験で観測された traveling wave は，この撹乱により形成されたと思われる．

上記 DNS では，撹乱の発達が低速ストリークの周期的なスパン方向揺動を引き起こした時点で平衡状態に達したためより高い Re 数の DNS を実行した．計算条件は R/a=15,Re=1243(Dn = 321)，流入部より主流速度の 8 %の撹乱を複数モード挿入した．Fig.10,11 において，流れ場は撹乱の発達により部分的に Dean 渦を崩し，また低速ストリークの分断が見られる．Fig.12(a-d) は流れ方向に軸を持つ渦度 ω_θ の等値面である．図は計算領域 $\pi/4$ を 4 等分して示している．渦度場は入り口付近において周期的にスパン方向に揺れた後，分断される (a,b)．また曲り外側壁付近から渦度が現われ曲り内側壁方向に動いた後，符号の異なる渦度と絡み合う構造を有する (c,d)．そのため曲がり管外側壁付近では，複雑な渦構造を持つ流れとなっている．

これらの結果より，Dean 渦を持つ流れの非定常現象の一要因として，線形安定性理論より予測した，流れ場の持つ不安定性が大きく寄与していることが確認された．Dean 渦を持つ流れ場は，上流から，撹乱の線形成長領域，増幅した撹乱の非線形発展領域を持ち，より高い Dn 数においては乱流へと遷移することが予想される．

Copyright © 2000 by JSCFD

4. まとめ

Dean 渦の存在する流れにおいて，Dean 渦の存在が引き起こす，主流の屈曲部周辺に，線形成長する対称及び反対称撹乱の存在を確認した．この解析により得られた反対称モードは，最大成長を示す波数，及び撹乱の特性に対し，Mees 等による実験とよい一致を得た．(本解析：波数α　105，実験値：波数α　94.7，解析条件：Dn=220，R/a=15)

また直接シミュレーションの実行により，上記撹乱が線形成長する事を確認した．この撹乱は，線形成長領域を経て増幅し，非線形発展領域まで達する．このとき Dean 渦及び低速ストリークのスパン方向に揺動が確認され，より高い Re 数において縦渦構造が寄合わされた部分的な崩壊が起こることを確認した．

参考文献

1. Sewaringen, J. D., et al., *J. Fluid Mech.*, **182**(1987), pp. 255-290.
2. **小泉・伊藤**, **機械学会講演論文集**, **98-1**(1998), pp. 179-180.
3. Mees, P. A. J., et al., *J. Fluid Mech.*, **323**(1996), pp. 387-409.
4. Finlay, W. H., et al., *J. Fluid Mech.*, **194**(1988), pp. 417-456.
5. Liu, W., et al., et al., *J. Fluid Mech.*, **246**(1993), pp. 267-299.
6. Lele, S. K., *J. Comput. Phys.*, **103**(1992), pp. 16-42.

Copyright © 2000 by JSCFD

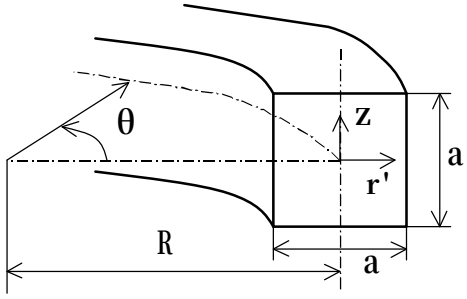
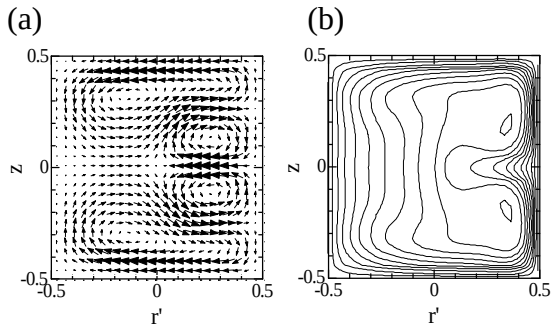
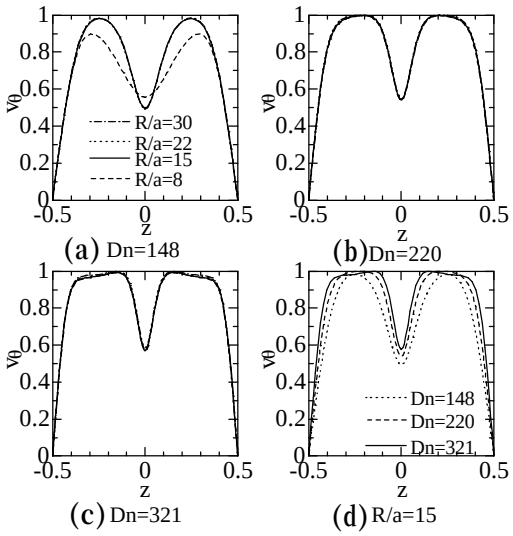


Fig.1. Curved duct geometry.



Figs.2. Flow characteristics for R/a=15, Re=852(Dn=220); (a) vector plot of secondary flow. (b) contour plots of streamwise velocity.



Figs.3. Effects of R/a and Dn number on the spanwise plofile of streamwise velocity at r'=0.35.

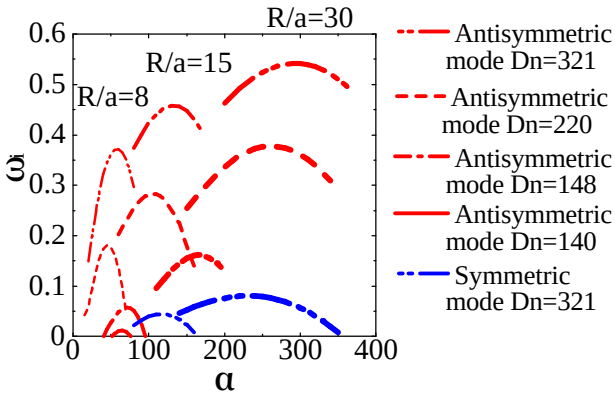


Fig.4. Linear growth rate of antisymmetric and symmetric modes.

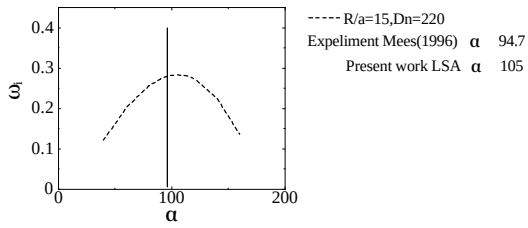
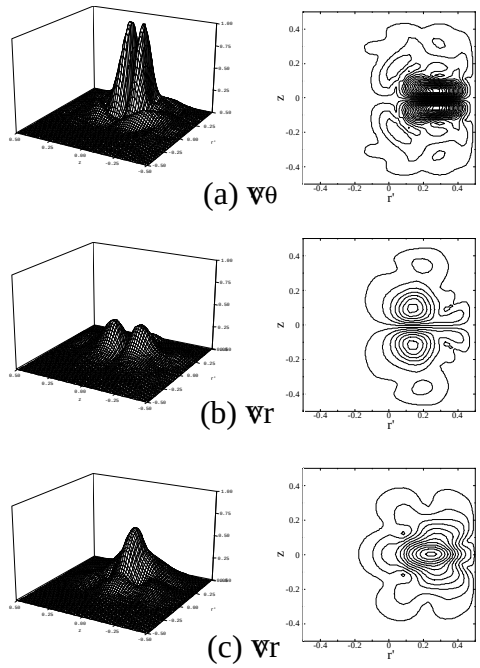
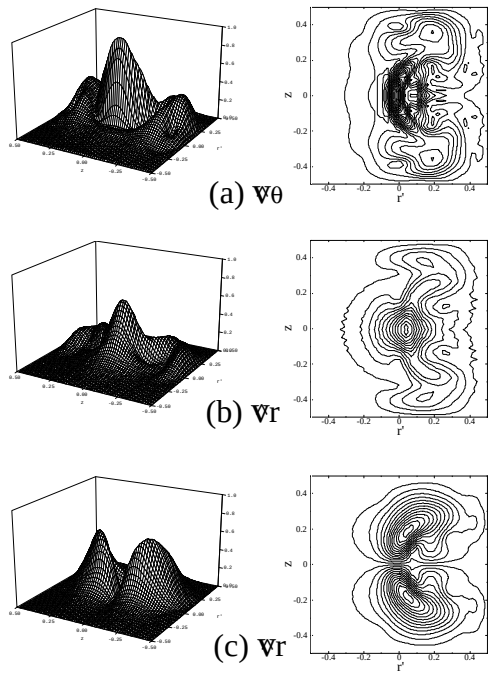


Fig.5. Comparison of Mees(1996) result with linear stability analysis (LSA) for Dn=220, R/a=15



Figs.6. r'-z plane distribution of eigenfunction amplitudes of antisymmetric mode for Re=852(Dn=220), R/a=15; (a) vθ, (b) vr and (c) vz.



Figs.7. r'-z plane distribution of eigenfunction amplitudes of symmetric mode for Re=1243(Dn=321), R/a=15; (a) vθ, (b) vr and (c) vz.

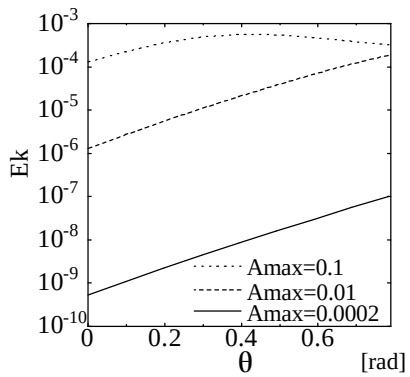
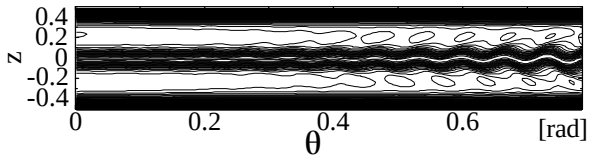
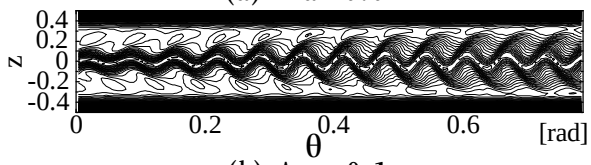


Fig.8. Time development of antisymmetric mode's kinetic energies.



(a) Amax=0.01



(b) Amax=0.1

Figs.9. Contour plots of streamwise velocity v_θ for Re=852 (Dn=220), R/a=15 at r'=0.25 (Perturbed with antisymmetric mode).

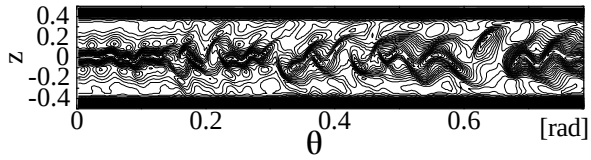
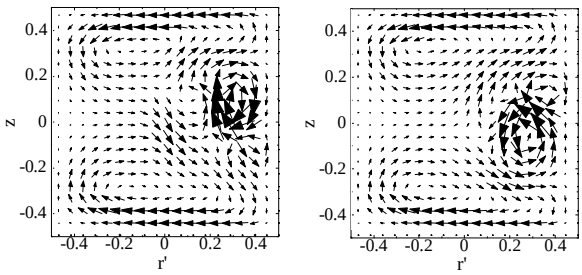
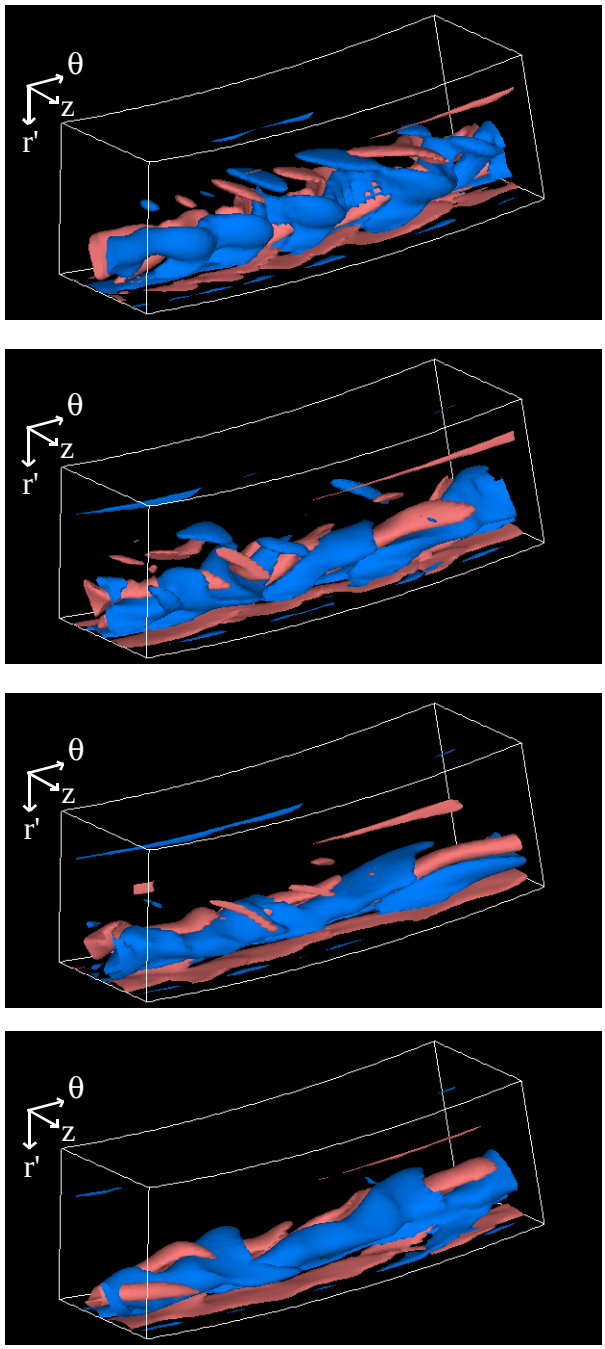


Fig.10. Contour plots of streamwise velocity v_θ for Re=1243 (Dn=321) and R/a=15 at r'=0.25 perturbed with broadband noise.



(a) θ =0.31[rad] (b) θ =0.46[rad]

Figs.11. Vector plots of secondary flow for Re=1243 and R/a=15.



Figs.12. Isosafaces of streamwise vorticity ω_θ for Re=1243 and R/a=15 at (a) $0<\theta<\pi/16$. (b) $\pi/16<\theta<2\pi/16$, (c) $2\pi/16<\theta<3\pi/16$, (d) $3\pi/16<\theta<4\pi/16$. Red and blue are positive and negative respectively.